

Chaoyue 600fen



兼容各版教材 涵盖高中三年

高中重难点



专项突破

数学

丛书主编 项昭义

.....
浓缩高中知识精华
一本高中生
必备的完全学习手册



◆ 北京出版社出版集团

▲ 北京教育出版社



Chaoyue 600fen

高中生优秀教辅读物



高中重难点

专项突破

权威编写，品质卓尔不凡；
把握主干，完整知识体系；
一本在手，把握多重收获；
培养能力，以不变应万变。



浓缩高中知识精华
一本高中生必备的完全学习手册



选题策划 毛翔楠
执行策划 毛翔楠 常 宝
责任编辑 乔艳辉 刘振华 张润德
责任印制 柴晓勇 赵天宇
封面设计 李志伟

ISBN 7-5303-4960-0



9 787530 349601 >

定价：26.80元

发行热线：(010) 58572183

邮购垂询：(010) 62063212 62372480

Chaoyue 600fen



兼容各版教材 涵盖高中三年

高中重难点



专项突破

数学



丛书主编
丛书副主编
丛书编委

项昭义	刘富森	陈 斌	
朱时志	刘富森	蒋少增	石敬凯
郭海燕	张国林	杨长风	卢凤梅
曾宪新	朱新洛	罗凌云	张国庆
张思梅	许 萍	杨培明	淡海彬
本册主编	刘富森		
本册编者	司海举	刘富森	王秋芳
	叶正道	李 坤	张 悟
	项昭义	马国军	陆宏远

北京出版社出版集团
北京教育出版社



图书在版编目 (CIP) 数据

超越 600 分高中重难点专项突破. 数学/项昭义主编.—北京:
北京教育出版社, 2006
ISBN 7-5303-4960-0

I. 超… II. 项… III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 013463 号



高中重难点专项突破
数学

GAOZHONG ZHONGNANDIAN ZHUANXIANGTUPO
SHUXUE

丛书主编 项昭义

*

北京出版社出版集团 出版
北京教育出版社

(北京北三环中路 6 号)

邮政编码: 100011

网 址: www.bph.com.cn

北京出版社出版集团总发行

新华书店经销

北京美通印刷有限公司印刷

*

787×1092 16 开本 17.75 印张

2006 年 5 月第 1 版 2006 年 5 月第 1 次印刷

印数 1—15 000

ISBN 7-5303-4960-0

G·4872 定价: 26.80 元

质量投诉电话: 010-58572245 58572393

涵盖高中三年，整合提升，让书由厚变薄

导
读

超越600分

《高中重难点专项突破》丛书终于和大家见面了！作为一套在中国教育变革期精心打造的教辅图书，它紧扣新课改，提纲挈领、重点突出、专项突破。希望它能常在你学习的案头，助你在成功路上步步稳踏！



1 权威编写，品质卓尔不凡

丛书作者均为教学一线资深教师，洞悉教改最新动向和高考最新变化。本书在内容上，不仅准确、实用，而且更融入了老师们多年的教学心得。



2 把握主干，完整知识体系

『多则惑，少则得。』丛书着力于高中各科主干知识的梳理和整合，将教材中分散、零星的知识点红线穿珠，以简洁又便于记忆的图解表解方式归纳重难点，构建完整的知识体系，让你站在系统的高度，一览『众山』小。

3

3 一本在手，把握多重收获

丛书涵盖高中阶段全部重难点，既可作为手册检索、查阅，又可汲取书中典型例题所点拨的解题思路，还可在书中迁移冲浪，举一反三，演练精选习题，自查、提高。一本书，多重收获等着你。

4

4 培养能力，以不变应万变

丛书在梳理高中各学科主干知识的同时，注重归纳各科所涉及的主要思想方法，融合思路，点拨解题技巧，让你在使用本书时，于潜移默化中培养创新思维能力，构建自身能力体系，掌握科学的学习方法，培养以不变应万变来成功应对考试的能力。

