高中数学复习提綱

武汉市教师进修学院編

湖北人民出版社

內容提要

本書根据現行中学数学教材、数学教学大綱和一九五八年高等学校招生考試大綱編写。內容分代数、几何、三角等三个主要部分。代数部分說明数的概念、代数式、方程、級数、对数、排列組合与二項定理的复习綱要。几何部分分平面几何与立体几何两方面：平面几何方面說明直綫形、圓、軌迹与作圖等方面的复习要点；立体几何方面說明直綫与平面、多面体、旋轉体等方面的复习要点。三角部分說明三角函数的定义与性質、三角函数式的变化、各种三角形的解法、反三角函数、三角方程等方面的复习內容。本書可供高中毕业生复习数学参考用。

中国科学技术大学
图书馆

高中数学复习提綱
武汉市教师进修学院編

湖北人民出版社出版（武漢解放大道332号）
武漢市书刊出版业营业許可証新出字第1号
新华书店武汉发行所发行
武汉市国营武汉印刷厂印刷

787×1092耗 $\frac{1}{32}$ 开·$3\frac{3}{16}$ 印張·74,000字

1958年6月第1版
1958年7月第2次印刷
印数：15,001—29,000
統一书号：7106·174
定价：(5)0.22元

編者的話

为了滿足中学数学教师和应屆毕业同学的需要，我院数学教研室分別在本市各校收集了有关編写数学复习提綱的意見，愼重地加以研究，初步編成了这本高中数学复习提綱。

这本提綱是根据中学数学教学大綱、現行教材以及1958年高等学校招生考試大綱編写的。書中內容代数部分比較詳細，对于各单元的性質都作了介紹，习題的选擇較为广泛。对于平面几何，我們已将高初中材料揉合在一起，分为三个单元叙述，这样在复习时，讀者容易融会貫通。立体几何第一章直綫与平面的关系叙述得較为系統，习題也是多方面收集的。三角部分，內容力求簡明扼要，便于复习。

虽然編者在編写时已經尽了最大的努力，但由于水平及时間的限制，对复习方法、对各科各单元的重点、对問題的归类和提法以及綜合題目的选擇等方面，訛誤和缺漏之处是难免的，望教师同志們和同学們多提意見，以便再版时改正。

这本提綱在編写过程中，武汉一中、二中、十六女中及十七女中数学組的同志們，曾提出許多宝貴的意見，在此表示謝意。

武汉教师进修学院　1958年4月29日

目　录

代　数

平面几何

立体几何

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

三 角

代 数

一、数的概念的发展

（一）数的概念的扩張

$$\underbrace{\text{正整数（自然数）}\xrightarrow[\text{（部分量）}]{\text{两数不能整除}}\text{分数}}_{}$$

$$\underbrace{\text{正数}\xrightarrow[\text{（一切有定量的否定）}]{\text{被减数等于减数}}\text{零}\xrightarrow[\text{（相反方向的量）}]{\text{被减数小于减数}}\text{負数}}_{}$$

$$\underbrace{\text{有理数}\xrightarrow[\text{（无公度的两个量）}]{\text{正数的不尽根}}\text{无理数}}_{}$$

$$\underbrace{\text{实数}\xrightarrow[\text{（向量）}]{\text{負数的偶次方根}}\text{虛数}}_{\text{复数}}$$

（二）数的概念及其性質

1.自然数　以1为单位，由一个和若干个单位所組成的数的集合中的每一个数都叫做自然数（即正整数）。

在自然数集合中有最小数“1”，但沒有最大的数；任意两个自然数都能比較它們的大小（即有順序性）；在这个集合中永远可以进行加、乘两种运算。

2.整数(包括正負整数和零)　在整数集合中无最小数，也无最大的数；任意两个整数都能比較它們的大小（即有順序性）；在此集合中永远可以进行加、減、乘三种运算；在数軸上有整数点和这集合中的数建立一一对应关系。

3.有理数　正的整数和分数、負的整数和分数以及零都叫

做有理数。

在有理数集合中无最小数，也无最大的数；有理数集合具有順序性、稠密性及間断性；有理数集不能同数軸上的点建立一一对应关系；在此集合內永远可进行加、减、乘、除四种运算（但除数不得为零）。

4.实数　从度量綫段来看，以长度单位e去量綫段a，则

（i）a与e有公度时，其度量結果为有理数（可用既約分数$\frac{m}{n}$表示的数）：最大公度为e所得的量数是整数，最大公度为e的若干分之一，所得的量数为分数（包括有限小数和无限循环小数）。

（ii）a与e无公度时，其度量結果是无限不循环小数，即无理数。

有理数和无理数总称实数。

在实数集合中沒有最小的数，也沒有最大的数；实数集具有順序性和連續性；实数集合与数軸上的点可建立一一对应关系；在实数集合內永远可进行加、减、乘、除四种运算（但除数不得为零）。

