

大学数学的内容、方法与技巧丛书

概率论与数理统计

内容、方法与技巧

(第二版)

► 孙清华 孙 昊

Gailülun Yu Shulitongji
Neirong Fangfa Yu
Jiqiao

华中科技大学出版社

<http://www.hustp.com>

大学数学的内容、方法与技巧丛书

概率论与数理统计

内容、方法与技巧

(第二版)

孙清华 孙 昊

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 内容、方法与技巧(第二版)/孙清华 孙昊
武汉:华中科技大学出版社,2006年5月
ISBN 7-5609-2851-X

I. 概…

II. ①孙… ②孙…

III. 概率论-高等学校-教学参考资料;
数理统计-高等学校-教学参考资料

IV. O21

概率论与数理统计

内容、方法与技巧(第二版)

孙清华 孙昊

责任编辑:徐正达 李立鹏

封面设计:刘 卉

责任校对:刘 竣

责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:华大图文设计室

印 刷:华中科技大学印刷厂

开本:850×1168 1/32

印张:15.75

字数:380 000

版次:2006年5月第2版

印次:2006年5月第4次印刷

定价:18.80元

ISBN 7-5609-2851-X/O·274

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 简 介

本书是“大学数学的内容、方法与技巧丛书”之一,是大学生学习概率论与数理统计的优秀辅导书和报考研究生的必备参考书,更是有志于掌握概率论与数理统计方法的读者的一本极好的指导书.

本书从教育部关于《概率论与数理统计课程的教学要求》与《硕士研究生入学考试数学考试大纲》出发,并略有提高地按章节对各个问题的内容、方法与技巧进行了归纳提高、释疑解难、分析演绎,以帮助读者理解和掌握概率论与数理统计方法.

本书内容包括随机事件与概率、随机变量及其概率分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析等,还附有实行全国硕士研究生入学统一考试以来的概率论与数理统计试题的解答,提供给考研读者作为参考.

希望本书能成为读者的良师益友,欢迎读者选用本系列丛书.

第二版前言

“概率论与数理统计”是高等学校的一门重要的数学基础课，也是考研数学的重要组成部分，概率统计方法更是科学技术、经济管理、工农业生产和社会人文各个领域卓有成效的处理问题、解决问题的方法。广大读者需要概率论与数理统计，喜爱概率论与数理统计，但也感到概率论与数理统计的概念难懂、方法难以掌握、思维难以展开、问题难以入手和习题难做。本书从读者的角度出发，帮助大家解决学习中的种种困难。

本书按照教育部关于《概率论与数理统计课程的教学要求》和《硕士研究生入学考试数学考试大纲》编写，并在此基础上略有提高。因此，特别适合在校大学生和有志于报考硕士研究生的人士使用。

为了使读者能够循序渐进、扎扎实实地从理论上、方法上和实践上掌握概率论与数理统计的概念与方法，我们采取以章节为序的方法，逐问题地进行讨论、分析、讲解、举例、演绎、归纳。每一节先对概念、内容进行梳理、归纳、提炼，然后对内容、方法中问题进行讨论、释疑解难，再对方法、技巧进行典型例题分析，边演绎、边讨论、边总结，最终达到消化、理解和掌握的目的。为此，作者用解析方法认真地对读者学习中可能产生的对概念的误解、对方法的错失进行了分析探讨、论证求索，选用了较全面、较典型的例题帮助读者理解概率统计的思想方法、步骤和最终的结论。相信本书能给读者以启迪和帮助，使读者能更好掌握概率统计方法。

本书第一版得到读者的厚爱，为答谢读者，这次在保持原有风格的基础上，在内容调整、例题演算、语言表达等方面进行了全面的修订，以使本书更加贴近读者。

为了帮助读者准备硕士研究生入学考试的数学考试,本书对1987年以来全国工学、经济学硕士研究生入学数学考试试卷中的概率统计试题作了全面和详尽的解答,并着意加强了最近的硕士研究生入学试题分析的内容,与考研数学要求一起附在每章的后面.读者可以从中了解考研的要求、考点与动向.