深入解读题型，拓展迁移，让你成功应考

Contents 目录

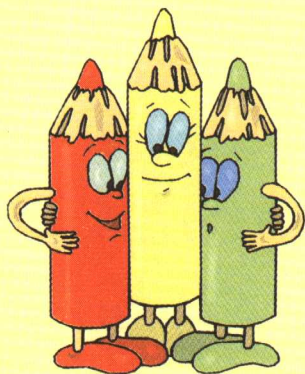
第一单元 集合与简易逻辑 (1)	典型例题 (19)
知识网络 (1)	迁移冲浪 (21)
1.1 集合 (1)	2.2 函数的性质 (22)
重点难点 (1)	重点难点 (22)
典型例题 (2)	典型例题 (23)
迁移冲浪 (3)	迁移冲浪 (25)
1.2 集合间的关系与运算 (4)	2.3 二次函数 (26)
重点难点 (4)	重点难点 (26)
典型例题 (5)	典型例题 (26)
迁移冲浪 (7)	迁移冲浪 (28)
1.3 简单不等式的解法 (8)	2.4 反函数、指数函数 (29)
重点难点 (8)	重点难点 (29)
典型例题 (8)	典型例题 (30)
迁移冲浪 (10)	迁移冲浪 (31)
1.4 简易逻辑 (11)	2.5 对数、对数函数 (32)
重点难点 (11)	重点难点 (32)
典型例题 (12)	典型例题 (33)
迁移冲浪 (14)	迁移冲浪 (34)
1.5 充要条件 (15)	第三单元 数列 (36)
重点难点 (15)	知识网络 (36)
典型例题 (15)	3.1 数列的概念 (36)
迁移冲浪 (16)	重点难点 (36)
第二单元 函数 (18)	典型例题 (37)
知识网络 (18)	迁移冲浪 (38)
2.1 函数的概念 (19)	3.2 等差数列 (39)
重点难点 (19)	重点难点 (39)

典型例题	(39)	5.3 解斜三角形	(76)
迁移冲浪	(41)	重点难点	(76)
3.3 等比数列	(42)	典型例题	(76)
重点难点	(42)	迁移冲浪	(78)
典型例题	(43)	第六单元 不等式	(80)
迁移冲浪	(44)	知识网络	(80)
3.4 数列的求和、应用	(45)	6.1 不等式的定义和性质	(80)
重点难点	(45)	重点难点	(80)
典型例题	(45)	典型例题	(81)
迁移冲浪	(48)	迁移冲浪	(82)
第四单元 三角函数	(50)	6.2 不等式的证明	(83)
知识网络	(50)	重点难点	(83)
4.1 任意角的三角函数	(50)	典型例题	(84)
重点难点	(50)	迁移冲浪	(85)
典型例题	(51)	6.3 不等式的解法	(87)
迁移冲浪	(53)	重点难点	(87)
4.2 两角和与差的三角函数	(54)	典型例题	(89)
重点难点	(54)	迁移冲浪	(90)
典型例题	(54)	6.4 不等式的应用	(92)
迁移冲浪	(58)	重点难点	(92)
4.3 三角函数的图象和性质	(59)	典型例题	(93)
重点难点	(59)	迁移冲浪	(95)
典型例题	(60)	第七单元 直线和圆的方程	(98)
迁移冲浪	(63)	知识网络	(98)
第五单元 平面向量	(65)	7.1 直线方程	(98)
知识网络	(65)	重点难点	(98)
5.1 向量及向量的加、减法	(65)	典型例题	(99)
重点难点	(65)	迁移冲浪	(100)
典型例题	(66)	7.2 两条直线的位置关系	(100)
迁移冲浪	(68)	重点难点	(100)
5.2 实数与向量的积和平面向量的数量积	(69)	典型例题	(101)
重点难点	(69)	迁移冲浪	(104)
典型例题	(70)	7.3 圆的方程	(106)
迁移冲浪	(74)	重点难点	(106)
		典型例题	(106)

迁移冲浪	(108)	9.1 平面的基本性质	(135)
第八单元 圆锥曲线	(110)	重点难点	(135)
知识网络	(110)	典型例题	(136)
8.1 椭圆	(110)	迁移冲浪	(136)
重点难点	(110)	9.2 空间的平行直线与异面直线	(137)
典型例题	(111)	重点难点	(137)
迁移冲浪	(112)	典型例题	(138)
8.2 椭圆的简单几何性质	(113)	迁移冲浪	(139)
重点难点	(113)	9.3 直线和平面平行与平面和平面	(140)
典型例题	(114)	平行	(140)
迁移冲浪	(116)	重点难点	(140)
8.3 直线与椭圆的位置关系	(117)	典型例题	(141)
重点难点	(117)	迁移冲浪	(142)
典型例题	(117)	9.4 直线和平面垂直	(144)
迁移冲浪	(121)	重点难点	(144)
8.4 双曲线及其标准方程	(122)	典型例题	(144)
重点难点	(122)	迁移冲浪	(145)
典型例题	(122)	(二) 空间向量	(147)
迁移冲浪	(124)	知识网络	(147)
8.5 双曲线的简单几何性质	(125)	9.5 空间向量及其运算	(147)
重点难点	(125)	重点难点	(147)
典型例题	(125)	典型例题	(148)
迁移冲浪	(127)	迁移冲浪	(149)
8.6 抛物线及其标准方程	(128)	9.6 空间向量的坐标运算	(150)
重点难点	(128)	重点难点	(150)
典型例题	(129)	典型例题	(151)
迁移冲浪	(130)	迁移冲浪	(152)
8.7 抛物线的简单几何性质	(131)	(三) 夹角和距离	(153)
重点难点	(131)	知识网络	(153)
典型例题	(131)	9.7 直线和平面所成的角与二面角	(153)
迁移冲浪	(134)	重点难点	(153)
第九单元 直线、平面、简单几何体	(135)	典型例题	(154)
(一) 空间的直线与平面	(135)	迁移冲浪	(156)
知识网络	(135)		

9.8 距离	(157)	典型例题	(180)
重点难点	(157)	迁移冲浪	(182)
典型例题	(157)	10.5 概率	(183)
迁移冲浪	(159)	重点难点	(183)
(四) 简单多面体与球	(160)	典型例题	(183)
知识网络	(160)	迁移冲浪	(185)
9.9 棱柱与棱锥	(160)	10.6 互斥事件有一个发生的概率	(186)
重点难点	(160)	重点难点	(186)
典型例题	(161)	典型例题	(187)
迁移冲浪	(164)	迁移冲浪	(188)
9.10 正多面体与欧拉定理	(165)	10.7 相互独立事件同时发生的	
重点难点	(165)	概率	(190)
典型例题	(166)	重点难点	(190)
迁移冲浪	(167)	典型例题	(190)
9.11 球	(167)	迁移冲浪	(192)
重点难点	(167)	第十一单元 概率与统计	(194)
典型例题	(168)	知识网络	(194)
迁移冲浪	(169)	11.1 概率	(194)
第十单元 排列、组合和概率	(170)	重点难点	(194)
知识网络	(170)	典型例题	(195)
10.1 分类计数与分步计数原理		迁移冲浪	(196)
重点难点	(170)	11.2 统计	(197)
典型例题	(171)	重点难点	(197)
迁移冲浪	(173)	典型例题	(198)
10.2 排列	(174)	迁移冲浪	(200)
重点难点	(174)	第十二单元 极限	(203)
典型例题	(174)	知识网络	(203)
迁移冲浪	(176)	12.1 数学归纳法	(203)
10.3 组合	(177)	重点难点	(203)
重点难点	(177)	典型例题	(204)
典型例题	(177)	迁移冲浪	(206)
迁移冲浪	(179)	12.2 极限	(206)
10.4 二项式定理	(180)	重点难点	(206)
重点难点	(180)	典型例题	(207)