設a为实数，则其絕对值为：

$$|a|=\sqrt{a^2}=\begin{cases} a & (若\ a>0) \\ 0 & (若\ a=0) \\ -a & (若\ a<0) \end{cases}$$

5.复数　在方程$x^2+1=0$及$x^2+2x+3=0$中，在实数集合中沒有根，因而有扩充实数的必要。形如$a+bi$（a，b都是实数，$i=\sqrt{-1}$）的数叫做复数。当$b=0$时$a+bi=a$是实数；当$b\neq0$时$a+bi$是虛数；当$a=0, b\neq0$时，$a+bi$叫純虛数。

复数之間不能比較大小，卽无順序性；复数集合与平面上的点可建立一一对应关系；在复数集合内永远可进行加、減、乘、除（但除数不得为零）、开方五种运算。

复数可用三角函数式表示，如

$$a+bi=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$\theta=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}+n\pi\ （n为整数）$$

复习思考题之一

1. 在实数集合内，下列方程是否永远有解：

$$ax^2+b=o;\quad ax^3+b=o\ （a、b是实数）$$

2. 如 a、b、c、x、y 均为实数，下列那些式子有意义，或在什么条件下才有意义：

$$ax^2+bx+c;\quad \frac{a^2x^2+b}{x-c};\quad \frac{2ax}{x^2+x+1};\quad \frac{x^2y+xy^2}{x-y}.$$

3. 化简下列各式：

$$\sqrt{9+4\sqrt{4+2\sqrt{3}}};\quad \sqrt{\sqrt{32}-\sqrt{30}};\quad \sqrt[4]{3\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{5}};$$

$$\frac{4}{\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}}.$$

4. 在实数集合内，下列各式在什么条件下有意义？

$$1)\frac{1-\sqrt[3]{x}}{2x+1};\quad 2)\frac{\lg x}{x+1};\quad 3)\frac{x+2}{x^2-3x-10};\quad 4)\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{-x}};$$

$$5)\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{1-x}};\quad 6)\frac{\operatorname{tg}x}{x};\quad 7)\sqrt{\sin x};\quad 8)\sqrt{2^x-1}.$$

5. 求适合下列各式的实数 x 和 y：

（1）$(x+2yi)+(y-3xi)-(5-5i)=o$

（2）$(x+2y+i)+(y-3)i=(3x-5y)i+(2x+5+5i)$.

6. 化下列各数为三角函数式：

1； $-i$； $7-7i$； $-5+2i$。

7. 化簡 $\dfrac{(1+i)^5}{1-i}+\dfrac{(1-i)^5}{1+i}$； $\dfrac{9i^{20}+3\sqrt{2}\,i^{33}}{(3-\sqrt{2}\,i^{23})(-i^2+\sqrt{2}\,i)}$。

8. 求 $\sqrt[4]{\sqrt{-1}}=?$

9. 求复数 $a+bi$ 的立方是实数或純虚数的条件。

10. 利用三角函数式解方程 $x^5+1=0$。

11. 証明 $1+2i$，$\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i$，$\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i$，$-2-i$ 四点共园。

12. 用棣美弗定理証明：

$\cos n\theta=\cos^n\theta-c_n^2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+c_n^4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\cdots\cdots$

$\sin n\theta=c_n^1\cos^{n-1}\theta\sin\theta-c_n^3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+C_n^5\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta-\cdots\cdots$

13. 設 z_1、z_2 是不等于 o 的复数，用几何方法証明：

$$|z_1|+|z_2|\geqq|z_1+z_2|\geqq|z_1|-|z_2|.$$

14. 若 $(1+i)^n=(1-i)^n$，求 n。

提示：$\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^n=1$。

15. 求 $(1+i)^{2n}+(1-i)^{2n}$ 的值。（n 为正整数）

提示：首先变：原式 $=[(1+i)^2]^n+[(1-i)^2]^n$。再按 n 是奇数、偶数和 4 的倍数进行討論。

16. 1) 計算 $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1000}$；

2) 求复数 $\dfrac{x^2+y^2+2xyi}{\sqrt{2}\,xy+\sqrt{x^4+y^4}\,i}$ 的模数。

17. 下列諸数哪些是有理数？哪些是无理数？

1) $\sqrt{50.1264}$； 2) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[6]{32}$； 3) $\log_9 tg210^0$；

4) $10^{2\lg\sqrt{\lg 5}}$； 5) $16^{\log_9 tg(-840^\circ)}$；

6) $\left[81^{-0.25}-\left(-3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}\right]^{-\frac{1}{2}}$； 7) $2\sqrt{2}\sin75^0$；

8) $\lg\frac{75}{16}-2\lg\frac{5}{9}+\lg\frac{16}{27}$；

9) $\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{6+4\sqrt{2}}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}\right)$。

