SHUXUE

高中全新课时优化学习

数学 (人教版A) 必修4

优化学习编写组 编

浙江大学出版社

高中全新课时优化学习(必修4)

数　学

主　编　张焕明
副主编　王卓明　郑崇乐　洪学娟
编　委　江战明　蔡洪明　谢晓强　阮正禹
杨玉明　沈建海　沈旭美　姚根红
刘建忠　徐　慧　何蓉勇

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中全新课时优化学习. 数学. 必修 4/张焕明主编.
—杭州：浙江大学出版社，2005.1
ISBN 7-308-04031-3

Ⅰ. 高... Ⅱ. 张... Ⅲ. 数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 118323 号

出版发行 浙江大学出版社
(杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027)
(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址：http://www.zjupress.com)
责任编辑 曹发和 杨晓鸣
经　　销 浙江省新华书店
排　　版 杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷 浙江省临安市曙光印务有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 66
字　　数 1900 千字
版 印 次 2005 年 1 月第 1 版 2006 年 9 月第 2 次印刷
书　　号 ISBN 7-308-04031-3/G・785
定　　价 70.00(全套)

前　言

从2006年秋季开始，普通高中新课程教材实验在我省启动．这项试验对每一个教育工作者，特别是一线教师来说，带来的不仅仅是机遇，也是一项严峻的挑战．一册册新的知识模块，把每一个教育工作者，不管是经验丰富的，还是刚刚走上工作岗位的，都领到了同一起跑线上，来重新进行组织教学．毋庸置疑，当前，谁对教材研究透，把握准，应用活，谁就会在日后的教学中立于有利之地，否则，难免会走弯路．

为了给师生提供既符合新课标理念，又与人民教育出版社A版教材同步配套的教学辅导书，我们组织了对新教材有着较深研究的特高级骨干教师，编写了这套《高中全新课时优化学习丛书》．本书是数学必修教材五个模块之一的数学4．

本套书按章分类并按课时进行编写，每一课时为一个独立单元．主要设置如下栏目：

【知识扫描】

设计成"填空题形式"，读者只要将其直接填上即可完成对这些重要知识的回顾．

【三点剖析】

一般设"重点"、"难点"、"疑点"各一个例题，每个例题下配有一个"类题演练"，读者可模仿例题进行演练，以形成对这些重点、难点和疑点知识的透彻理解与巩固．

【方法导航】

将涉及到的一些常用方法进行归纳，以形成对常规方法、重要数学思想的理解和掌握．

【星级训练】

从"为了一切学生"出发，本栏目共设置12道题目，其中选择题填空题和解答题各四题；按其难度分为★(容易题)五题★★(中档难度题)四题★★★(稍难题)二题★★★★(难题)一题；每种题型都是由易到难排列，意在使读者形成对所学内容的全方位理解与掌握．

为了使使用本书的读者达到最佳的效果，同时又要方便读者使用本书，我们将书中的读者自练题的解题过程单独列出，作为附录送给读者．

理想与实际可能还有一定的距离，但我们已经努力；由于书中仍有许多不足，我们仍需努力，恳请各位在使用后能将不足之处告诉我们，以便改进(邮箱：zhm-203@263.net)！

编　者

2006年6月28日

目　录

第一章　三角函数

第二章　平面向量

第三章　三角恒等变换

第一章　三 角 函 数

本章要览

一、知能目标

1. 本章所涉及到的知识有任意角(正角、负角、零角),弧度制,任意角的三角函数(正弦、余弦、正切),单位圆中的三角函数线,同角三角函数的基本关系(平方关系,商数关系),三角函数的诱导公式,正弦函数、余弦函数的图像、性质(周期性、奇偶性与单调性),正切函数的性质与图像,函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像与性质,三角函数模型的简单应用.

2. 理解任意角的概念、弧度的意义.掌握任意角的正弦、余弦与正切,能利用科学计算器进行弧度与角度的换算,并能求正弦、余弦值.

3. 掌握同角三角函数的基本关系式,正弦、余弦的诱导公式,了解正弦函数、余弦函数、正切函数的图像和性质,进而会利用 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像与性质解决问题.

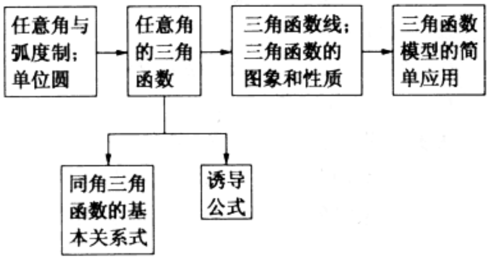
4. 能初步运用三角函数模型解决三角函数中的简单问题,初步培养学生运用数形结合、转化等数学思想方法解决三角函数问题的能力.

5. 加强三角函数应用意识的训练,三角函数是以角为自变量的函数,也是以实数为自变量的函数,同时又广泛地应用于客观实际,故应培养实践第一的观点.

6. 要注重"三基"的落实,体现三角函数的基础性,加强对三角知识的工具性的认识.

7. 深化对三角函数图像与性质的理解,使学生在认识事物时能自觉运用联系、变化的观点看问题.