本书在编写、出版过程中,得到华中科技大学出版社的热心支持与帮助,在此表示衷心的感谢.

对于本书中可能出现的错漏和失误之处,热忱欢迎同行和读者给予批评、指正.

孙清华 孙 昊

2006年3月于武汉

目 录

第一章 随机事件与概率	(1)
第一节 样本空间与随机事件	(1)
主要内容	(1)
疑难解析	(3)
方法、技巧与典型例题分析	(5)
第二节 随机事件的概率	(9)
主要内容	(9)
疑难解析	(11)
方法、技巧与典型例题分析	(13)
一、基本的概率问题	(13)
二、古典型概率问题	(15)
三、几何型概率问题	(25)
第三节 条件概率与全概率公式	(28)
主要内容	(28)
疑难解析	(30)
方法、技巧与典型例题分析	(31)
一、条件概率问题	(31)
二、全概率公式与贝叶斯公式问题	(34)
第四节 独立性与伯努利概型	(38)
主要内容	(38)
一、独立性	(38)
二、伯努利概型	(39)
疑难解析	(39)
方法、技巧与典型例题分析	(41)
一、独立性问题	(41)
二、伯努利概型问题	(44)

硕士研究生入学试题分析	(48)
第二章 随机变量及其概率分布	(61)
第一节 随机变量及其分布函数	(61)
主要内容	(61)
疑难解析	(61)
方法、技巧与典型例题分析	(63)
第二节 离散型随机变量及其概率分布	(66)
主要内容	(66)
疑难解析	(68)
方法、技巧与典型例题分析	(69)
第三节 连续型随机变量及其概率分布	(76)
主要内容	(76)
疑难解析	(78)
方法、技巧与典型例题分析	(79)
第四节 随机变量的函数的分布	(93)
主要内容	(93)
疑难解析	(94)
方法、技巧与典型例题分析	(94)
一、离散型随机变量 X 的函数 $g(X)$ 的概率分布的求法	(94)
二、连续型随机变量 X 的函数 $g(X)$ 的概率密度函数的求法	(95)
硕士研究生入学试题分析	(104)
第三章 多维随机变量及其分布	(115)
第一节 二维随机变量及其概率分布	(115)
主要内容	(115)
疑难解析	(117)
方法、技巧与典型例题分析	(118)
一、二维离散型随机变量 (X, Y) 的联合分布的求法	(118)
二、二维离散型随机变量的分布函数的求法	(118)
三、二维连续型随机变量 (X, Y) 的计算	

通常存在的几个问题	(122)
第二节 二维随机变量的边缘分布与条件分布	(130)
主要内容	(130)
一、二维随机变量的边缘分布	(130)
二、二维随机变量 (X, Y) 的条件分布	(131)
疑难解析	(132)
方法、技巧与典型例题分析	(134)
一、已知联合分布求边缘分布问题	(134)
二、连续型随机变量的条件分布的求法	(134)
第三节 独立性及其应用	(143)
主要内容	(143)
疑难解析	(143)
方法、技巧与典型例题分析	(144)
第四节 两个随机变量的函数的分布	(152)
主要内容	(152)
疑难解析	(154)
方法、技巧与典型例题分析	(155)
硕士研究生入学试题分析	(166)
第四章 随机变量的数字特征	(183)
第一节 随机变量的数学期望与方差	(183)
主要内容	(183)
一、数学期望	(183)
二、方差	(184)
三、一些常用分布的数学期望与方差	(185)
疑难解析	(185)
方法、技巧与典型例题分析	(187)
一、分布已知时,求数学期望与方差	(187)
二、分布未知时,求数学期望与方差	(202)
第二节 其它数字特征	(210)
主要内容	(210)