18.如$4x^2-4x-15\leqq o$，試化簡

$\sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{4x^2-20x+25}$。（答8）

19.如$|x-2|<3$，解方程

$|x+1|+|x-5|+|x-3|=8$。 （答$x=5$或1）

20.若$x\neq o$，$y\neq o$，且$\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=\sqrt{y}(3\sqrt{x}+10\sqrt{y})$，

求 $\frac{2x+\sqrt{xy}+3y}{x+\sqrt{xy}+3y}$之值。 （答2）

21.若 $f(x)=x^4-2x^3+3x^2+2x+105$，試証 $f\left(\frac{3+\sqrt{11}i}{2}\right)=f\left(\frac{3-\sqrt{11}i}{2}\right)$。

22.用数学归納法証明：

1) n 个复数的和共軛于他們的共軛数的和；

2) n 个复数的积共軛于它們的共軛数的积。

二、代数式

（一）有理整式的四則运算

1.有关的一些概念　代数式、整式、分式、有理式、无理式的意义（見代数課本）。就有理整式（多項式）而言，有单項式、二項式、三項式、多項式、完全多項式等；在多項式的变数不只一个时，若各項次数都相等叫齐次式，否則叫非齐次

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

式。

2.有理整式的四則运算（見代数課本）。

3.乘法公式

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2;$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3;$$

$$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3;$$

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca;$$

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd;$$

$$(\underbrace{a+b+c+\cdots+n}_{\text{共}n\text{項}})^2=\underbrace{a^2+b^2+c^2+\cdots+n^2}_{\text{共}C_n^1\text{項}}$$

$$+\underbrace{2ab+2ac+2bd+\cdots+2mn}_{\text{共}C_n^2\text{項}}$$

$$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$$

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

4.綜合除法　設 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 除以 $x-a$ 所得的商是 $b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+\cdots+b_{n-2}x+b_{n-1}$，余数是 γ，則

$$\begin{aligned}f(x)&=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n\\&=(x-a)(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+\cdots\cdots+b_{n-2}x\\&\quad+b_{n-1})+\gamma\\&=b_0x^n+(b_1-ab_0)x^{n-1}+(b_2-ab_1)x^{n-2}+\cdots\cdots\\&\quad+(b_{n-1}-ab_{n-2})+\gamma-ab_{n-1}\end{aligned}$$

由比較两边的系数，可排成下列形式:

a_0	a_1	$a_2\cdots\cdots$	a_{n-1}	a_n	a
	ab_0	ab_1	ab_{n-2}	ab_{n-1}	
$a_0=b_0$	$a_1+ab_0=b_1$	$a_2+ab_1=b_2$	$a_{n-1}+ab_{n-2}=b_{n-1}$	$a_n+ab_{n-1}=\gamma$	

若以 $ax-b$ 除 $f(x)$ 可經过变形：$ax-b=a(x-\frac{b}{a})$，再如上进行以 $x-\frac{b}{a}$ 除 $f(x)$，所得的商除以 a，卽得原商。

（二）多項式的因式分解、剩余定理及其应用

1.倍式、質式、因式和因式分解的意义（見代数課本）；因式分解在簡化代数式、求代数式的值及解方程中都有很大的作用，应用因式分解在求几个多項式的最高公因式及最低公倍式及其在分式化簡与解分式方程中也有很大的作用。

2.因式分解的方法　普通因式分解的方法有提公因式法、利用乘法公式、集項分解（添置輔助項亦屬之）和利用剩余定理等方法。

3.剩余定理　多項式 $f(x)$ 除以 $x-a$ 所得的余数是 $f(a)$。

設 $f(x)$ 除以 $x-a$ 所得的商是 $Q(x)$，余数是 γ，則

$$f(x)=(x-a)Q(x)+\gamma$$

令　$x=a$，代入上式得

$$\gamma=f(a)$$

剩余定理的推論：

1)要使多項式 $f(x)$ 能够被 $x-a$ 整除，必須并且只須 $f(a)=0$。

2)要使 $x=a$ 是多項式 $f(x)$ 的根，必須并且只須多項式 $f(x)$ 能被 $x-a$ 整除。

3)若多項式 $f(x)$ 有K个不同的根 x_1，x_2，$\cdots\cdots x_k$，那

么它能被$(x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_k)$整除。

4）n 次多项式不能有几个以上的根。

4.剩余定理及綜合除法的应用

1）具有整系数的多项式$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，$a_0\neq 0$ 若有一因式为 $x-b$，而 b 为整数，则 b 必为常数項 a_n 之因数。

2）具有整系数之多項式$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$，若有一个式为 $ax-b$（a,b 为无公因数之两整数），則 a 为 a_0 之因数，而 b 为 a_n 之因数。

