电动力学

高校函授教材

丁明新 等编著

辽宁教育出版社

高校函授教材

电动力学

丁明新等 编著

辽宁教育出版社
1986年·沈阳

电 动 力 学

丁明新等 编著

辽宁教育出版社出版 辽宁省新华书店发行
(沈阳市南京街6段1里2号) 沈阳市第二印刷厂印刷

字数：433,000 开本：850×1168 1/32 印张：$17^5/_8$

印数：1—4,000

1986年11月第1版 1986年11月第1次印刷

责任编辑：王越男 责任校对：王淑芬

封面设计：安今生 插 图：金珊珊

统一书号：7371·286 定价：3.90元

说　明

为满足函授学员和自学者的需要，我们按照教育部1983年制订的中学教师进修高等师范本科《电动力学大纲草案》的要求，在东北师范大学及辽宁、吉林、黑龙江三省教育学院函授讲义的基础上编写本函授教材。

本书注意结合函授学员及自学者的实际，注意结合中学教学和普通物理教学的实际。注重对物理概念、公式等的物理意义的阐述，公式的推导过程比较详细，例题数量较多。全书共七章，每章之前有自学指导，每节之后有习题，每章之后有小结和综合练习题，书末有答案、提示和略解。

书中对较难内容打了 * 号，去掉 * 号之后，余下部分自成体系，以供各种不同需要的读者选用。

本书由丁明新主编，于占生、李祥生、陈文同、赵斌等共同编写，文字统稿工作由于占生同志协助完成。

由于我们水平所限，书中的缺点和错误，是难免的，请读者批评指正。

目 录

绪 论

电荷、电流激发电磁场，电场和磁场又可以相互激发。电磁场是一种客观存在着的物质，它与其他各种物质一样在运动着，它有自身的运动规律，它与其他带电物质之间能够发生相互作用。电动力学就是研究电磁场的基本属性、运动规律以及它与带电物质之间相互作用的一门学科。

电动力学这门学科和其他学科一样，不是在短期内形成的，而是经过了人类智慧的长期积累逐渐丰富，随着生产的发展而发展起来的。十八世纪后期，在工业生产发展的推动下，在较好实验设备的条件下，开始了自然科学的实验探索。1785年，库仑通过精巧的扭秤实验，得到库仑定律，从此电学的研究进入了科学的行列。然而，其重大进展是在认识到电磁现象的内在联系之后开始的。1820年奥斯特在实验中发现了电流的磁效应，同年安培据此提出物质磁性的分子电流假说，接着通过大量的实验分析得出电流元之间相互作用力的规律——安培定律。1831年法拉第在实验中发现了电磁感应现象，并通过精确的实验总结

出电磁感应定律，他还提出了场的思想。至此，电磁现象的基本实验定律已全部建立。电磁现象不是孤立的，而是做为统一整体开始被人们所认识的。正是在这样的条件下，麦克斯韦把实验定律推广到普遍情况，提出“涡旋电场”和位移电流两个假设，建立起描述电磁现象的普遍规律——麦克斯韦方程组，并预言了电磁波的存在。1888年赫兹根据电容器放电的振荡性质设计制造了电磁波源和电磁波检测器，通过实验测到电磁波。从此麦克斯韦的理论逐渐被人们所接受。1896年洛仑兹提出“电子论”，将麦克斯韦的电磁场理论应用到微观领域内，不仅解释了极化、磁化、导电等现象，还成功的说明了光谱线在磁场中分裂的正常塞曼效应，并导出关于运动介质中的光速公式，从而把麦克斯韦的理论向前推进了一步。然而，电磁场理论的成功，却无法回避它与经典力学时空观的矛盾。1905年爱因斯坦排除了牛顿的绝对时空观，建立了狭义相对论。根据狭义相对论，可以通过洛仑兹变换从电场得到磁场，于是在物理学史上出现了两种“不同”自然力（电力和磁力）的第一次统一。至此，电动力学已发展成为经典物理学中相当完善的一个分支。本世纪以来，由于现代生产对物质微观结构认识的迫切要求，人们又进一步深入研究电磁场的微观性质，发展了量子电动力学。现在，新的实践又对电动力学的理论提出了新的要求。激光技术的进展就要求人们对电磁场的微观结构与宏观物质之间的关系有更深刻的理解。可见人们对电磁场的认识是不可穷尽的。