疑难解析	(212)
方法、技巧与典型例题分析	(213)
一、其它数字特征的计算	(214)
二、关于数字特征的证明题	(227)
硕士研究生入学试题分析	(238)
第五章 大数定律与中心极限定理	(264)
第一节 大数定律	(264)
主要内容	(264)
疑难解析	(265)
方法、技巧与典型例题分析	(266)
一、契比雪夫不等式及应用	(266)
二、大数定律及应用	(271)
第二节 中心极限定理	(276)
主要内容	(276)
疑难解析	(278)
方法、技巧与典型例题分析	(278)
硕士研究生入学试题分析	(286)
第六章 数理统计的基本概念	(291)
第一节 随机样本	(291)
主要内容	(291)
疑难解析	(292)
方法、技巧与典型例题分析	(294)
一、总体、样本及其分布、样本的数字特征	(294)
二、样本统计量的概率与样本容量的确定	(300)
第二节 正态总体下的抽样分布	(303)
主要内容	(303)
疑难解析	(306)
方法、技巧与典型例题分析	(308)
硕士研究生入学试题分析	(320)

第七章 参数估计	(324)
第一节 点估计	(324)
主要内容	(324)
疑难解析	(326)
方法、技巧与典型例题分析	(328)
一、矩估计的求法	(328)
二、极大似然估计的求法	(332)
三、估计量的评选	(338)
第二节 区间估计	(348)
主要内容	(348)
一、单个正态总体均值与方差的区间估计	(349)
二、两个正态总体均值差与方差比的区间估计	(350)
疑难解析	(351)
方法、技巧与典型例题分析	(353)
一、单个正态总体均值与方差的区间估计	(353)
二、两个总体均值差与方差比的区间估计	(359)
第三节 关于总体比例的估计	(363)
主要内容	(363)
疑难解析	(364)
方法、技巧与典型例题分析	(364)
硕士研究生入学试题分析	(368)
第八章 假设检验	(379)
第一节 正态总体均值的假设检验	(379)
主要内容	(379)
一、假设检验的基本概念	(379)
二、正态总体均值的假设检验	(380)
疑难解析	(383)
方法、技巧与典型例题分析	(386)
第二节 正态总体方差的假设检验	(399)

主要内容	(399)
疑难解析	(403)
方法、技巧与典型例题分析	(403)
第三节 总体分布的假设检验	(412)
主要内容	(412)
疑难解析	(414)
方法、技巧与典型例题分析	(415)
一、 χ^2 拟合优度检验法	(415)
二、秩和检验法	(425)
硕士研究生入学试题分析	(430)
第九章 方差分析与回归分析	(432)
第一节 方差分析	(432)
主要内容	(432)
一、单因素试验的方差分析	(432)
二、双因素试验的方差分析	(434)
疑难解析	(437)
方法、技巧与典型例题分析	(440)
一、单因素方差分析	(440)
二、双因素方差分析	(452)
第二节 回归分析	(463)
主要内容	(463)
一、一元线性回归	(463)
二、可化为线性回归的一元非线性回归	(466)
三、多元线性回归简介	(468)
疑难解析	(469)
方法、技巧与典型例题分析	(472)
一、一元线性回归问题	(472)
二、可化为线性回归的非线性回归问题	(482)
三、多元线性回归问题	(486)

第一章 随机事件与概率

第一节 样本空间与随机事件

主要内容

1. 随机现象

在一次试验中可能出现不同结果,而在大量重复试验中各个结果呈现统计规律性的现象称为随机现象.

如,在正常条件下,水加热到 100°C 会沸腾,是确定性现象;足球运动员临门施射不一定能射中,是不确定性现象.

2. 随机试验

若把科学实验或观察都称为试验,则满足下列条件的试验称为随机试验:

- (1) 在相同条件下可以重复进行;
- (2) 每次试验的可能结果不止一个,且在试验开始前能明确所有可能的结果;
- (3) 每次试验前不能确定哪个结果会出现.

随机试验一般用大写字母 $E, F, \dots$ 来表示,我们通过随机试验来研究随机现象.

3. 样本空间

随机试验的每一个可能出现的不可分解的结果称为样本点,全体样本点的集合称为样本空间,用 Ω (或 S) 来表示.