二、知识网络



第1节　任意角和弧度制

本节课时划分:

第一课时　任意角

第二课时　弧度制

第一课时　任意角

知识扫描

1. 角可以看成由一条射线绕其端点旋转而形成的,旋转开始时的射线叫做角的始边,终止时的射线叫做角的终边,射线的端点叫做角的顶点.规定按逆时针方向旋转形成的角叫正角;按顺时针方向旋转形成的角叫负角;如果一条射线没有作任何旋转,我们也认为这时形成了一个角,并把这个角叫零角.

2. 在直角坐标系中讨论角时,使角的顶点与原点重合,角的始边与 x 轴正半轴重合,这时角的终边(端点除外)在第几象限,就说这个角是第几象限角;如果角的终边在坐标轴上,则认为此角不属于任何一个象限.

3. 终边相同的角有无数个;相等的角的终边一定相同,但终边相同的角不一定相等.

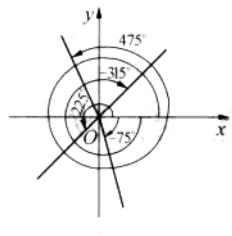
4. 所有与角 α 终边相同的角,连同角 α 在内,可构成一个集合 $S=\{\beta \mid \beta=\alpha+k\cdot 360^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$,即任一与角 α 终边相同的角,都可以表示成角 α 与整数个周角的和.

三点剖析

一、任意角的概念,象限角的概念是重点

例1　给出下列四个命题:① -75°是第四象限角;② 225°是第三象限角;③ 475°是第二象限角;④ -315°是第一象限角.其中正确的有________.

解析　由图可知$-75°,225°,475°,-315°$的终边分别落在第四、第三、第二、第一象限，故①②③④均正确.



温馨提示　1. 理解角概念的推广，利用角的形成，指出角终边的位置，判断象限角.

2. 若角的终边在坐标轴上，则认为此角不属于任何一个象限.

类题演练1

在直角坐标系中，作出下列各角：

(1) $360°$；(2) $720°$；(3) $1080°$；(4) $1440°$.

二、把终边相同的角用集合和符号语言正确地表示出来是难点

例2　写出与$-1840°$终边相同的角的集合S；若$\alpha\in S$，且$\alpha\in[-720°,360°)$，判断角α的个数，并求α.

解析　$\because -1840°=320°+(-6)\cdot 360°$

$\therefore S=\{\alpha\mid\alpha=320°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$

当$\alpha\in S$且$\alpha\in[-720°,360°)$，则$k=-2,-1,0$，共三个，它们是$-400°,-40°,320°$.

温馨提示　1. 本题考查终边相同角集合的写法，并能在规定的范围内找出与已知角终边相同的角.

2. 本题也可考虑将S写成$S=\{\alpha\mid\alpha=-1840°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$，然后在规定的范围内找出与$-1840°$终边相同的角.

类题演练2

与$-457°$角终边相同角的集合是　　(　　)

A. $\{\alpha\mid\alpha=k\cdot 360°+457°,k\in\mathbf{Z}\}$

B. $\{\alpha\mid\alpha=k\cdot 360°+97°,k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{\alpha\mid\alpha=k\cdot 360°+263°,k\in\mathbf{Z}\}$

D. $\{\alpha\mid\alpha=k\cdot 360°-263°,k\in\mathbf{Z}\}$

三、终边相同的角不一定相等是疑点

例3　若角α、β的终边相同，则$\alpha-\beta$的终边在　　(　　)

A. x轴的非负半轴　　B. y轴的非负半轴

C. x轴的非正半轴　　D. y轴的非正半轴

解析　$\because$角α、β的终边相同，

$\therefore \alpha=k\cdot 360°+\beta(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore \alpha-\beta=k\cdot 360°(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore \alpha-\beta$的终边在x轴的非负半轴上.

答案　A

温馨提示　1. 任一与角β终边相同的角，都可以表示成β与整数个周角的和.

2. 相等的角的终边一定相同，但终边相同的角有无数个.

3. $\alpha-\beta=k\cdot 360°(k\in\mathbf{Z})$表示角的终边与零角终边重合，即$\alpha-\beta$的终边在$x$轴的非负半轴上.

类题演练3

若α与β的终边互为反向延长线，则有　　(　　)

A. $\alpha=\beta+180°$

B. $\alpha=\beta-180°$

C. $\alpha=-\beta$

D. $\alpha=\beta+(2k+1)\times 180°(k\in\mathbf{Z})$

方法导航

1. 讲与角α终边相同的角的一般形式$\alpha+k\cdot 360°$时，应指出：(1) $k\in\mathbf{Z}$. (2) α是任意角. (3) 终边相同的角不一定相等，但相等的角的终边一定相同.

2. 角的概念推广后，应强调指出：①“$0°$到$90°$的角”指的区间$[0°,90°)$.

②“第一象限角”表示成$\{\theta\mid k\cdot 360°<\theta<90°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

③“锐角”表示成$\{\theta\mid 0°<\theta<90°\}$.

④“小于$90°$的角”表示成$\{\theta\mid\theta<90°\}$.

星级训练

一、选择题

★1. 下列各角中，与角$330°$的终边相同的角是　　(　　)

A. $510°$　B. $150°$　C. $-150°$　D. $-390°$

★2. 下列命题中正确的是　　(　　)

A. 终边相同的角都相等

B. 第一象限的角都比第二象限的角小

C. 第一象限的角都是锐角

D. 锐角都是第一象限的角

★3. 与$130°$角终边相同的角是　　(　　)

A. $-590°+k\cdot 360°(k\in\mathbf{Z})$

B. $-130°+k\cdot 360°(k\in\mathbf{Z})$

C. $130°+(2k+1)\cdot 180°(k\in\mathbf{Z})$

D. $650°+k\cdot 360°(k\in\mathbf{Z})$

★★4. 若α是第二象限角，则$180°-\alpha$是(　　)

A. 第一象限角　　B. 第二象限角

C. 第三象限角　　D. 第四象限角

二、填空题

★5. 在0°到360°范围内与$-381°$终边相同的角是________，在$-360°$到720°范围内与$-381°$终边相同的角有_______个，分别是_______.

★★6. 终边在x轴上角的集合是_______，终边在y轴上角的集合是_______，终边在第一象限的角的集合是_______.

★★7. 若α为锐角，则$-\alpha+k\cdot 360°(k\in \mathbf{Z})$在第_______象限.

★★★8. 已知集合$A=\{$第一象限角$\}$，$B=\{$锐角$\}$，$C=\{$小于90°的角$\}$，则集合A、B、C的关系为_______.

三、解答题

★★9. 在0°～360°间，求出与下列各角终边相同的角，并判断下列各角是哪个象限的角.

(1) $908°28'$；(2) $-734°$.

★★★10. 写出在$-720°$到720°之间与$-1050°$角终边相同的角的度数.

★★★11. 若集合$A=\{\alpha\mid k\cdot 180°+30°<\alpha<k\cdot 180°+90°, k\in \mathbf{Z}\}$，集合$B=\{\beta\mid k\cdot 360°-45°<\beta<k\cdot 360°+45°, k\in \mathbf{Z}\}$，求$A\cap B$.

★★★★12. 已知角α是第二象限角，试判断$\frac{\alpha}{2}$和2α各是第几象限角.

第二课时　弧度制

知识扫描

1. 我们规定周角的$\frac{1}{360}$为1度的角；把弧长等于半径的弧所对的圆心角叫做1弧度的角.

2. 正角的弧度数为一个正数；负角的弧度数为一个负数；零角的弧度数为0；$|\alpha|=\frac{l}{r}$（其中α为圆心角的弧度数）.

3. $180°=\pi\text{rad}$；$1\text{rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)°\approx 57.30°$；$1°=\frac{\pi}{180}\text{rad}\approx 0.01745\text{rad}$

4. 弧度制下的弧长公式为$l=\alpha R$，扇形面积公式为$S=\frac{1}{2}lR$，角度制下的弧长公式为$l=\frac{n\pi R}{180}$.

三点剖析

一、弧度制定义和角度制与弧度制的换算是重点

例1　按照下列要求，把$22°30'$化成弧度.

(1) 精确值；

(2) 精确到0.001的近似值.

解析　(1) $22°30'=22.5°=22.5\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{8}\text{rad}$.

(2) 利用计算器有 $\boxed{\text{MODE}}\ \boxed{\text{MODE}}$ 2

22 $\boxed{\circ\ ,\ ,\ ,}$ 30 $\boxed{\circ\ ,\ ,\ ,}$ $\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\text{DRG}}$ 1 $\boxed{=}$ 0.392699075.

因此，$22°30'\approx 0.393\text{rad}$.

温馨提示　1. 可利用$1\text{rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)°$，$1°=\frac{\pi}{180}\text{rad}$进行换算，对于特殊角可利用$\pi\text{rad}=180°$直接换算.

2. 可合理地利用计算器进行近似值换算.

类题演练1

按照下列要求，把2rad换算成角度(用度数表示)

(1) 精确值；

(2) 精确到0.001的近似值.

二、弧度制的运用是难点

例 2　已知 α 角的终边与 $\frac{\pi}{3}$ 的终边相同，在 $[0,2\pi]$ 内哪些角的终边与 $\frac{\alpha}{3}$ 角的终边相同？

解析　$\because$ α 角的终边与 $\frac{\pi}{3}$ 的终边相同，

$\therefore \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{3}(k \in \mathbf{Z})$，

$\therefore \frac{\alpha}{3} = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{9}(k \in \mathbf{Z})$，

又 $0 \leqslant \frac{\alpha}{3} \leqslant 2\pi$，

$\therefore 0 \leqslant \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{9} \leqslant 2\pi(k \in \mathbf{Z})$，

当 $k = 0,1,2$ 时，有 $\frac{\alpha}{3} = \frac{\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}, \frac{13\pi}{9}$，它们均在 $[0,2\pi]$ 内.

$\therefore$ 所求角为 $\frac{\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}, \frac{13\pi}{9}$.

温馨提示　1. 联系上节内容，利用弧度表示角的集合.

2. 首先 α 角的一般形式为 $\alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{3}(k \in \mathbf{Z})$，$\frac{\alpha}{3}$ 角的一般形式为 $\frac{\alpha}{3} = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{9}$，然后讨论 k 的取值是解决此类问题的常用方法.

类题演练 2

将下列各角化成 0 到 2π 的角加上 $2k\pi(k \in \mathbf{Z})$ 的形式.

(1) $\frac{23}{3}\pi$；(2) $-\frac{23}{3}\pi$；(3) $450°$；(4) $-450°$.

三、弧度制下的弧长公式，扇形的面积公式是疑点

例 3　已知扇形的周长为 10cm，面积为 4cm^2，求扇形圆心角的弧度数.

解析　(1) 设扇形圆心角的弧度数为 $\theta(0<\theta<2\pi)$，弧长为 l，半径为 r，依题意有 $\begin{cases} l + 2r = 10 & ① \\ \frac{1}{2}lr = 4 & ② \end{cases}$

① 代入 ② 得 $r^2 - 5r + 4 = 0$，

解之得 $r = 1, r = 4$.

当 $r = 1$ 时，$l = 8\text{cm}$；$\theta = 8\text{rad} > 2\pi\text{rad}$ 舍去.

当 $r = 4$ 时，$l = 2\text{cm}$，$\theta = \frac{2}{4}\text{rad} = \frac{1}{2}\text{rad}$.

温馨提示　关于扇形的公式：

(1) $l = \alpha R$；(2) $S = \frac{1}{2}\alpha R^2$；(3) $S = \frac{1}{2}lR$.

其中 R 是半径，l 是弧长，$\alpha(0 < \alpha < 2\pi)$ 为圆心角，S 是扇形的面积.

类题演练 3

已知一扇形的周长 40cm，当它的半径和圆心角取什么值时，才能使扇形的面积最大？最大面积是多少？

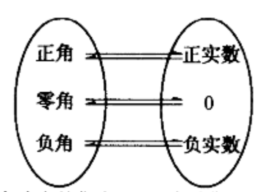
方法导航

1. 在弧度制中，弧长公式 $l=|\alpha|\cdot r$（扇形面积公式 $S=\frac{1}{2}lr$（其形式可看作以弧为底，半径为高的等腰三角形面积公式）.

2. 角度制与弧度制的互化：$360° = 2\pi$（弧度），$180° = \pi$（弧度），$1° = \frac{\pi}{180}$（弧度），1 弧度 $= \left(\frac{180}{\pi}\right)°$.

3. 合理利用计算器进行弧度制与角度制的近似换算和三角函数值的大小比较.

4. 角的概念推广后，在弧度制下，角的集合与实数集 $\mathbf{R}$ 之间建立起一一对应的关系：



任意角的集合　　实数集 **R**

星级训练

一、选择题

★1. 315°角的弧度数为　　(　　)

A. $\frac{3\pi}{4}$　　B. $\frac{7\pi}{4}$　　C. $-\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{5\pi}{4}$

★2. $\tan\frac{\pi}{4}$ 的值为　　(　　)

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 1

★3. 圆的半径变为原来的 2 倍，而弧长也增加到

原来的 2 倍，则 (　　)

A. 扇形的面积不变

B. 扇形的圆心角不变

C. 扇形的面积增大到原来的 2 倍

D. 扇形的圆心角增大到原来的 2 倍

★★4. 下列表示不正确的是 (　　)

A. 终边在 x 轴上角的集合是 $\{\alpha \mid \alpha = k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$

B. 终边在 y 轴上角的集合是 $\{\alpha \mid \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$

C. 终边在坐标轴上角的集合是 $\left\{\alpha \mid \alpha = k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$

D. 终边在直线 $y=x$ 上角的集合是 $\left\{\alpha \mid \alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$

二、填空题

★5. 将下列弧度转化为角度：

① $\frac{5\pi}{4}=$ ________；② $-\frac{7\pi}{8}=$ ________.

★6. 半径为 2 的圆中，$\frac{\pi}{3}$ 弧度圆心角所对的弧长是________，长为 2 的弧所对应的圆心角的弧度数是________.

★7. 将分针拨慢 10 分钟，则分针转过的弧度数是________.

★★★8. 若 α 是第四象限角，则 $\pi-\alpha$ 是第________象限角.

三、解答题

★★9. 利用计算器比较 sin85°与 sin1.5 的大小.

★★10. 已知一扇形的圆心角是 72°，半径等于 20cm，求扇形的面积.

★★★11. 时针指到 3 点后，当分针在 1 小时内走 55 分钟时，时针到分针的夹角是多少度？合多少弧度？

★★★12. 有小于 2π 的正角，这个角的 5 倍角与该角的终边重合，求这个角.

第 2 节　任意角的三角函数

本节内容课时划分：

第一课时　任意角的三角函数(1)

第二课时　任意角的三角函数(2)

第三课时　同角三角函数的基本关系

第一课时　任意角的三角函数(1)

知识扫描

1. 利用单位圆定义任意角的三角函数.

设 α 是一个任意角，它的终边与单位圆交于点 $P(x,y)$，那么：

(1) y 叫做 α 的**正弦**(sine)，记作 $\sin\alpha$，即 $\sin\alpha=y$.

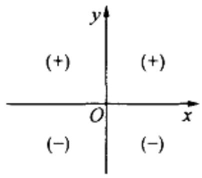
(2) x 叫做 α 的**余弦**(cosine)，记作 $\cos\alpha$，即 $\cos\alpha=x$.

(3) $\frac{y}{x}$ 叫做 α 的**正切**(tangent)，记作 $\tan\alpha$，即 $\tan\alpha=\frac{y}{x}(x\neq0)$.

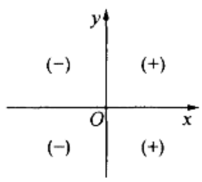
2. 弧度制下正弦、余弦、正切函数的定义域

三角函数	定 义 域
$\sin\alpha$	$\mathbf{R}$
$\cos\alpha$	$\mathbf{R}$
$\tan\alpha$	$\left\{\alpha \mid \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$

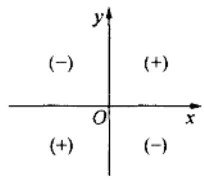
3. 将这三种函数的值在各象限的符号填入图中括号.



sinα



cosα



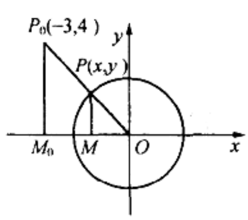
tanα

4. 所有终边相同角的同名三角函数值相等，即 $\sin(\alpha+k\cdot360^\circ)=\sin\alpha$，$\cos(\alpha+k\cdot360^\circ)=\cos\alpha$，$\tan(\alpha+k\cdot360^\circ)=\tan\alpha$，$(k\in\mathbf{Z})$.

三点剖析

一、任意角的正弦、余弦、正切的定义是重点

例 1　已知角 α 的终边经过点 $P_0(-3,4)$，求角 α 的正弦，余弦和正切值.



分析　如图，由 $\triangle OMP\backsim\triangle OM_0P_0$，可求出相应的三角函数值.

解析(一)　由已知可得 $OP_0=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

如图，设角 α 的终边与单位圆交于点 $P(x,y)$. 分别过点 P、P_0 作 x 轴的垂线 MP、M_0P_0，则

$$|M_0P_0|=4,\ |MP|=y,$$
$$|OM_0|=3,\ |OM|=-x,$$
$$\triangle OMP\backsim\triangle OM_0P_0,$$

于是，

$$\sin\alpha=y=\frac{y}{1}=\frac{|MP|}{|OP|}=\frac{|M_0P_0|}{|OP_0|}=\frac{4}{5};$$

$$\cos\alpha=x=\frac{x}{1}=\frac{-|OM|}{|OP|}=-\frac{|OM_0|}{|OP_0|}=-\frac{3}{5};$$

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{4}{3}.$$

解析(二)　设 $x=-3$，$y=4$，则

$r=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5.$

于是 $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}=\dfrac{4}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}=-\dfrac{3}{5}$，$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}=-\dfrac{4}{3}$.

温馨提示　1. 三角函数是以角为自变量，以单位圆上的坐标或坐标的比值为函数值的函数，又因为角的集合与实数集之间可以建立一一对应关系，故三角函数也可以看成实数为自变量的函数.

2. 利用角 α 终边上任意一点 $P(x,y)$ 的坐标也可以定义三角函数. 即 $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$，$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$，$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$.

类题演练 1

利用三角函数的定义求 $\dfrac{5}{4}\pi$ 的三个三角函数值.

二、终边相同的角的同一三角函数的值相等是难点

例 2　求 $\sin(-330^\circ)+\tan\dfrac{13\pi}{6}-\cos\dfrac{13\pi}{3}$ 的值.

解析　$\sin(-330^\circ)+\tan\dfrac{13\pi}{6}-\cos\dfrac{13\pi}{3}$

$$=\sin(30^\circ-360^\circ)+\tan\left(\frac{\pi}{6}+2\pi\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}+4\pi\right)$$

$$=\sin30^\circ+\tan\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

温馨提示　1. 利用公式一，可以把求任意角的三角函数值，转化为求 0 到 2π(或 0° 到 360°)角的三角函数值.

2. 可以直接利用计算器求三角函数的值，用计算器求值时要注意角的度量制问题.

类题演练 2

求 $\dfrac{\sin\dfrac{5\pi}{2}\cdot\tan\left(-\dfrac{5}{3}\pi\right)}{\cos\left(-\dfrac{23\pi}{6}\right)}$ 的值.

三、准确判断三角函数值在各象限内的符号是疑点

例3　求函数 $y=\frac{\sin x}{|\sin x|}+\frac{|\cos x|}{\cos x}+\frac{\tan x}{|\tan x|}$ 的值域.

分析　若角 x 的终边落在坐标轴上,则式子无意义,故只需考虑角 x 的终边在象限内.

解析　1) 若角 x 为第一象限角,则 $\sin x>0$, $\cos x>0$, $\tan x>0$,所以原式 $=1+1+1=3$

2) 若角 x 为第二象限角,则 $\sin x>0$, $\cos x<0$, $\tan x<0$;所以原式 $=1-1-1=-1$

3) 若角 x 为第三象限角,则 $\sin x<0$, $\cos x<0$, $\tan x>0$,所以原式 $=-1-1+1=-1$

4) 若角 x 为第四象限角,则 $\sin x<0$, $\cos x>0$, $\tan x<0$,所以原式 $=-1+1-1=-1$

∴ 函数的值域为$\{3,-1\}$.

温馨提示　要熟练掌握各个不同象限中三角函数值的符号,其符号规律为"一正二正弦,三切四余弦".

类题演练3

$\cos\theta<0$ 是 θ 为第二象限角的　(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分又不必要条件

○方法导航

1. 利用单位圆可以定义任意角的三角函数,利用角 α 终边上任意一点的坐标也可以定义三角函数.

2. 三角函数的值与点 P 在终边上的位置无关,仅与角的大小有关.

3. 各个不同象限中三角函数值的符号,其符号规律为"一正二正弦,三切四余弦".

4. 由三角函数的定义,可以知道:终边相同的角的同一三角函数的值相等.由此得到一组公式(公式一):

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin(\alpha+k\cdot 2\pi)=\sin\alpha,\\&\cos(\alpha+k\cdot 2\pi)=\cos\alpha,\\&\tan(\alpha+k\cdot 2\pi)=\tan\alpha,\\&\text{其中 } k\in\mathbf{Z}.\end{aligned}}$$

利用公式一,可以把任意角的三角函数值,转化为求0到 2π(或0°到360°)角的三角函数值.

○星级训练

一、选择题

★1. 已知 α 的终边过点 $P(4,-3)$,则下面各式中正确的是　(　　)

A. $\sin\alpha=\frac{3}{5}$　　B. $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$

C. $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$　　D. $\cos\alpha=-\frac{3}{4}$

★2. $\sin\left(-\frac{17\pi}{3}\right)$ 的值为　(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

★★3. 已知 $\sin\theta>0$, $\tan\theta<0$,则 θ 为　(　　)

A. 第一象限角　　B. 第二象限角

C. 第三象限角　　D. 第四象限角

★★4. 角 α 的终边经过点 $P(0,b)(b\neq0)$,则 $\sin\alpha$ 等于　(　　)

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. ±1

二、填空题

★5. $\cos1140°=$________.

★6. $5\sin90°+2\cos0°-3\sin270°+10\cos180°=$________.

★★7. 已知角 α 的终边在直线 $y=x$ 上,则 $\sin\alpha+\cos\alpha=$________.

★★★8. 若 $\sqrt{\cos^2x}=\cos x$,则 x 的取值范围是________.

三、解答题

★9. 求下列三角函数值:

(1) $\sin(-1080°)$　(2) $\tan\frac{13\pi}{3}$　(3) $\cos780°$

★★10. 已知角 θ 的终边上一点 P 的坐标是 $(x,-2)$, $(x<0)$,且 $\cos\theta=\frac{x}{3}$.求 $\sin\theta$ 和 $\tan\theta$ 的值.

★★11. 判断下列各式的符号

(1) $\tan 125^\circ \cdot \sin 278^\circ$；(2) $\dfrac{\cos\frac{7\pi}{12}\tan\frac{23\pi}{12}}{\sin\frac{11\pi}{12}}$.

★★★★12. (1) 已知角 α 的终边经过点 $P(4,-3)$，求 $2\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值；

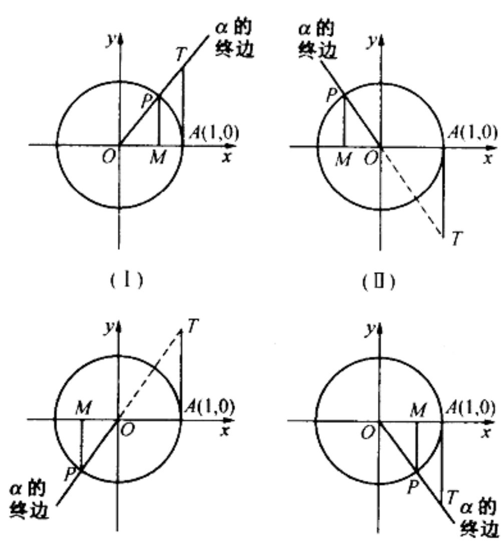
(2) 已知角 α 的终边经过点 $P(4a,-3a)(a\neq 0)$，求 $2\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值；

(3) 已知角 α 终边上一点 P 与 x 轴的距离和与 y 轴的距离之比为 3：4(且均不为零)，求 $2\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值.

第二课时　任意角的三角函数(2)

知识扫描

从图形角度认识三角函数



(Ⅰ)　(Ⅱ)　(Ⅲ)　(Ⅳ)

① 像 OM、OP 这种被看作带有方向的线段，叫做**有向线段**(directed line segment).

② 我们把这三条与单位圆有关的有向线段 MP、OM、AT，分别叫做角 α 的正弦线，余弦线，正切线，统称为**三角函数线**.

当角 α 的终边与 x 轴重合时，正弦线、正切线分别变成一个点，此时角 α 的正弦值和正切值都为 0；当角 α 的终边与 y 轴重合时，余弦线变成一个点，正切线不存在，此时角 α 的正切值不存在.

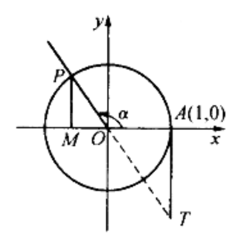
③ 当角 α 的终边不在坐标轴上时，设角 α 的终边与单位圆交于点 $P(x,y)$. 则 $OM=x=\cos\alpha$，$MP=y=\sin\alpha$，$AT=\dfrac{y}{x}=\tan\alpha$.

三点剖析

一、三角函数线的作图是重点

例 1　试作出角 $\alpha=\dfrac{2}{3}\pi$ 的正弦线、余弦线、正切线.

解析　如图所示



有向线段 MP，OM，AT 分别叫做角 $\alpha=\dfrac{2}{3}\pi$ 的正弦线、余弦线、正切线.

温馨提示　理解并掌握三角函数线的概念，同时注意三条有向线段的书写、方向及位置.

类题演练 1

试作出角 $\dfrac{11}{6}\pi$ 的正弦线、余弦线、正切线.