电磁场是物质世界的重要组成部分之一，电磁作用是物质的基本相互作用之一，电的过程是自然界的基本过程，因此电磁场的理论是一门领域非常广泛的学科。从人类生活中的衣、食、住、行到工农业生产中的设备动力；从小到物质的精细结构，大到宇宙间的星际航行，无一不和电磁场的理论有关。

因此，掌握电磁场的基本理论对于生产实践和科学实验都有重大意义。

本书主要讲述宏观电磁场的基本理论，共七章。第一章主要复习矢量分析，并对张量运算作了简要的介绍，第二与第三两章重点讨论稳恒场的基本性质，第四章讲述了稳恒场边值问题的基本解法，第五章是在稳恒场各实验定律的基础上总结出电磁现象的普遍规律，第六章论述了电磁波的传播、辐射的基本规律。最后一章阐明狭义相对论的基本原理。重点讨论了相对论的时空理论，对相对论力学及相对论电动力学作了介绍。

在电动力学中描述物理性质的物理量是一些函数，描述运动规律的物理定律是一些数学方程式，论述和推理的一些方法是数学方法，因此在学习、研究及应用电动力学的过程中，数学是不可避免的。实际上，在理论物理中大量地使用了数学这一有力工具，数学已成为理论物理的不可缺少的组成部分。为了减少自学者的困难，我们在本书的第一章安排了矢量分析和张量运算，请大家先看这部分内容然后再阅读正文。考虑到自学和函授，文中对数学上的推导运算是比较详细的。但是，为了学好电动力学，还需要对数学物理方法的知识作简要复习。

物理量和物理定律深刻地描述了物理现象的性质和规律。因此在学习中应深刻理解它们的物理意义，不要被一些抽象的概念、公式所迷惑。为此，在本书编写的过程中，我们注意了阐明物理量、物理定律所描述的物理事实，注意了对一些抽象概念、公式的讲解。为了减少自学者的困难，我们本着由浅入深、循序渐进的原则安排了知识。

第一章

矢量分析及张量运算

矢量分析及张量运算是学习电动力学必备的数学工具，读者一定要在掌握这些数学知识的基础上再学习电动力学，否则，在学习过程中必将遇到许多困难。

本章主要是复习矢量分析并对张量作初步介绍。学习这部分内容，要求深刻理解梯度、散度和旋度的概念及高斯定理和斯托克斯定理的含义，熟练掌握矢量分析的公式及运算方法。

§1·1 标量场的梯度

在科学、技术问题和生产实践中，往往要考虑某种物理量在空间的分布及变化规律。为了探索和揭示这些规律，数学上引进了场的概念。

物理上的场是指某一物理量在空间的分布，即物理量在某空间中每一点都有一个确定的值，则称此空间为物理场。

数学上的场是所有物理场的抽象。若构成场的物理量用标量函数描述，称该场为标量

场。如温度场，浓度场，势场(电势、重力势)。标量场是指一个标量的空间函数 $\varphi(x,y,z)$。若构成场的物理量用矢量函数描述，称该场为矢量场。如电场、磁场、重力场。矢量场是指一个矢量的空间函数 $\vec{A}(x,y,z)$。

如果场函数仅随空间位置变化，而与时间无关，称该场为稳定场。如果场函数既随空间位置变化，又随时间变化，称该场为非稳定场或时变场。

对场的描述不仅需要知道场量在空间的分布，而且还需要知道场量随空间位置和时间的变化规律。研究场随时间的变化规律，要用到空间各点上的场量对时间的变化率 $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t},\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$。研究场随空间位置的变化规律，要用到空间各点上的场量对空间的变化率。如标量场要用场的梯度，矢量场要用场的散度和旋度。

1. 方向导数

标量场的方向导数表示标量场沿某个规定方向的变化率。如图1—1所示，单位矢量 $\vec{l}_0$ 表示空间规定方向，点 P_0 为这个方向上的任意一点，P为同一方向线上邻近 P_0 的一点，Δl 为 P_0 与P的距离。则标量场 φ 在点 P_0 沿这个方向的导数被定义为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\varphi_P-\varphi_{P_0}}{\Delta l} \tag{1·1·1}$$

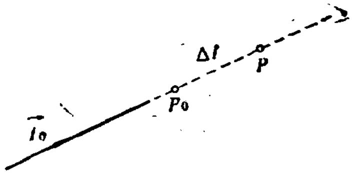

图 1—1

当 $\frac{\partial\varphi}{\partial l}>0$ 时，φ 沿 $\vec{l}_0$ 方向增加；当 $\frac{\partial\varphi}{\partial l}<0$ 时，φ 沿 $\vec{l}_0$ 方向减少。

由于从场中的某一点出发，可以有无限多个方向，因此标量场φ在该点的方向导数也有无限多个。然而在实际问题中，我们最关心的是标量场φ沿哪个方向的变化率最大，这个最大的变化率是多少，它与方向导数间有什么关系？为此，需要引入标量场的梯度。

2. 标量场的梯度

我们知道静电场中每一点都有电势φ(x,y,z)，它是标量场，在此场内我们考虑φ具有相同数值的点。一般地说，这些点构成曲面φ(x,y,z)=c，其中c是常数。满足这个关系式的曲面叫标量场φ(x,y,z)的等值面。不同的常数c，形成不同的等值面。图1—2中，我们画出了一组等值面$\varphi_0-\Delta\varphi$，φ_0，$\varphi_0+\Delta\varphi$。设$\vec{n}$是等值面φ_0上一点P_0处法线方向的单位矢量，并且它指向φ的增加方向．而$\vec{l}$是过P_0点的任意方向线，$\vec{l_0}$（图中未标出）是该方向线的单位矢量．当Δφ很小，即两等势面无限靠近时，$\angle P_LP_nP_0$趋近90°，$\Delta P_LP_nP_0$趋近直角三角形，则

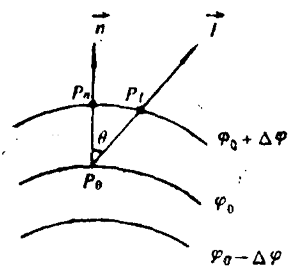

图 1—2

$$\frac{p_0p_n}{p_0p_L}=\cos\theta$$

由于 $$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\lim_{p_0p_L\to0}\frac{\varphi_{PL}-\varphi_0}{p_0p_L}=\lim_{p_0p_L\to0}\frac{\varphi_{PL}-\varphi_0}{p_0p_n}\cdot\frac{p_0p_n}{p_0p_L}$$

$$=\lim_{p_0p_L\to0}\frac{\varphi_{PL}-\varphi_0}{p_0p_n}\cos\theta$$

又因为$\varphi_{PL}=\varphi_{Pn}$

所以 $$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\lim_{p_0p_n\to0}\frac{\varphi_{Pn}-\varphi_0}{p_0p_n}\cos\theta=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\cos\theta$$

即 $$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\cos\theta \qquad (1\cdot1\cdot2,a)$$

则 $$\frac{\partial\varphi}{\partial n}>\frac{\partial\varphi}{\partial l} \qquad (\vec{l}_0 \neq \vec{n}\text{时})$$

可见，φ的方向导数中，沿等值面法线方向的方向导数最大，即标量场φ沿等值面的法线方向有最大变化率。

分析(1·1·2,a)式，只要我们知道了标量场内一点φ沿等值面法线方向的方向导数$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$，就可以求出该点φ沿任意方向的方向导数$\frac{\partial\varphi}{\partial l}$。$\frac{\partial\varphi}{\partial l}$可看作矢量$\frac{\partial\varphi}{\partial n}\vec{n}$在$\vec{l}_0$方向上的投影，

即 $$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\vec{n}\cdot\vec{l}_0=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\cos\theta \qquad (1\cdot1\cdot2,b)$$

我们把数值等于$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$，而方向与$\vec{n}$相同的矢量，称为标量场φ的梯度，用符号gradφ表示(grad 是英文梯度 gradient的缩写)，即

$$\mathrm{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\vec{n} \qquad (1\cdot1\cdot3)$$

在确定了标量场φ在给定点上的梯度$\mathrm{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\vec{n}$以后，就可按$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\mathrm{grad}_l\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\cos\theta$，方便地求出φ在该点沿任一方向的变化率。

以上我们只是针对空间某一点来讲的，对于空间的各点来说，标量场的最大变化率的大小和对应的方向可能各不相同，这反映出gradφ本身是一个矢量场。

注 意

（1）标量场φ的梯度gradφ是个矢量场。

（2）梯度矢量gradφ在空间任意点的值，是标量场φ在该点最大方向导数的数值。

（3）gradφ在空间任意点的方向，是标量场φ在该点具有最大方向导数的方向，并且指向标量场φ增加的方向。

（4）标量场φ沿任意方向的方向导数等于φ的梯度矢量在该方向的投影。

3. 梯度在直角坐标系中的表示式

从梯度的定义式$\mathrm{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\vec{n}$可知，它是由标量场中标量φ(p)的分布所决定的，而与坐标系的选择无关。为了以后的应用，我们找出它在直角坐标系中的表示式。

如前所述，如果知道了标量场中某一点的梯度gradφ，就可求出该点φ沿任意方向的方向导数$\frac{\partial\varphi}{\partial l}$. 即$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=|\mathrm{grad}\varphi|\cos\theta=\mathrm{grad}_l\varphi$.如果把$\vec{l}$方向分别取为直角坐标系x,y,z轴的方向，则得$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\mathrm{grad}_x\varphi$，$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\mathrm{grad}_y\varphi$，$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\mathrm{grad}_z\varphi$.

用$\vec{e}_x$，$\vec{e}_y$，$\vec{e}_z$分别表示三个坐标轴的单位矢量（单位矢量也叫基矢量），则

$$\mathrm{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z \qquad (1\cdot1\cdot4)$$

$$|\mathrm{grad}\varphi|=\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2} \qquad (1\cdot1\cdot5)$$

式（1·1·4）是梯度在直角坐标系中的表示式。

为了简便，引进这样一个矢量微分算符（哈密顿算符）

$$\nabla\equiv\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

使用哈密顿算符，φ的梯度可记为∇φ，即

$$\nabla\varphi=\mathrm{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z \quad (1\cdot1\cdot6)$$

4. 梯度的基本运算公式

算符∇具有矢量和微分的两重性，当它作用在一个标量或矢量函数上时，可以把∇看成矢量，按矢量代数的运算规则进行计算，当它作用在两个函数的乘积上时，就不能简单地把它看成矢量进行运算，而需要考虑它的微分运算规则。我们知道当微分符号d作用于两个函数的乘积上时，得

$$d(\varphi\psi)=\psi d\varphi+\varphi d\psi$$

与此相类似，当算符∇作用于两个量的乘积时，也应当使算符∇分别作用于其中一个量，而把另一个量看成常量，然后求和。例如：

$$\nabla(\varphi\psi)=\nabla\varphi\psi+\psi\nabla\varphi$$

梯度的基本运算公式有：

（1）$\nabla c=0$（c为常数） (1·1·7)

（2）$\nabla(c\varphi)=C\nabla\varphi$（c为常数） (1·1·8)

（3）$\nabla(\varphi\pm\psi)=\nabla\varphi\pm\nabla\psi$ (1·1·9)

（4）$\nabla(\varphi\psi)=\varphi\nabla\psi+\psi\nabla\varphi$ (1·1·10)

（5）$\nabla\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)=\frac{\psi\nabla\varphi-\varphi\nabla\psi}{\psi^2}$ (1·1·11)

（6）$\nabla f(\varphi)=\nabla\varphi\frac{df}{d\varphi}$ (1·1·12)

以上各式易证，现以 $\nabla f(\varphi)=\nabla\varphi\frac{df}{d\varphi}$ 为例证明之。

$$\nabla_x f(\varphi)=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{df}{d\varphi}\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

同理 $$\nabla_y f(\varphi)=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{df}{d\varphi}\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

$$\nabla_z f(\varphi)=\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{df}{d\varphi}\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

于是 $$\nabla f(\varphi)=\vec{e}_x\,\nabla_x f(\varphi)+\vec{e}_y\,\nabla_y f(\varphi)\ +\vec{e}_z\,\nabla_z f(\varphi)$$

$$=\vec{e}_x\left(\frac{df}{d\varphi}\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\vec{e}_y\left(\frac{df}{d\varphi}\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$$

$$+\vec{e}_z\left(\frac{df}{d\varphi}\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

$$=\frac{df}{d\varphi}\left(\vec{e}_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

$$=\nabla\varphi\,\frac{df}{d\varphi}$$

例 1：求矢径$\vec{r}$的数值$|\vec{r}|$的梯度，其中$|\vec{r}|=r=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$。

解 按梯度定义

$$\nabla r=\vec{e}_x\frac{\partial r}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial r}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial r}{\partial z}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\ 2x=\frac{x}{r}$$

同理有：$\dfrac{\partial r}{\partial y}=\dfrac{y}{r}$， $\dfrac{\partial r}{\partial z}=\dfrac{z}{r}$

所以 $$\nabla r=\vec{e}_x\frac{x}{r}+\vec{e}_y\frac{y}{r}+\vec{e}_z\frac{z}{r}=\frac{\vec{r}}{r}$$

可见，在矢径起点固定时，r值仅是矢径端点(x,y,z)的