4. 随机事件

样本空间 Ω 的子集合称为试验 E 的随机事件,简称事件,以大写字母 $A, B, \dots$ 来表示. 随机事件可以分为:

(1) 基本事件 只含一个样本点的子集合.

(2) 复合事件 含若干个样本点的子集合.

(3) 不可能事件 不含样本点的子集合(空集),所以它在每次试验中都不会发生,记为 $\emptyset$.

(4) 必然事件 样本空间本身,所以它在每次试验中必然发生,记为 Ω .

事实上,(3)与(4)具有确定性,不是随机事件,但仍可把它们当作随机事件来处理.

5. 事件的关系

设 Ω 为试验 E 的样本空间, A, B, C 为 Ω 的子集,则以下关系存在:

(1) 包含 若 A 的每个样本点都属于 B ,则 A 发生导致 B 发生,称事件 B 包含事件 A ,或事件 A 被事件 B 包含,记为 $A \subset B$.

(2) 等价 若 $A \supset B$ 与 $B \supset A$ 同时成立,则称 A 与 B 等价,记为 $A = B$. 在一次试验中,等价的两个事件或同时发生或同时不发生.

(3) 互斥(互不相容) 若事件 A 与事件 B 不能同时发生,称事件 A 与 B 互不相容(互斥),记为 $A \cap B = \emptyset$ (或 $AB = \emptyset$).

6. 事件的运算

由于事件是集合,因此事件的运算与集合的运算是一致的. 常用的运算如下:

(1) 并(和) 至少属于 A 或 B 中一个的所有样本点的集合称为事件 A 与 B 的并(或和),记为 $A+B$ 或 $A \cup B$. 即在一次试验中, $A+B$ 发生表示 A 与 B 至少有一个发生.

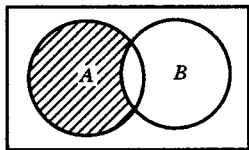
$A_1 + A_2 + \dots + A_n$ 或 $\bigcup_{k=1}^n A_k$ 称为 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的和. $A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots$ 或 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 称为可列个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的和.

(2) 交(积) 同时属于 A 和 B 的所有样本点的集合称为事件 A 与 B 的交(或积), 记为 $A \cap B$ 或 AB . 在一次试验中, AB 发生表示 A 与 B 都发生.

$A_1 A_2 \cdots A_n$ 或 $\bigcap_{k=1}^n A_k$ 称为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积.

$A_1 A_2 \cdots A_n \cdots$ 或 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 称为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的积.

(3) 差 事件 A 发生而事件 B 不发生, 称为 A 与 B 的差, 记为 $A - B$, 有关系式 $A - B = A \bar{B}$.



需要注意的是, 不要求 $A \supset B$ 才有 $A - B$, 如, 图 1.1 阴影部分即为 $A - B$.

图 1.1

(4) 逆(对立) 样本空间 Ω 中所有不包含在 A 中的样本点的集合称为 A 的逆, 记为 $\bar{A}$, 也称为 A 的对立事件. 在一次试验中 $\bar{A}$ 发生表示 A 不发生. 有关系式

$$A + \bar{A} = \Omega, \quad A \cap \bar{A} = \emptyset.$$

7. 事件的运算规律

(1) 交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.

(2) 结合律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C,$
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C.$

(3) 分配律 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$

(4) 对偶原理 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B};$
 $A + A = A, A + \Omega = \Omega; A \Omega = A, A \emptyset = \emptyset.$

疑 难 解 析

1. 怎样确定随机试验的样本空间?

答 对一个随机试验而言, 样本空间并不一定唯一. 在同一试验中, 当试验的目的不同时, 样本空间往往是不同的. 如, 把篮球运

动员投篮作为随机试验时,若试验目的是考察命中率,则试验的样本空间为 $\Omega_1 = \{\text{中}, \text{不中}\}$;若试验目的是考察得分情况,则试验的样本空间为 $\Omega_2 = \{1 \text{ 分}, 2 \text{ 分}, 3 \text{ 分}, 0 \text{ 分}\}$. Ω_1 与 Ω_2 显然不同. 所以,我们应从试验目的出发来确定样本空间.