二、正弦、余弦、正切线的利用是难点

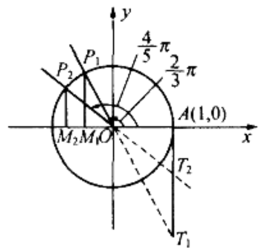
例 2　利用三角函数线比较下列各组数的大小.

(1) $\sin\dfrac{2\pi}{3}$ 与 $\sin\dfrac{4\pi}{5}$　(2) $\tan\dfrac{2}{3}\pi$ 与 $\tan\dfrac{4}{5}\pi$

解析　如图可知

① $\sin\frac{2}{3}\pi>\sin\frac{4}{5}\pi$

② $\tan\frac{2}{3}\pi<\tan\frac{4}{5}\pi$



温馨提示　利用与单位圆有关的有向线段，可以将任意角 α 的正弦、余弦、正切函数值分别用正弦线、余弦线、正切线表示出来.

类题演练 2

比较下列各三角函数值的大小(利用三角函数线)

(1) $\sin15°$ 与 $\tan15°$　(2) $\cos150°18'$ 与 $\cos121°$

三、有向线段的概念是疑点

例 3　已知角 α 的正弦线和余弦线是方向一正一反、长度相等的有向线段，则 α 的终边在________上.

解析　观察三角函数线定义的四种图，

因为 $|MP|=|OM|$，故终边必在象限角平分线上.

又因为方向相反，从图中发现必在二、四象限角平分线上.

温馨提示　有向线段既有方向又有大小.

类题演练 3

角 $\alpha(0<\alpha<2\pi)$ 的正、余弦线的长度相等，且正、余弦符号相异，那么 α 的值为　(　　)

A. $\frac{\pi}{4}$　B. $\frac{3\pi}{4}$　C. $\frac{7}{4}\pi$　D. $\frac{3\pi}{4}$ 或 $\frac{7}{4}\pi$

方法导航

1. 有向线段既有方向，又有大小.

2. 用与单位圆有关的有向线段定义三角函数线，可以将任意角 α 的正弦、余弦、正切函数值分别用正弦线、余弦线、正切线表示出来.

3. 三角函数线的简单应用如比较大小，求满足条件的角的范围等.

星级训练

一、选择题

★1. $\sin2205°=$　(　　)

A. $\frac{1}{2}$　B. $-\frac{1}{2}$　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

★★2. 若 $0<\alpha<2\pi$，且 $\sin\alpha<\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha>\frac{1}{2}$，利用三角函数线，得到 α 的取值范围是　(　　)

A. $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$　B. $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$

C. $\left(\frac{5\pi}{3},2\pi\right)$　D. $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{3}\pi,2\pi\right)$

★★3. 若 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$，则下列不等式中成立的是　(　　)

A. $\sin\theta>\cos\theta>\tan\theta$

B. $\cos\theta>\tan\theta>\sin\theta$

C. $\tan\theta>\sin\theta>\cos\theta$

D. $\sin\theta>\tan\theta>\cos\theta$

★★★4. 依据三角函数线，作出如下四个判断：

① $\sin\frac{\pi}{6}=\sin\frac{7}{6}\pi$　② $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}$

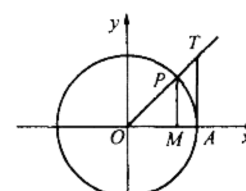
③ $\tan\frac{\pi}{8}>\tan\frac{3\pi}{8}$　④ $\sin\frac{3\pi}{5}>\sin\frac{4}{5}\pi$

其中判断正确的有　(　　)

A. 1 个　B. 2 个　C. 3 个　D. 4 个

二、填空题

★5. 如图所示，$\angle POx$ 的正弦线为________，余弦线为________，正切线为________.



★★6. 利用三角函数线，满足 $\sin x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的角 x 的集合为________.

★★7. 已知角 α 的正弦线是单位长度的有向线段，那么角 α 的终边在________.

★★8. 若 $-\frac{2}{3}\pi\leqslant\theta\leqslant-\frac{\pi}{6}$，利用三角函数线，可得 $\sin\theta$ 的取值范围是________.

三、解答题

★9. 作出下列各角的正弦线、余弦线、正切线.

(1) $-\frac{\pi}{4}$；(2) $\frac{17}{6}\pi$.

★★10. 利用单位圆中的三角函数线，确定下列角 θ 的取值范围.

$-1\leqslant\sin\theta<\frac{1}{2}$

★★★11. 已知点 $P(\sin\alpha-\cos\alpha,2)$ 在第二象限，求角 α 的取值范围.

★★★★12. 用单位圆证明：若 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则有 $\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$.

第三课时　同角三角函数的基本关系

知识扫描

1. 平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\underline{1}$.

2. 若 $\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，则 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\underline{\tan\alpha}$.

3. 在三角函数关系式的变形过程中，同角三角函数基本关系式起到了统一<u>函数</u>的作用，这也是三角函数变形过程的一个重要出发点.

考点剖析

一、运用同角三角函数关系式求值为重点

例1　已知 $\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{60}{169}\left(\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，求 $\tan\theta$ 的值.

解析　由已知及 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 可得

$$\begin{cases}\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{60}{169}\\(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta\\(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta\end{cases}$$

由 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\sin\theta>\cos\theta>0$

$$故\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\frac{17}{13}\\\sin\theta-\cos\theta=\frac{7}{13}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin\theta=\frac{12}{13}\\\cos\theta=\frac{5}{13}\end{cases}\Rightarrow\tan\theta=\frac{12}{5}$$

温馨提示　1. $\sin\theta+\cos\theta,\sin\theta-\cos\theta,\sin\theta\cdot\cos\theta$ 三者知其一可求其二，但已知 $\sin\theta\cos\theta$ 求另二式时需特别注意开方时的符号.

2. 对含有 $\sin\theta\pm\cos\theta$ 和 $\sin\theta\cdot\cos\theta$ 的整式或分式，通常可设 $\sin\theta+\cos\theta=t$，则可转化为关于 t 的有理多项式，但需注意 t 的取值范围.

3. 本题充分利用了同角三角函数的两个基本关系式 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 与 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 来求解.

类题演练1

已知 $3\sin\alpha-2\cos\alpha=0$，求下列各式的值.

(1) $\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$；

(2) $\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha$.

二、已知某角一个三角函数值，求其余各三角函数值时，对于符号的确定是难点

例2　已知：$\sin\alpha=m(|m|\leqslant1)$，求 $\cos\alpha,\tan\alpha$

解析　(1) 若 $m=1$，则 $\cos\alpha=0$，$\tan\alpha$ 不存在.

(2) 若 $m=-1$，则 $\cos\alpha=0$，$\tan\alpha$ 不存在.

(3) 若 $m=0$，

当 $\alpha=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$\cos\alpha=1,\tan\alpha=0$

当 $\alpha=\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$\cos\alpha=-1,\tan\alpha=0$

(4) 若 $0<|m|<1$ 时

当 α 在第一或第四象限时

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-m^2}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$$

当 α 在第二或第三象限时

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-m^2}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$$

温馨提示　1. 利用平方关系式求 $\cos\alpha$，利用商数关系式求 $\tan\alpha$.

2. 当角不确定时，则应分类讨论，分类原则以平方关系的正负为主，防止遗漏终边在坐标轴上的角.

类题演练 2

已知 $\cos\alpha = m(|m| \leqslant 1)$，求 $\sin\alpha$、$\tan\alpha$ 的值.

三、运用同角三角函数关系式求值，化简过程中的某些特殊技巧是疑点

例 3　已知 $\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{2}$，求（1）$\sin\theta\cos\theta$；（2）$\sin^3\theta - \cos^3\theta$；（3）$\sin^4\theta + \cos^4\theta$.

分析　应用因式分解与配方法.

解　（1）因为 $\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{2}$，

所以 $(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2\sin\cos\theta = \frac{1}{4}$，$\sin\theta\cos\theta = \frac{3}{8}$.

（2）$\sin^3\theta - \cos^3\theta = (\sin\theta - \cos\theta)(\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta) = \frac{11}{16}$.

（3）$\sin^4\theta + \cos^4\theta = (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta = 1 - \frac{18}{64} = \frac{23}{32}$.

温馨提示　本题反映了方程思想在三角中的应用，求解过程中要注意乘法公式，因式分解和配方法的应用.

类题演练 3

已知 $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{5}$，且 $0° < \alpha < 180°$，求 $\tan\alpha$ 的值.

方法导航

1. 在已知一个角的三角函数值，求这个角的其他三角函数值时，要注意题设中角的范围，并就不同的象限分别求出相应的值.

2. 注意公式的变形使用，弦切互化，“1”的灵活代换.

3. 学会利用方程思想解三角题，对于 $\sin\alpha + \cos\alpha$，$\sin\alpha\cos\alpha$，$\sin\alpha - \cos\alpha$ 这三个式子，已知其中一个式子的值，其余二式的值可以求出.

4. 证明三角恒等式的常用方法为：① 从一边开始证得它等于另一边，一般由繁到简；② 证明左、右两边都等于同一个式子（或值）.

星级训练

一、选择题

★1. 化简 $\sqrt{1-\sin^2 80°}$ 等于　　（　　）

A. $-\sin 10°$　　B. $-\cos 10°$

C. $\sin 10°$　　D. $\cos 10°$

★2. 若 α 是三角形的内角且 $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{2}{3}$，则这个三角形是　　（　　）

A. 正三角形　　B. 直角三角形

C. 锐角三角形　　D. 钝角三角形

★3. 若 $\sin\alpha = \frac{4}{5}$，且 α 是第二象限角，则 $\tan\alpha$ 的值等于　　（　　）

A. $-\frac{4}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\pm\frac{3}{4}$　　D. $\pm\frac{4}{3}$

★★4. 若 $\beta \in [0, 2\pi)$，且 $\sqrt{1-\cos^2\beta} + \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sin\beta - \cos\beta$，则 β 的取值范围是　　（　　）

A. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$　　B. $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

C. $\left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$　　D. $\left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$

二、填空题

★5. 若 $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{5}$，则 $\sin\alpha \cdot \cos\alpha =$ ________.

★6. 已知 $\tan\alpha = 2$，则 $\frac{2\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha - 9\cos^2\alpha} =$ ________.

★★7. 已知 $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$，则 $\sin\alpha =$ ________，$\tan\alpha =$ ________.

★★8. 若 $\tan\alpha = \cos\alpha$，则 $\sin\alpha =$ ________.

三、解答题

★★9. 已知 $\sin\theta = \frac{1-a}{1+a}$，$\cos\theta = \frac{3a-1}{1+a}$，若 θ 是第二象限角，求实数 a 的值.