全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

高等数学（二）

第一分册 线性代数

第二分册 概率统计

强化应试指导

张启林 尤伯欣 张清利／主编

M F E B

经济管理类公共课

同心

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

高等数学（二） 第一分册 线性代数
第二分册 概率统计

强化应试指导

主 编 张启林 尤伯欣 张清利

同心出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.2,线性代数、概率论/张启林,尤伯欣,张清利主编

—北京:同心出版社,2002

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

ISBN 7-80593-681-1

Ⅰ.高…　Ⅱ.①张…②尤…③张…　Ⅲ.①线性代数—高等教育—自学考试—自学参考资料②概率论—高等教育—自学考试—自学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 079686 号

同心出版社出版、发行

(北京市朝阳区和平里西街 21 号)

邮编:100013　　电话:(010)84276223

天津市蓟县宏图印务有限公司印刷　新华书店经销

2002 年 10 月第 1 版　2002 年 11 月第 1 次印刷

850×1168 毫米　24 开本　印张:22

字数:494 千字

定价:28.00 元

说　明

本书是全国高等教育自学考试指定教材《高等数学(二)》(经济管理类公共课)的配套辅导用书。

本书的宗旨　在短期内,考生通过阅读本书,归纳总结知识要点、考核重点,并通过强化训练提高自己的解题技巧、实战应试能力,从而在最短的时间内取得理想的成绩。

本书的编写依据:

一、全国高等教育自学考试指导委员会颁布的《高等数学(二)第一分册　线性代数自学考试大纲》和《高等数学(二)第二分册　概率统计自学考试大纲》;

二、全国高等教育自学考试指导委员会组编的指定教材《高等数学(二)第一分册　线性代数》(姚慕生　高汝熹主编,武汉大学出版社出版)和《高等数学(二)第二分册　概率统计》(唐国兴主编,武汉大学出版社出版)。

全书按照教材及大纲的要求,以章为序进行编写,每章由"重点考核内容提要"、"典型例题分析"、"模拟训练题"、"模拟训练题答案"四部分组成,每部分内容特点如下:

一、重点考核内容提要　此部分内容是全书的基石。包含本章知识要点的归纳以及相关知识点例题的详尽分析,从而帮助考生深入理解和掌握基本概念、基本原理及大纲考点,使考生对于考核内容融会贯通、拓宽解题思路、提高分析问题的能力起到十分重要的作用,对抓住考试重点和获得解题窍门有积极的指导意义。

二、典型例题分析　此部分内容是全书的精髓。为了帮助考生更好地理解和把握考试要点,每章选编的大量典型例题都真正具有一定的典型性和代表性。每

道题的详细分析能帮助考生迅速找到解决问题的关键，并积极探索每道题目的多种解法，使考生对各个有关概念的相互关系有更深刻的理解；通过各种解法的比较，掌握如何用简捷的方法去解决问题，对提高解题能力十分有帮助，考生应仔细体会并学会这些思维方法。

三、模拟训练题　是为了让考生在短期内迅速掌握考纲要求的知识点而精心设计的。此部分试题其重点分布和难易程度与考纲要求一致，有利于考生自我考核、自我评估以及自我调整复习的重点。我们相信只要考生仔细做完这些试题，并认真消化、体会、总结，就一定能达到举一反三，触类旁通的境界，一定会在全国统一考试中取得满意的成绩。

四、模拟训练题答案　对"模拟训练题"中所有试题提供了完全的解答，不仅给出了答案，而且分析了答题思路。解题过程详细，以攻克难点，突出考点为主，并帮助考生掌握分析和解决问题的技巧和方法。

本书的编者，长期从事高等教育自学考试的教学工作，具有一套行之有效的教学经验，能准确把握考试方向，并多次编写高等数学自学考试专用辅导教材，受到广大考生的赞誉和推崇。我们相信本书的出版发行会对广大考生学习《高等数学(二)》并顺利通过考试起到积极的推动作用。

本书第一分册第一、二、三章由尤伯欣编写，第四、五章由张清利编写；第二分册第一、二、三、五、六章由张启林编写，第四、七、八、九章由张清利编写。全书由张启林策划并统稿。

为了把本书编写得更好，欢迎广大读者对本书存在的不足之处给予批评指正，使本书日臻完善。

编　者

2002年10月

目　录

第一分册　线性代数

第二分册　概率统计

第一分册 线性代数

第一章 行 列 式

考试大纲、考核要求：

1. 理解行列式的递推定义；理解余子式与代数余子式的概念；掌握下(上)三角行列式及对角形行列式的计算公式；掌握行列式的展开式.

2. 掌握行列式的性质及其推论；会运用行列式的性质计算一些简单的行列式.

3. 熟练掌握用行列式的性质及展开式计算行列式的方法.

4. 掌握克莱姆法则，并会用它来解未知数个数不太多的线性方程组.

一、重点考核内容提要

1. 行列式的定义

(1) 记号

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},称其为 n 阶行列式.$$

注意：在具体行列式中，要明确每一个元素所处的位置及其行号与列号. 比如，元素 a_{ij} 是第 i 行第 j 列的元素，行号是 i，列号是 j.

(2) 余子式

设 A 是一个 n 阶行列式，划去 A 的第 i 行及第 j 列，剩余的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的先后顺序组成一个 $n-1$ 阶行列式，这个行列式称为 A 的第 i 行第 j 列元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}.

(3) 代数余子式

称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 n 阶行列式中元素 a_{ij} 的代数余子式.

(4) 行列式的展开式

设 $A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 为 n 阶行列式,A 可以按任一行(列)展开.

即 A = 任一行(列)元素与它们各自代数余子式的乘积之和.

$$A=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\text{(这是按第 } i \text{ 行展开)}.$$

$$A=\begin{vmatrix} \cdots & a_{1j} & \cdots \\ \cdots & a_{2j} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{nj} & \cdots \end{vmatrix}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\text{(这是按第 } j \text{ 列展开)}.$$

(5) 对角行列式与下(上)三角行列式

$$\text{对角行列式}\begin{vmatrix} a_{11} & & & \mathbf{0} \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn};$$

$$\text{下三角行列式}\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

$$\text{上三角行列式}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 1 n 阶行列式 $A=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&a&0&\cdots&0\\0&0&a&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&a\end{vmatrix}=(\quad)$(其中 $a\neq0,a\neq1$).

(A)0　　(B)1　　(C)a^{n-1}　　(D)a^{n}

解 这是个上三角行列式,其值等于主对角线上元素的乘积.

答案是(C).

例 2 设行列式 $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&-1&0&2\\1&1&-1&9\\12&-3&0&7\end{vmatrix}$,则 $A_{34}=(\quad)$.

(A)9　　(B)9×36　　(C)$9\times(-36)$　　(D)-36

解 A_{34} 是行列式中第 3 行第 4 列元素的代数余子式.

$$A_{34}=(-1)^{3+4}\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&0\\12&-3&0\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第 2 行展开}}-(0\times A_{21}+(-1)\times A_{22}+0\times A_{23})$$

$$=A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=\begin{vmatrix}1&3\\12&0\end{vmatrix}=1\times0-12\times3=-36.$$

答案是(D).

例 3 行列式 $A=\begin{vmatrix}0&a&0&0\\0&0&b&0\\0&0&0&c\\d&e&f&g\end{vmatrix}=(\quad)$.

(A)$abcd$　　(B)$-abcd$　　(C)0　　(D)$abcdefg$

解 选择元素对应的余子式是三角行列式的列(或行)展开,可使计算简便,快捷.按第 1 列展开:

$$A=0\times A_{11}+0\times A_{21}+0\times A_{31}+d\times A_{41}=(-1)^{4+1}d\cdot M_{41}$$

$$=-d\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}=-d\cdot a\cdot b\cdot c=-abcd.$$

答案是(B).

2.行列式的性质

性质 1　行列式转置后的值不变,即 $A'=A$.

所谓行列式的转置是将一个行列式的第 1 行变成第 1 列,第 2 行变成第 2 列,…,第 n 行变成第 n 列.得到的新行列式称为原行列式的转置.行列式 A 的转置通常记为 A'.

性质 2　以某个常数 c 乘以行列式的某一行(或某一列),所得到的行列式的值等于原行列式值的 c 倍.

性质 3　行列式的两行(或两列)对换,行列式的值改变符号.

性质 4　如果一个行列式的某两行(或某两列)成比例,则行列式的值等于零.

性质 5　若行列式的某一行(或某一列)元素 $a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}$,则该行列式可分解为两个行列式之和.其中一个行列式的相应行(或列)的元素为 b_{ij},另一个行列式的相应行(或列)的元素为 c_{ij},即 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$(对列也有类似等式成立)

例 1　设 $A=|a_{ij}|$ 为 3 阶行列式,k 为非零常数,则行列式 $|ka_{ij}|=($　　$)$.

(A) kA　　(B) $-kA$　　(C) k^3A　　(D) $3kA$

解　由于 A 是3阶行列式，$|ka_{ij}|$ 表示 A 中每个元素均乘以 k，按行列式的性质，每行均可提出 k 倍，则有

$|ka_{ij}| = k \cdot k \cdot k\,|a_{ij}| = k^3 A$

答案是(C).

例2　行列式 $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 303 & 202 & 101 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (\quad)$.

(A) 0　　(B) 100　　(C) -100　　(D) 101

解　如果不能马上看出第1行元素与第2行元素成比例. 可做：

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 300+3 & 200+2 & 100+1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 300 & 200 & 100 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$= 100\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$(看出第1行元素与第2行元素成比例)；

原式 $= 100 \times 0 + 0 = 0$.

答案是(A).

3.行列式的计算

利用行列式的性质及行列式的展开式求行列式的值. 在求解过程中注意：按零元素最多的行(或列)展开；如果行列式中零元素较少，可先利用行列式的性质将某行(或列)的元素多造出几个零后，再按零元素最多的行(或列)展开. 此法称为造零降阶法.

例1　行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 427 & 1 \\ 5 & 543 & -1 \\ 7 & 721 & 0 \end{vmatrix} = (\quad)$.

(A)0 (B)301 (C) -301 (D)100

解 原式 $=\begin{vmatrix}4 & 400+27 & 1\\5 & 500+43 & -1\\7 & 700+21 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & 400 & 1\\5 & 500 & -1\\7 & 700 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4 & 27 & 1\\5 & 43 & -1\\7 & 21 & 0\end{vmatrix}$ 因为第一个行列式中有第1列与第2列成比例,所以第一个行列式的值为零;

$$\text{原式}=\begin{vmatrix}4 & 27 & 1\\5 & 43 & -1\\7 & 21 & 0\end{vmatrix}=7\begin{vmatrix}4 & 27 & 1\\5 & 43 & -1\\1 & 3 & 0\end{vmatrix}\xlongequal{①+②\times 1}7\begin{vmatrix}9 & 70 & 0\\5 & 43 & -1\\1 & 3 & 0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第3列展开}}7(-1)\times(-1)^{2+3}M_{23}=7\begin{vmatrix}9 & 70\\1 & 3\end{vmatrix}=7\cdot(27-70)=-301.$$

答案是(C).

注意:当用展开式求行列式的值时,要先找含 ±1 元素,将 ±1 所在行(或列)的其它元素变为零,再按此行(或列)展开;如果不含 ±1 元素,一般要先产生 ±1,再用 ±1 所在行(或列)造零,并按此行(或列)展开.

例 2 行列式 $\begin{vmatrix}a & b & b\\b & b & a\\b & a & b\end{vmatrix}=(\quad)$.

(A) $(a+2b)(a-b)^2$ (B) $(a+2b)^3$

(C) $-(a-b)^2(a+2b)$ (D)0

解 行列式中元素都是字母,不好马上就用造零降阶法求.发现本题行列式中元素特点:每列元素之和都等于 $a+2b$.

$$\text{原式}\xlongequal[①+③\times 1]{①+②\times 1}\begin{vmatrix}a+2b & a+2b & a+2b\\b & b & a\\b & a & b\end{vmatrix}$$

$$=(a+2b)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\b & b & a\\b & a & b\end{vmatrix}\xlongequal[③+①\times(-b)]{②+①\times(-b)}(a+2b)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 0 & a-b\\0 & a-b & 0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第1列展开}} (a+2b)\begin{vmatrix} 0 & a-b \\ a-b & 0 \end{vmatrix} = -(a+2b)(a-b)^2.$$

答案是(C).

注意:每行(或列)元素之和都相等的行列式,可以先用性质将行列式中某行(或列)变为元素都相等后,提出本行(或列)的公因子,再用造零降价法做会简便些.

例 3 当 $x=($ $)$ 时,行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & -1 \end{vmatrix}=0$.

(A) ± 1 (B)0 (C) ± 2 (D) ± 3

解 $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{③}+\text{②}\times 1]{\text{①}+\text{②}\times(-1)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & x-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第1列展开}} 1\times(-1)^{2+1}M_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & x-1 \\ x+1 & 0 \end{vmatrix} = (x+1)(x-1)=0.$$

得出 $x=-1, x=1$.

答案是(A).

4. 克莱姆法则

设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (*)$$

称行列式

第一章 行列式