2. 怎样理解样本空间与必然事件的关系?

答 必然事件与样本空间的关系应当这样来认识:必然事件是指随机试验中一定会出现的事件. 当在一次试验中只有一个样本点出现时,如果把样本空间视作一个整体,就可以说样本空间 Ω 在每次试验中都出现了. 因而样本空间是随机试验的必然事件.

3. 如何认识互逆事件与互斥事件之间的联系与区别?

答 A 与 B 互逆,则 $B = \bar{A}$. 在一次试验中, A 与 B 必有一个发生,且至多只有一个发生.

如果事件 A 与 B 不能同时发生,则 A, B 互斥. 但 A, B 也可以同时不发生. 因此,互逆必定互斥,互斥不一定互逆.

区别互逆与互斥的关键是:互逆只在样本空间只有两个(或两类)事件时存在,互斥还可在样本空间有多个(或多类)事件时存在. 互斥事件的特征是:在一次试验中,两个互斥事件可以同时不发生. 如,在一次考试中,及格与不及格总有一个发生,它们互逆又互斥;但考试成绩为70分或80分是互斥的,却不互逆,因为它们可以同时不发生.

4. 随机事件的运算与数的运算是否相同?

答 不相同. 不能把随机事件的“积”与“和”理解成数的“积”与“和”. 虽然它们性质类似,都满足交换律、结合律和分配律,但不能认为它们就是相同的运算. 事实上,它们是完全不同的运算,反映了不同的两类概念. 如:

对于数 a ,有 $a+a=2a$, $aa=a^2$;而对于事件 A ,有

$$A+A=A, \quad AA=A.$$

对于数 a, b, c ,有 $a+bc \neq (a+b)(a+c)$;而对于事件 A, B, C ,有 $A+BC = (A+B)(A+C)$.

方法、技巧与典型例题分析

本节常见的习题类型是:用简单事件表示复合事件、证明关于事件的等式或不等式、用事件表示应用问题的结果等.

常用的方法是:(1)利用运算性质与规律将复合事件用等价的简单事件表示;(2)利用集合的文氏图分析事件间关系,找出等价事件.

例1 设 A, B 为任意两个事件,则

$$(\bar{A}+B)(A+B)(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B}) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解 因为 A 与 $\bar{A}$ 互逆, B 与 $\bar{B}$ 互逆,所以

$$\begin{aligned}(\bar{A}+B)(A+B) &= \bar{A}A + \bar{A}B + BA + BB \\ &= \emptyset + B + B = B,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B}) &= \bar{A}A + \bar{A}\bar{B} + \bar{B}A + \bar{B}\bar{B} \\ &= \emptyset + \bar{B} + \bar{B} = \bar{B},\end{aligned}$$

于是 $(\bar{A}+B)(A+B)(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B}) = B\bar{B} = \emptyset$.

例2 设 A, B 为任意两个事件,则 $(A+B)(\bar{A}+\bar{B})$ 表示 ().

(A) 必然事件; (B) A 与 B 恰有一个发生;

(C) 不可能事件; (D) A 与 B 不同时发生.

解 选(B). 因为 $\bar{A}+\bar{B} = \Omega - AB$, 所以

$$\begin{aligned}(A+B)(\bar{A}+\bar{B}) &= (A+B)(\Omega - AB) = A\Omega - AB + B\Omega - AB \\ &= A+B-AB,\end{aligned}$$

表明 A 与 B 恰有一个发生.

例3 对任意两事件 A, B , 证明: $A-B = A\bar{B}$.

证 设 $x \in (A-B)$, 则 $x \in A, x \notin B$, 即 $x \in A\bar{B}$, 从而 $A-B \subset A\bar{B}$. 反之, 若 $x \in A\bar{B}$, 则 $x \in A, x \notin B$, 即 $x \in (A-B)$, 从而 $A\bar{B} \subset A-B$. 于是, $A-B = A\bar{B}$ 得证.

例4 指出下列各式成立的条件: