考研数学

KAOYAN SHUXUE

过关1000题

GUOGUAN 1000TI

朱士信 潘杰 宁荣健 孙胜先 编

题型新颖

题量丰富

解答精妙

过关有效

合肥工业大学出版社

考研数学过关 1000 题

朱士信　潘　杰
宁荣健　孙胜先　编

合肥工业大学出版社

内 容 提 要

本书是作者根据教育部制定的考研数学新大纲，结合近几年来考研数学命题方向和规律精心编写的学习辅导资料，旨在帮助学生通过大容量、多题型的训练，正确理解相关的概念、定理和结论，掌握解题的规律和技巧，培养学生分析问题和解决问题的能力，提高学习效率和考试水平。

本书选题经典，解答精妙，考点突出，是高等学校理工农医经管类各专业学生报考硕士研究生强化数学训练的理想材料，也可作为高等学校低年级学生、自考学生的日常学习辅导材料，同时还可作为相关教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

考研数学过关 1000 题/朱士信等编．—合肥：合肥工业大学出版社，2003.8

ISBN 7-81093-041-9

Ⅰ.考… Ⅱ.①朱… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—习题 Ⅳ.013—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 065425 号

考研数学过关 1000 题

主编 朱士信 潘 杰 宁荣健 孙胜先 责任编辑 疏利民

出 版	合肥工业大学出版社	印 刷	安徽江淮印务有限责任公司印刷
地 址	合肥市屯溪路 193 号 邮编 230009	开 本	787×1092 1/16
电 话	0551-2903038(总编室) 2903198(发行部)	印 张	17.5 字 数 420 千字
网 址	www.hfutpress.com.cn	版 次	2003 年 8 月第 1 版
发 行	全国新华书店	印 次	2006 年 1 月第 3 次印刷

ISBN 7-81093-041-9/O·5 定价：28.00 元

前　　言

“高等数学”、“线性代数”及“概率论与数理统计”是高等学校理工农医经管类各专业学生在大学学习期间的重要基础课程，也是他们报考硕士研究生时的核心课程。但是，由于其概念抽象、信息量大、题型富于变化、解题技巧性强及计算复杂度高等诸多因素，造成广大学生不能很好地把握要点，在考试中难以达到预想的效果。为了使学生对整体的内容有较全面、较清楚的认识，在学习和复习过程中清除各种障碍，编者特别编写这本考研复习资料。

本书是编者多年来通过成功地举办考研辅导班和学生广泛接触、相互交流，深入地了解学生所面临的各种问题的基础上，认真总结教学经验，并对原有的《2001年考研数学同步训练》、《考研数学过关1000题》进行了大量的修改、补充和深加工，重新编写而成。同原有的资料相比，本书更加完善。

作为考研复习资料，本书符合全国硕士研究生入学统一考试“数学考试大纲”的要求。全书共三个部分，第一部分为“高等数学”部分，内容包括一元函数微分学、一元函数积分学、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程。第二部分为“线性代数”部分，内容包括行列式的计算、矩阵的运算、向量和线性方程组、特征值和特征向量。第三部分为“概率论与数理统计”部分，内容包括随机事件和概率、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验。

本书以培养学生能力为主，贯穿“能力—技能—知识”的思维准则。针对性强，覆盖面广，题型多样化，内容由浅入深，难易适中，并在每个章节后配有相应的参考答案与提示，解法精辟、简捷、明了、易懂。从总体上看，本书具有鲜明的特色，是硕士研究生入学考试前一份难得的复习材料。

本书是由参加合肥工业大学考研辅导班的部分任课教师朱士信、潘杰、宁荣健、孙胜先、苏灿荣、唐烁、钱泽平等共同编写。限于编者的水平，书中难免存在不足之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

2003年7月

目　　录

第一部分

高等数学

第 1 章

一元函数微分学

一、填空题

1. 设 $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$，则 $f\left(\dfrac{x}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 的定义域为______.

2. 函数 $f(x)=\int_{x^2}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 的定义域为______.

3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[5]{1-\sqrt{1-x^2}}-1}{\arcsin\left(\mathrm{e}^{-\sqrt{1-x^3}}-1\right)}=$______.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\ln\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)=$______.

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln(1-x^2)+6(x-\sin x)}{x^5}=$______.

6. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^5+7x^4+2)^a-x]=b$. $b\neq0$，则 $a=$______；$b=$______.

7. 设 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sqrt{(1+t)^4+3}-(a+bt+ct^2)}{t^2}=0$，则 $a=$______；$b=$______；$c=$______.

8. 设 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2x}-(\alpha+\beta\sin x)}{\sin^2x}$，且点 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，则 $\alpha=$______；$\beta=$______.

9. 设 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 存在，又 $f(x_0)\neq0$，则

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x_0+\frac{1}{x})}{f(x_0)}\right]^x=\text{______}.$$

10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sin x^2}\int_{\frac{x}{2}}^{x}\dfrac{\mathrm{e}^{xt}-1}{t}\mathrm{d}t=$______.

11. 设 $f(x)=\dfrac{1}{|a|+a\mathrm{e}^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

    则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=$______；$\lim\limits_{x\to0}f(x)=$______.

12. 对数螺线 $\rho=\mathrm{e}^{\theta}$ 在点 $(\rho,\theta)=\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程为______.

13. 曲线 $\sin(xy)-\mathrm{e}^{2x}+y^3=0$ 在 $x=0$ 处的切线方程是______；法线方程是______.

14. 若二次曲线 $y=ax^2+bx+c\quad(0<x<1)$，将两条曲线

$l_1: y = e^x (-\infty < x \leqslant 0)$;　　$l_2: y = \dfrac{1}{x}\ (1 \leqslant x < +\infty)$

连接成处处有切线的曲线，则该二次曲线为 $y =$ ________.

15. 设 $f(x)$ 是 x 的多项式，满足 $xf''(x) + (1-x)f'(x) + 3f(x) = 0$. 且 $f(0) = 1$，则 $f(x) =$ ________.

16. 已知 $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0} =$ ________.

17. $\dfrac{d^n}{dx^n}(x^{n-1}\ln x) =$ ________.

18. 设 $\varphi(x) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{(e^{t^x}-1)[f(x+\pi^2 t) - f(x)]}{t^2}$，其中 $f(x)$ 二阶可导，则 $\varphi'(x) =$ ________.

19. 设 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处有连续的一阶导数，且 $f'(1) = 2$，则 $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{d}{dx} f(\cos\sqrt{x-1}) =$ ________.

20. 设 $f(\sqrt{x}) = \sin x$. 则 $f'(f(x)) =$ ________.

二、选择题

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > \lim\limits_{n\to\infty} y_n$，则(　　)正确

(A) $x_n > y_n$.　　(B) $\forall n, x_n \neq y_n$.

(C) $\exists N$，使当 $n > N$ 时，$x_n > y_n$.　　(D) x_n 与 y_n 大小关系不定.

2. 曲线 $y = e^{1/x^2} \arctan \dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ 的渐近线有(　　)

(A) 1 条.　　(B) 2 条.　　(C) 3 条.　　(D) 4 条.

3. 设 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义，$f(x)$ 是连续函数，且 $f(x) \neq 0$，$\varphi(x)$ 有间断点，则正确的结论为(　　)

(A) $\varphi(f(x))$ 必有间断点.　　(B) $f(\varphi(x))$ 必有间断点.

(C) $\varphi^2(x)$ 必有间断点.　　(D) $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.

4. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，且对一切 x_1, x_2，恒有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$，则 $f(x)$ (　　)

(A) 仅在 $x = 0$ 处连续.　　(B) 在任意点处连续.

(C) 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有可去间断点.　　(D) 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有跳跃间断点.

5. 设 $f(x), g(x)$ 定义在 $(-1,1)$ 上，且都在 $x = 0$ 处连续，若 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{x}, & x \neq 0, \\ 2 & x = 0, \end{cases}$ 则(　　)

(A) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ 且 $g'(0) = 0$.　　(B) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ 且 $g'(0) = 1$.

(C) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ 且 $g'(0) = 2$.　　(D) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$ 且 $g'(0) = 0$.

6. 设 $\delta > 0$，$f(x)$ 在 $(-\delta, \delta)$ 内有定义，若当 $x \in (-\delta, \delta)$ 时，恒有 $|f(x)| \leqslant x^2$，则 $x = 0$

必是 $f(x)$ 的(　　)

(A) 间断点.　(B) 连续而不可导的点.

(C) 可导点,且 $f'(0)=0$.　(D) 可导点,且 $f'(0)\neq 0$.

7. 设 $f(x)$ 处处可导,则(　　)

(A) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$,必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$.

(B) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$,必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

(C) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$.

(D) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

8. 已知 $f(x)=5x^2+Ax^{-5}(x>0)$,其中 A 为正常数. 若对所有正整数 x 均有 $f(x)\geqslant 28$,则应取最小的 A 为(　　)

(A) 1.　(B) 5.　(C) 2^3.　(D) 2^8.

9. 函数 $y=|\pi^2-x^2|\sin^2 x$ 的不可导点个数为(　　)

(A) 0.　(B) 1.　(C) 2.　(D) 3.

10. 设偶函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数,并已知 $f''(0)\neq 0$,则 $x=0$(　　)

(A) 不是 $f(x)$ 的极值点.　(B) 一定是 $f(x)$ 的极值点.

(C) 不是 $f(x)$ 的驻点.　(D) 是否为 $f(x)$ 的极值点不能确定.

11. 若 $f(x)=-f(-x)$,在 $(0,+\infty)$ 内 $f'>0,f''>0$,则在 $(-\infty,0)$ 内(　　)

(A) $f'<0,f''<0$.　(B) $f'<0,f''>0$.

(C) $f'>0,f''<0$.　(D) $f'>0,f''>0$.

12. 奇函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上可导,且 $|f'(x)|\leqslant M$(M 为正常数),则必有(　　)

(A) $|f(x)|\geqslant M$.　(B) $|f(x)|>M$.

(C) $|f(x)|\leqslant M$.　(D) $|f(x)|<M$.

13. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有连续的四阶导数,且当 $x\neq 0$ 时,$f(x)\neq 0$,同时

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan x-\sin x}{f(x)}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续,则必有(　　)

(A) $f'(0)=1$.　(B) $f''(0)=2$.　(C) $f'''(0)=3$.　(D) $f^{(4)}(0)=4$.

14. 设 $F(x)=\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t$,$f(x)$ 为连续函数,且 $f(0)=0,f'(x)>0$,则 $y=F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内是(　　)

(A) 递增且为凹弧.　(B) 递增且为凸弧.

(C) 递减且为凹弧.　(D) 递减且为凸弧.

15. 设 $f(x),g(x)$ 具有任意阶导数,且满足

$$f''(x)+f'(x)g(x)+f(x)x=\mathrm{e}^x-1,\quad f(0)=1,f'(0)=0,$$

则(　　)

(A) $f(0)=1$ 为 $f(x)$ 的极小值.　(B) $f(0)=1$ 为 $f(x)$ 的极大值.

(C) $(0,f(0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.　(D) 由 $g(x)$ 才能确定 $f(x)$ 的极值或拐点.

16. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上可导，从定性上看，区间$[0,1]$上，下列三个图形分别是 $y=f(x)$，$y=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 与 $y=f'(x)$ 的图形是(　　)

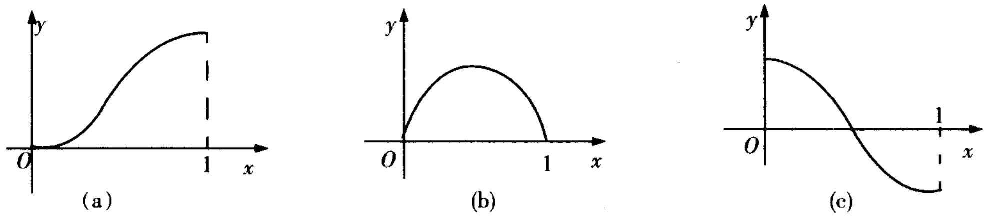

图 1-1

(A) (a),(b),(c).　　　　(B) (a),(c),(b).

(C) (b),(a),(c).　　　　(D) (c),(a),(b).

17. 已知 $f(x)$ 在$[a,b]$上二阶可导，且 $f'(x)\neq 0$，问在下列的哪个条件下，能保证至少存在一个 $\xi\in(a,b)$，使 $f''(\xi)+f(\xi)=0$.(　　)

(A) $f'(a)f(b)=f'(b)f(a)$.　　　　(B) $f'(a)f(a)=f'(b)f(b)$.

(C) $f'^2(a)+f^2(b)=f'^2(b)+f^2(a)$.　　　　(D) $f'^2(a)-f^2(b)=f'^2(b)-f^2(a)$.

18. 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x^3)\sin\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}t, & x>0,\end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　)

(A) 极限不存在.　　　　(B) 极限存在但不连续.

(C) 连续但不可导.　　　　(D) 可导.

19. 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，若使 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则必有(　　)

(A) $f(0)=0$.　　　　(B) $f'(0)=0$.

(C) $f(0)+f'(0)=0$.　　　　(D) $f(0)-f'(0)=0$.

20. 设 $f(x)$，$g(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $f(x)$ 具有一阶连续导数，满足 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{x}=0$，$f'(x)=-2x^2+\int_0^x g(x-t)\mathrm{d}t$，则(　　)

(A) $x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点.　　　　(B) $x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点.

(C) $(0,f(0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

三、计算与证明题

1. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}$.

2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$.

3. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

4. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

5. 求$\lim\limits_{n\to\infty}n^2(a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}})$，其中 $a>0$ 且 $a\neq1$.

6. 求$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$，其中 $m>2,n>2$.

7. 设 $f(0)=0,f'(0)=1$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[f\left(\dfrac{1}{n^2}\right)+f\left(\dfrac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{n}{n^2}\right)\right]$.

8. 设 $f(x)$ 有连续的二阶导数，且$\lim\limits_{x\to0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^3$，求 $f(0),f'(0),f''(0)$ 及 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

9. 设 $f(x)$ 是首项系数为 1 的三次多项式，且$\lim\limits_{x\to2a}\dfrac{f(x)}{x-2a}=\lim\limits_{x\to4a}\dfrac{f(x)}{x-4a}=1(a\neq0)$，求 $\lim\limits_{x\to3a}\dfrac{f(x)}{x-3a}$.

10. 求$\lim\limits_{x\to e}\dfrac{e^{x^x}-e^{e^x}}{\tan x^x-\tan e^x}$.

11. 设 $f(x)=\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 $x\neq0,a_i>0$ 且 $a_i\neq1,i=1,2,\cdots,n,n\geqslant2$，试求：

(1) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$；　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$；　(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

12. 求$\lim\limits_{n\to+\infty}n^3\left(\sin\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2}{n}\right)$.

13. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1\dfrac{x^ne^x}{1+e^x}dx$.

14. $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，试确定常数 a 的值，使

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+a[x]\right]$$

存在，并求出此极限.

15. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$f(0)=0,f'(0)=0,f''(x)>0$. 在曲线 $y=f(x)$ 上任意一点 $(x,f(x))(x\neq0)$ 处作此曲线的切线，此切线在 x 轴上的截距记为 u，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(u)}{uf(x)}$.

16. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+\beta x}{x^{2n}+1}$，$n$ 为正整数，试确定常数 a,β 的值，使$\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$ 都存在.

17. 试确定常数 k,c，使得当 $x\to+\infty$ 时，有

$$\arcsin(\sqrt{x^2+\sqrt{x}}-x)\sim\frac{c}{x^k}.$$

18. 已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}f(x)}-1}{x^2}=c, c\neq 0$. 求常数 l 与 k 使得当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)\sim lx^k$.

19. 试证方程 $x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}=1$ 对任何不小于 2 的正整数 n，在 $(0,1)$ 内都有惟一实根 x_n 及 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

20. 设 $-1<x_0<0, x_{n+1}=x_n^2+2x_n, n=0,1,\cdots$，试求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

21. 设 $x_0=a, x_1=b, x_n=\dfrac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}, n=2,3,\cdots$，试求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

22. 设 $a>0, u_1>0, u_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2u_n+\dfrac{a}{u_n^2}\right), n=1,2,\cdots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

23. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$.

24. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+\dfrac{1}{k}}2^{\frac{k}{n}}$.

25. 把 $[a,b]\,(0<a<b)$ 分成 n 等份，设分点

$$a=x_1<x_2<\cdots<x_{n+1}=b,$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{x_1x_2\cdots x_{n+1}}$.

26. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}[(n+1)(n+2)\cdots(n+n)]^{\frac{1}{n}}$.

27. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x|\sin t|\,dt$.

28. 试讨论 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

29. 求函数 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x(\pi+2x)}{2\cos x}, & x\leqslant 0,\\ \sin\dfrac{1}{x^2-1}, & x>0\end{cases}$ 的间断点.

30. 证明：在 $(-\infty,+\infty)$ 内方程 $|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x=0$ 有且仅有两个实根.

31. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)$ 只取有理值. 又 $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$，证明：对于在 $[0,1]$ 上的一切 x，恒有 $f(x)=\dfrac{1}{2}$.

32. 设函数 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的周期函数，且在整个数轴上连续，证明方程 $f(x)=f(x-l)$ 在任何区间长度为 l 的闭区间上至少有一个实根.

33. 已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且对于任意的 $x_1\in[a,b]$，总存在有 $x_2\in[a,b]$，使 $|f(x_2)|=\dfrac{1}{2}|f(x_1)|$，证明：$\exists\,\xi\in[a,b]$，使 $f(\xi)=0$.

34. 设 $f(x)$ 在 $[0,n]$ 上连续（n 为大于 1 的整数），且 $f(0)=f(n)$，证明：$\exists\,\xi\in[0,n-1]$，

使 $f(\xi)=f(\xi+1)$.

35. 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$，证明 $f(x)$ 必有最小值.

36. 设 $f(x)$ 为单调可导函数，其反函数为 $g(x)$，且已知 $f(1)=2$，$f'(1)=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$f''(1)=1$，求 $g''(2)$.

37. 给定 $n\to\infty$ 时，无穷小如下：

(a) $1-\cos\dfrac{1}{n}$；　(b) $\sqrt[n]{1+\alpha}-1$；　(c) $\dfrac{1}{n}\tan^2\dfrac{1}{n}$；　(d) $\ln\left(1+\dfrac{1}{n^4}\right)$；

(e) $a^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\ (a>0,a\neq 1)$，

按高阶向低价的次序将它们排列起来.

38. 已知定义于 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=2$，若对于任意的 x,y，恒有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$，试求 $f(x)$ 的表示式.

39. 设 $f(x)=(x-a)^n\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在点 a 的某邻域内具有 $n-1$ 阶导数，求 $f^{(n)}(a)$.

40. 设 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{f^{(n)}(-1)}$.

41. 设 $u=f[\varphi(x)+y^2]$，其中 x,y 满足方程 $y+e^y=x$，且 $f(x)$，$\varphi(x)$ 均二阶可导，求 $\dfrac{du}{dx}$，$\dfrac{d^2u}{dx^2}$.

42. 设 $f(x)$ 可导，且 $f(x)\neq 0$，证明曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=f(x)\sin x$ 在它们的交点处相切.

43. 设 $f(x)$ 满足 $3f(x)-f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}$，$x\neq 0$. 求 $f(x)$ 的极值与渐近线.

44. 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 (a,b) 内连续，且 $f(x)\neq g(x)$，$g(x)\neq 0$，$x\in(a,b)$，又设 $G(x)=\dfrac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}$ 在 $x_0\in(a,b)$ 处取得极大值，证明：$F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 x_0 处取得极小值.

45. 设非正函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x)\leqslant 0$，又 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的任何子区间内不恒等于零，证明：若方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内有实根，则实根必惟一.

46. 设 $f(x)$ 当 $x\in[a,+\infty)$ 有连续导数，且 $f'(x)\geqslant k>0$，$f(a)<0$，则 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内有惟一零点.

47. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上二次可微，且 $f(a)>0$，$f'(a)<0$，$f''(x)<0\ (x>a)$，则方程 $f(x)=0$ 在 $(a,+\infty)$ 内只有一个实根.

48. 设 $f(x)$ 在 $x\geqslant a$ 时连续，在 $x>a$ 时可导，又设 $f(a)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，证明方程 $f'(x)=0$ 在 $(a,+\infty)$ 上至少有一个实根.

49. 设函数 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\int_a^b\varphi(x)dx=0$，$\int_a^b x\varphi(x)dx=0$，证明 $\varphi(x)$ 在 (a,b) 内至少存在两个实零点.

50. 试确定常数 k 的取值范围，讨论方程 $x-\dfrac{\pi}{2}\sin x=k$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内实根的存在性，若实根存在，并指出根的个数.

51. 设 $x>0$，试求实常数 k 的取值范围，讨论方程 $kx+\frac{1}{x^2}=1$ 的实根的存在性，并确定相应实根的个数.

52. 证明，若 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

53. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，x_1 与 x_2 是 (a,b) 内的两点，$g(x)$ 由下式定义：

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}, & x\neq x_1. \\ f'(x_1), & x=x_1. \end{cases}$$

证明，对 $f'(x_1)$ 与 $g(x_2)$ 之间的任何值 μ，在 x_1 与 x_2 之间至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=\mu$.

54. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数，且 $f(a)=f(b)$，证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{b-\xi}$.

55. 设 $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)(0<\theta<1)$，$f^{(n+1)}(x)$ 连续且 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$，证明 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}$.

56. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $g(0)=g(1)=0$，证明：$\exists\,\xi\in(0,1)$，使

$$g'(\xi)-g(\xi)f'(\xi)=0.$$

57. 设 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上二阶可导，且 $|f(x)|\leqslant 1$，又 $f^2(0)+[f'(0)]^2=4$，试证：在 $(-2,2)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)+f''(\xi)=0$.

58. 设 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上二阶可导，且 $f(0)=0,f(1)=1,f(4)=2$. 证明 $\exists\,\xi\in(0,4)$，使

$$f''(\xi)=-\frac{1}{3}.$$

59. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=0,f(1)=1$，则存在 $\xi,\eta\in(0,1)$，使

$$\frac{1}{f'(\xi)}+\frac{1}{f'(\eta)}=2.$$

60. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)\cdot f(b)>0$，$f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$. 试证对任意实数 k，在 (a,b) 内存在 ξ，使得 $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=k$.

61. 设函数 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $\varphi(0)=\varphi(1)=0$. 证明方程 $2\varphi'(x)+x\varphi''(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内有一实根.

62. 设 $f(x)$ 是 $[0,2]$ 上的连续函数，在 $(0,2)$ 内可导，且有 $f(2)=5f(0)$，证明存在一点 $\xi\in(0,2)$，使 $(1+\xi^2)f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

63. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=0$，且 $|f'(x)|\leqslant\frac{1}{2}|f(x)|$，证明：在 $[0,1]$ 上 $f(x)\equiv 0$.

64. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有三阶导数，且 $|f'''(x)|\leqslant M$（M 为正的常数）. 证明：若点 $M_0(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内的拐点，则

$$|f''(a)|+|f''(b)|\leqslant M(b-a).$$

65. 设 $x_1\neq x_2$，且 $x_1x_2>0$. 试证在 x_1 与 x_2 之间存在一点 ξ，使

$$x_1e^{x_2}-x_2e^{x_1}=(1-\xi)e^{\xi}(x_1-x_2).$$

66. 设 $0\leqslant a<b$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 内可导，证明在 (a,b) 内存在三点 x_1,x_2,x_3 使

$$f'(x_1)=(b+a)\frac{f'(x_2)}{2x_2}=(a^2+ab+b^2)\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}.$$

67. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明 $\exists\xi\in(0,1)$，使

$$\int_0^{\xi}f(t)\mathrm{d}t=(1-\xi)f(\xi).$$

又若 $f(x)>0$ 且单调减少，则这种 ξ 是惟一的.

68. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上有连续的导数，

(1) 若 $f(0)=f(2)$，证明 $\exists\xi\in(0,2)$，使

$$f'(\xi)=3\xi^2[f(\xi)-f(0)];$$

(2) 若 $\exists\alpha\in(0,2)$，使 $f'(\alpha)=0$，证明 $\exists\xi\in(0,2)$，使 $f'(\xi)=3\xi^2[f(\xi)-f(0)]$.

69. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内具有二阶连续的导数，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，证明：当 n 充分大时，存在常数 $M>0$. 有 $\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right|\leqslant\dfrac{M}{2n^2}$.

70. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内的二阶导数 $f''(x)>0$，且 n 个正常数 $\alpha_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$，满足 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$，证明：对 (a,b) 内任意的 n 个点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，有不等式

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n)\leqslant\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)+\cdots+\alpha_nf(x_n).$$

71. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶导数，证明，若 $f'(a)=f'(b)=0$，则在 (a,b) 内至少存在一点 c，使

$$|f''(c)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

72. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)=0$，证明，若 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导数，且 $f'_+(a)>0$，则在 (a,b) 内至少存在一点 η，使 $f''(\eta)<0$.

73. 证明：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶导数，且对任意的 $x\in(a,b)$，有 $f''(x)<0$，又 $f(a)=f(b)=0$，则 $\forall x\in(a,b)$，有 $f(x)>0$.

74. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上有连续的三阶导数，且 $f(0)=1$，$f(2)=2$，$f'(1)=0$，证明在 $(0,2)$ 内至少存在一点 ξ，使 $|f'''(\xi)|\geqslant3$.

75. 证明不等式

$$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}\quad(x>0).$$

76. 证明：当 $x>0$ 时，$(1+x)^{1+\frac{1}{x}}<e^{1+\frac{x}{2}}$.

77. 证明：当 $0<x<y$，$0<\alpha<\beta$ 时，有不等式

$$(x^{\beta}+y^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}<(x^{\alpha}+y^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}.$$