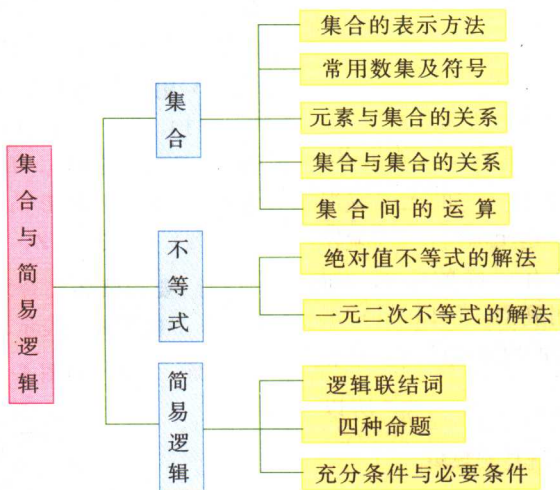
迁移冲浪	(209)	典型例题	(223)
第十三单元 导数与微分	(211)	迁移冲浪	(224)
知识网络	(211)	14.3 复数的加法与减法	(224)
13.1 导数	(211)	重点难点	(224)
重点难点	(211)	典型例题	(225)
典型例题	(212)	迁移冲浪	(226)
迁移冲浪	(214)	14.4 复数的乘法与除法	(226)
13.2 导数的应用	(215)	重点难点	(226)
重点难点	(215)	典型例题	(227)
典型例题	(215)	迁移冲浪	(228)
迁移冲浪	(218)	14.5 复数的三角形式	(228)
第十四单元 复数	(220)	重点难点	(228)
知识网络	(220)	典型例题	(229)
14.1 复数的概念	(220)	迁移冲浪	(230)
重点难点	(220)	14.6 复数的三角形式的运算	(230)
典型例题	(221)	重点难点	(230)
迁移冲浪	(222)	典型例题	(231)
14.2 复数的向量表示	(222)	迁移冲浪	(233)
重点难点	(222)	参考答案	(234)





第一单元 集合与简易逻辑

知识网络



1.1 集合

重点难点

集合与元素	一般地，某些指定的对象放在一起就成为一个集合。集合中的每一个对象叫做集合的一个元素
集合的分类	依元素的属性可分类为数集、点集、序数对集等；依元素多少可分类为有限集、无限集及空集

集合中元素的性质	对于一个给定的集合，它的元素具有确定性、互异性、无序性
集合的表示方法	列举法、描述法、图示法等

典型例题

例1 判断下列说法是否正确，并说明理由。

(1) “学习成绩较好的同学”不能构成集合，而“三好学生”能构成集合；

(2) $0, 1, 2, \left| -\frac{1}{2} \right|, |-2|, 0.5$

这些数组成的集合有五个元素；

(3) 所有的小正数组成一个集合；

(4) 集合 $\{x | x \in \mathbf{R}\}$ 能表示实数集 $\mathbf{R}$ 。

分析 对于一个给定的集合，它的元素应当是确定的，即元素的意义是明确的，“成绩较好”和“小正数”都没有明确的标准，而“三好学生”的标准是明确的，所以(1)正确，(3)不正确。(2)中的数组成的集合只有四个元素，可表示为 $\left\{0, 1, 2, \frac{1}{2}\right\}$ ，所以(2)不正确。(4)所述的就是实数集。

解 (1) 正确；(2) 不正确；(3) 不正确；(4) 正确。

例2 (1) 用列举法表示不超过10的非负偶数的集合，你还可以用什么方法表示？

(2) 设 x, y 都是非零实数，试用列举法将 $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{xy}{|xy|}$ 可能取的值组成的集合表示出来。

解 (1) $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ 。

还可以用描述法表示为 $\{\text{不超过10的非负偶数}\}$ ，或表示为 $\{x | x=2n, n \in \mathbf{N}, n \leq 5\}$ 。

(2) 当 x, y 都取正数时，原式的值为3；当 x, y 中有一个数为负数或两个都是负数时，原式的值为-1。所以原式的可能取值组

成的集合为 $\{3, -1\}$ 。

评注 列举法、描述法是表示集合的两种常用方法，要注意灵活运用。对于(2)的求解，涉及了分类讨论的数学思想，同时要注意集合中元素的互异性。

例3 用图示法表示下列各集合之间的关系：

(1) $A = \{\text{四边形}\}, B = \{\text{平行四边形}\}, C = \{\text{菱形}\}, D = \{\text{矩形}\}, E = \{\text{正方形}\}, F = \{\text{梯形}\}$ ；

(2) $\mathbf{R}, \mathbf{Q}^+, \mathbf{Z}, \mathbf{N}^*, \{0\}$ 。

分析 要弄清各集合之间的关系，然后用图示法（韦恩图）表示。

解 (1) 如图1-1所示；

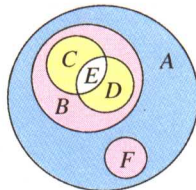


图 1-1

(2) 如图1-2所示。

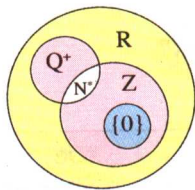


图 1-2

评注 图示法的优点在于能直观地表达有关

集合的相互关系,从而帮助我们深刻理解某些集合.

例4 已知集合 $A = \{x | ax^2 - 3x + 2 = 0, a \in \mathbf{R}\}$.

(1) 若 A 是空集, 求 a 的取值范围;

(2) 若 A 中只有一个元素, 求 a 的值, 并把这个元素求出来;

(3) 若 A 中至少有一个元素, 求 a 的取值范围.

分析 利用集合的有关概念及一元二次方程的根的判别式求解.

解 由已知, 得集合 A 是方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 在实数范围内的解集.

(1) 因为 A 是空集, 所以方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 无实数解, 即 $\Delta = (-3)^2 - 8a < 0$.

$$\therefore a > \frac{9}{8}.$$

(2) 显然, 当 $a = 0$ 时, 方程只有一解 $x = \frac{2}{3}$;

当 $a \neq 0$ 且 $\Delta = 0$, 即 $a = \frac{9}{8}$ 时, 方程有

两个相同的实数解, 集合 A 中只有一个元素, 即 $x = \frac{4}{3}$.

$\therefore$ 当 $a = 0$ 或 $a = \frac{9}{8}$ 时, 集合 A 中只有一个元素, 分别为 $\frac{2}{3}$ 或 $\frac{4}{3}$.

(3) 集合 A 中至少有一个元素, 包括 A 中有一个元素和 A 中有两个元素的情况.

由上知, 当 $\Delta = (-3)^2 - 8a > 0$ 且 $a \neq 0$, 即 $a < \frac{9}{8}$ 且 $a \neq 0$ 时, A 中有两个元素.

综上, 得当 $a \leq \frac{9}{8}$ 时, 集合 A 中至少有一个元素.

评注 对于一元二次方程在利用根的判别式时要注意二次项系数是否为零, 同时, 在求解中, 要注意集合中元素的互异性.

迁移冲浪

一、选择题

1. 集合 $A = \{1, -3, 5, -7, 9, -11, \dots\}$, 用描述法表示正确的是()

- ① $\{x | x = 2^n \pm 1, n \in \mathbf{N}^*\}$;
② $\{x | x = (-1)^n (2n-1), n \in \mathbf{N}^*\}$;
③ $\{x | x = (-1)^n (2n+1), n \in \mathbf{N}^*\}$;
④ $\{x | x = (-1)^{n+1} (2n-1), n \in \mathbf{N}^*\}$.

- A. ④ B. ①④
C. ②④ D. ③④

2. 方程组 $\begin{cases} x+y=1, \\ x^2-y^2=9 \end{cases}$ 的解 (x, y) 的集合是()

- A. $\{(5, 4)\}$ B. $\{5, -4\}$
C. $\{(-5, 4)\}$ D. $\{(5, -4)\}$

3. 下列有四个命题:

- ① 集合 $\mathbf{N}^*$ 中最小的数是 0;
② $-a$ 不属于 $\mathbf{N}$, 则 a 属于 $\mathbf{N}$;
③ $a \in \mathbf{N}, b \in \mathbf{N}$, 则 $a+b$ 的最小值是 2;
④ $x^2+1=2x$ 的解集可表示为 $\{1, 1\}$.

其中, 正确命题的个数是()

- A. 0 B. 1
C. 2 D. 3

4. 已知集合 $A = \{a, b, c\}$ 中的三个元素是 $\triangle ABC$ 的三边长, 那么 $\triangle ABC$ 一定不是()

- A. 锐角三角形 B. 直角三角形
C. 等腰三角形 D. 钝角三角形

二、填空题

1. 用符号“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”填空：

0 $\underline{\hspace{1cm}}$ $\mathbf{N}$, 0 $\underline{\hspace{1cm}}$ $\emptyset$, -1 $\underline{\hspace{1cm}}$ $\mathbf{N}$,

$\sqrt{3}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $\mathbf{N}$, $-\frac{1}{2}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $\mathbf{Q}$, π $\underline{\hspace{1cm}}$ $\mathbf{Q}$,

$\sqrt{2}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $\mathbf{R}$.

2. 设集合 $A = \{(x, y) \mid y = x^2 - 1, |x| \leq 2, x \in \mathbf{Z}\}$, 则集合 A 可用列举法表示为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

3. 设 $\frac{1}{2} \in \{x \mid x^2 - ax - \frac{5}{2} = 0\}$, 则集合 $A = \{x \mid x^2 - \frac{19}{2}x - a = 0\}$ 中所有元素的和为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 所有元素的积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

4. 设集合 $A = \{k^2 - k, 2k\}$, 则实数 k 取值的集合为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

1. 判断下列集合是有限集、无限集, 还是空集.

(1) 某只山羊身上的毛组成的集合;

(2) $\{x \mid \frac{6}{x} \in \mathbf{N}\}$;

(3) $\{x \mid x = (-1)^n, n \in \mathbf{N}\}$;

(4) $\{x \mid x^2 + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$.

2. 用列举法表示下列集合:

(1) $A = \{x \mid x = \frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b}, a, b \text{ 为非零实数}\}$;

(2) $B = \{x \mid \frac{6}{3-x} \in \mathbf{Z}, x \in \mathbf{N}\}$.

3. 已知集合 $A = \{x \mid ax^2 + 2x + 1 = 0, a \in \mathbf{R}\}$.

(1) 若 A 中只有一个元素, 求 a 的值, 并求出这个元素;

(2) 若 A 中至多有一个元素, 求 a 值的集合.

4. 设 a, b 是整数, 集合 $E = \{(x, y) \mid (x-a)^2 + 3b \leq 6y\}$, 点 $(2, 1) \in E$, 但点 $(1, 0) \notin E$, $(3, 2) \notin E$, 求 a, b 的值.

1.2 集合间的关系与运算

重点难点

项目	定义	符号	性质	图形
子集	如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素, 那么集合 A 叫做集合 B 的子集	$A \subseteq B$ (或 $A \subset B$)	① $A \subseteq A$ ② $\emptyset \subseteq A$ ③ 若 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$ ④ 若 A 中有 n 个元素, 则 A 有 2^n 个子集	 
真子集	如果 A 是 B 的子集, 且 B 中至少有一个元素不属于 A , 那么集合 A 叫做集合 B 的真子集	$A \subsetneq B$	① 空集是任何非空集合的真子集 ② 若 $A \subsetneq B, B \subsetneq C$, 则 $A \subsetneq C$	

项目	定义	符号	性质	图形
集合相等	对于两个集合 A 与 B , 如果集合 A 与集合 B 所包含的元素完全相同, 那么叫做集合 A 与集合 B 相等	$A=B$	①如果 $A=B$, 则 $A \subseteq B$, 且 $B \subseteq A$ ②如果 $A \subseteq B$, 且 $B \subseteq A$, 则 $A=B$	
交集	由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合, 叫做集合 A 与集合 B 的交集	$A \cap B$	① $A \cap A = A$ ② $A \cap \varnothing = \varnothing$ ③ $A \cap B = B \cap A$ ④ $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$	 阴影部分表示 $A \cap B$
并集	由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合, 叫做集合 A 与集合 B 的并集	$A \cup B$	① $A \cup A = A$ ② $A \cup \varnothing = A$ ③ $A \cup B = B \cup A$ ④ $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ ⑤若 A, B 是有限集, 则 $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$	 阴影部分表示 $A \cup B$
补集	已知全集 U , 集合 $A \subseteq U$, 由 U 中所有不属于集合 A 的元素组成的集合叫做集合 A 在全集 U 中的补集	$\complement_U A$	① $A \cup (\complement_U A) = U$ ② $A \cap (\complement_U A) = \varnothing$ ③ $\complement_U (\complement_U A) = A$	

典型例题

例1 设集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 5\}$, 则 $\complement_U (A \cap B)$ 等于()

- A. $\{1, 2, 4\}$ B. $\{4\}$
C. $\{3, 5\}$ D. $\varnothing$

分析 先求出 $A \cap B$, 然后再求 $A \cap B$ 的补集.

解 $\because A = \{1, 3, 5\}, B = \{2, 3, 5\},$

$\therefore A \cap B = \{3, 5\}.$

$\therefore \complement_U (A \cap B) = \{1, 2, 4\}.$

故应选 A.

评注 解决有关集合的运算及其关系的问题

时, 除了直接运算外, 我们还可以借助于韦恩图的直观性来解决.

例2 设集合 $M = \left\{x \mid x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\},$
 $N = \left\{x \mid x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, 则()

- A. $M=N$ B. $M \subseteq N$
C. $M \supsetneq N$ D. $M \cap N = \varnothing$

分析 先将集合 M, N 中的元素性质化简, 再比较这两个集合的元素之间的关系, 从而作出判断.

$$\begin{aligned}\text{解 } \because M &= \left\{ x \mid x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbf{Z} \right\} \\ &= \left\{ x \mid x = \frac{2k+1}{4}, k \in \mathbf{Z} \right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N &= \left\{ x \mid x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\} \\ &= \left\{ x \mid x = \frac{k+2}{4}, k \in \mathbf{Z} \right\},\end{aligned}$$

$\therefore M \subseteq N$.

故应选 B.

●评注 判断由描述法表示的集合间的关系时,常将集合中的元素的性质化简,来比较性质之间的关系.

例3 写出集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 的所有真子集.

分析 A 的真子集是由集合 A 中的部分元素所组成. 因此,为了防止在书写时遗漏和重复现象的发生,我们可按子集中所含的元素个数来分类写出.

解 ①不含 A 中任何元素的子集: $\emptyset$.

②只含 A 中一个元素的子集有: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$.

③只含 A 中两个元素的子集有: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$.

④只含 A 中三个元素的子集有: $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$.

●评注 含有 n 个元素的集合的真子集的个数是 $2^n - 1$. 在解题时,可依据它来检验答案是否正确.

例4 已知全集 $U = \{x \mid x \text{ 是小于 } 20 \text{ 的正质数}\}$, $A \cap (\complement_U B) = \{3, 5\}$, $B \cap (\complement_U A) = \{7, 19\}$, $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{2, 17\}$, 求集合 A、B.

分析 我们画出韦恩图可知,两个集合 A、B 将全集分成四部分,依据条件判断出每一部分的元素即可解决问题,同时应注意条件中几个集合的意义: $A \cap (\complement_U B)$ 表示属于 A 而不属于 B 的元素形成的集合.

解 $\because U = \{x \mid x \text{ 是小于 } 20 \text{ 的正质数}\}$,

$$\therefore U = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}.$$

① $A \cap (\complement_U B)$ 中的元素为属于 A 而不属于 B 的元素,其中元素有 3, 5;

② $B \cap (\complement_U A)$ 中的元素为属于 B 而不属于 A 的元素,其中元素有 7, 19;

③ $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$ 中的元素为既不属于 A 又不属于 B 的元素,其中元素有 2, 17.

由图 1-3 有, $A \cap B$ 中的元素为 11, 13.

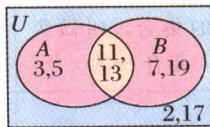


图 1-3

$$\therefore A = \{3, 5, 11, 13\}, B = \{7, 11, 13, 19\}.$$

●评注 解决有限集的关系、运算等有关问题时,我们常常借助于韦恩图进行思考,寻求解决问题的思路,这也就是“数形结合”的数学思想的初步应用.

例5 已知集合 $A = \{x \mid x^2 + (p+2)x + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, 若 $A \cap \{x \mid x > 0\} = \emptyset$, 求实数 p 的取值范围.

分析 由于 $A \cap \{x \mid x > 0\} = \emptyset$, 所以 $A = \emptyset$ 或方程 $x^2 + (p+2)x + 1 = 0$ 没有正数解. 因此,利用一元二次方程的判别式及韦达定理来解决问题.

解 $\because \Delta = (p+2)^2 - 4 = p(p+4)$, $A \cap \{x \mid x > 0\} = \emptyset$,

$\therefore A = \emptyset$ 或 $x^2 + (p+2)x + 1 = 0$ 没有正数解.

(1) 当 $A = \emptyset$ 时, $\Delta < 0$,

$$\therefore p(p+4) < 0,$$

$$\therefore -4 < p < 0.$$

(2) 当 $x^2 + (p+2)x + 1 = 0$ 没有正数解时,

$\because$ 方程的常数项为 1.

$\therefore$ 方程的两根均为负数,

$$\begin{aligned} \therefore & \begin{cases} -(p+2) < 0, \\ \Delta \geq 0. \end{cases} \\ \therefore & \begin{cases} p > -2, \\ p \leq -4 \text{ 或 } p \geq 0. \end{cases} \\ \therefore & p \geq 0. \end{aligned}$$

迁移冲浪

一、选择题

1. 设 A, B, I 均为非空集合, 且满足 $A \subseteq B \subseteq I$, 则下列各式中错误的是()
 A. $(\complement_I A) \cup B = I$
 B. $(\complement_I A) \cup (\complement_I B) = I$
 C. $A \cap (\complement_I B) = \emptyset$
 D. $(\complement_I A) \cup (\complement_I B) = \complement_I A$
2. 设集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 5\}$, 则 $A \cap (\complement_U B)$ ()
 A. $\{2\}$ B. $\{2, 3\}$
 C. $\{3\}$ D. $\{1, 3\}$
3. 已知集合 $M = \{x \mid x^2 < 4\}$, $N = \{x \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}$, 则集合 $M \cap N =$ ()
 A. $\{x \mid x < -2\}$ B. $\{x \mid x > 3\}$
 C. $\{x \mid -1 < x < 2\}$ D. $\{x \mid 2 < x < 3\}$
4. 设集合 $M = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, $N = \{(x, y) \mid x^2 - y = 0, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, 则集合 $M \cap N$ 中元素的个数为()
 A. 1 B. 2
 C. 3 D. 4
5. 已知集合 $M = \{0, 1, 2\}$, $N = \{x \mid x = 2a, a \in M\}$, 则集合 $M \cap N =$ ()
 A. $\{0\}$ B. $\{0, 1\}$
 C. $\{1, 2\}$ D. $\{0, 2\}$
6. 设全集是实数集 $\mathbf{R}$, $M = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$, $N = \{x \mid x < 1\}$, 则 $\complement_{\mathbf{R}} M \cap N$ 等于()

综合 (1) (2) 可知, 符合条件的实数 p 的取值范围为 $\{p \mid p > -4\}$.

●评注 本题主要考查了集合的运算及空集的性质, 以及一元二次方程的基础知识.

- A. $\{x \mid x < -2\}$ B. $\{x \mid -2 < x < 1\}$
 C. $\{x \mid x < 1\}$ D. $\{x \mid -2 \leq x < 1\}$

二、填空题

1. 设集合 $A = \{5, \log_2(a+3)\}$, 集合 $B = \{a, b\}$. 若 $A \cap B = \{2\}$, 则 $A \cup B =$ _____.
2. 设 A, B 为两个集合, 下列四个命题:
 ① $A \not\subseteq B \Leftrightarrow$ 对任意 $x \in A$, 有 $x \notin B$; ② $A \not\subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$; ③ $A \not\subseteq B \Leftrightarrow A \not\supseteq B$; ④ $A \not\subseteq B \Leftrightarrow$ 存在 $x \in A$, 使得 $x \notin B$.
 其中真命题的序号是 _____. (把符合要求的命题序号都填上)
3. 若已知 $B = \{a, b, c, d, e\}$, $C = \{a, c, e, f\}$, 且集合 A 满足 $A \subseteq B$ 且 $A \subseteq C$, 则集合 A 的个数为 _____.
4. 已知集合 $A = \{x \mid x = 3n, n \in \mathbf{N}^* \text{ 且 } x < 15\}$, 集合 $B = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbf{N}^* \text{ 且 } x < 15\}$, 则 $A \cap B$ 等于 _____.

三、解答题

1. 已知非空集合 $A = \{x \mid -2k + 6 < x < k^2 - 3\}$, $B = \{x \mid -k < x < k\}$, 若 $A \subseteq B$, 求实数 k 的取值范围.
2. 设关于 x 的方程 $x^2 + px + q = 0$ 和方程 $x^2 + mx + 15 = 0$ 的解集分别为 A, B , 且满足 $A \cup B = \{3, 5\}$, $A \cap B = \{3\}$, 试求集合 A, B 及实数 m, p, q 的值.
3. 已知全集 $I = \{x \mid 0 < x < 10, x \in \mathbf{N}\}$, A