（三）分式及其运算

1.分式的意义及其基本性質；

2.約分和通分；

3.分式的运算法則和性質（注意其在簡化分式及解分式方程中的作用）。

（四）根式的运算

1.根式的基本概念与根式的基本性質　正实数的偶次方根在实数范圍內具有双値性，为討論根的方便起見，取算术根，因之要注意根式內文字所代表的数的数値范圍。如 $\sqrt{x-1}$ 內 $x\geqq 1$；又如$\sqrt{(m-n)^2}$ 內，当 $m>n$ 时取 $m-n$，当 $m<n$ 时取 $n-m$。

根式的基本性質：$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$（p 为正整数，$a>0$ 且 $\sqrt[n]{a^m}$ 必須为算术根），在算术根的基础上，$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$；$\sqrt[n]{a^{mn}}=a^m$；$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$。其中 a、b、c 均为非負数，且最后一式中 $b\neq 0$。

2.根式的化簡　在单項式中，若开方不可能，即移因子于根号外，有时为了某种需要而移因式于根号內，将分母有理化

或化簡根指数与根底的乘方指数。

3.明确同类根式与同次根式的区别，并注意前者在加法中的作用后者在乘除法中的作用。

4.根据根式的基本概念、根式的基本性質与根式的簡单变形，掌握无理单項式、无理多項式及有理化分母的运算。

5.二項式 $A\pm\sqrt{B}$ 的平方根公式:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

此处 $A>0$，$B>0$ 且 $A^2>B$.

（五）指数概念的扩張

1.正整指数的意义及其运算法則

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}_{\text{共 n 个}};\quad a^m\cdot a^n=a^{m+n};\quad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}(m>n)$$

$$(-a)^m\begin{cases}a^m, & m\text{ 为偶数};\\ -a^m, & m\text{ 为奇数}。\end{cases}\quad (abc)^m=a^mb^mc^m;(a^m)^n=a^{mn}.$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^m=\frac{b^m}{a^m};\quad (\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m};\quad \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}.$$

2.零指数　由于 $\frac{a^n}{a^n}=a^{n-n}=a^0$，但 $\frac{a^n}{a^n}=1$，故可定义:

$a^0=1$ $(a\neq 0)$.

3.負指数　由于 $\frac{a^m}{a^{m+n}}=a^{m-(m+n)}=a^{-n}$，但 $\frac{a^m}{a^{m+n}}=\frac{a^m}{a^m\cdot a^n}$ $=\frac{1}{a^n}$，故可定义: $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ $(a\neq 0)$.

4.分指数　$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$（若 n 为偶数，則必須 $a>0$）.

〔注〕 通过驗証，确定整指数的运算法則对于零指数、負指数、分指数仍然有效，即有理指数的运算法則可概括为:

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n};\ (a^m)^n=a^{mn};\ (ab)^m=a^mb^m.$$

5. 无理指数　在 a^α 中，a 为不等于 1 之正数而 α 为任一无理数，则以其不足近似值与过剩近似值所构成的两个无限数列，其极限唯一。负无理指数可以正无理指数的倒数来理解。有理指数的运算法则推广到无理指数仍然有效，应予注意。

6. 掌握指数的混合运算是特别重要的。

复习思考题二

1. 什么叫做代数式？下列各式均为代数式嗎？那些不是？

2. $3x+1$；$\frac{2}{x}$；0；ax^2+bx+c；$\sqrt{x}+1$；$\lg x$；$\sin y$；2^x。

2. 因式分解：

1）$a^4+a^2b^2+b^4$；2）$(x+y)^4+x^4+y^4$；3）$a^6-b^6+(a^4+a^2b^2+b^4)$；4）$x^3+y^3+z^3-3xyz$；5）$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$；6）$(b-c)^5+(c-a)^5+(a-b)^5$；7）$x^4-x^3-11x^2-x-12$；8）$x^4-5x^3+2x^2+20x-24$；9）x^3+x+30（系数在复数集合内）；10）$x^2-8xy+15y^2+2x-4y-3$。

3. 化簡下列各式：

1）$\left(\frac{m+\sqrt{m^2-n^2}}{m-\sqrt{m^2-n^2}}-\frac{m-\sqrt{m^2-n^2}}{m+\sqrt{m^2-n^2}}\right)\div\frac{4m\sqrt{m^2-n^2}}{n^2}$

2）$\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x+\dfrac{2x^2}{1-x}}}$；3）$\sqrt[6]{54}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt[3]{2}$

4）$\dfrac{\left(a^{\frac{2}{3}}-4^{\frac{1}{3}}\right)\left(a\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{4a^2}+2\sqrt[3]{2}\right)}{\sqrt[n+1]{\left[\sqrt[n-1]{(a+2)^2}\cdot\sqrt[n+1]{(a+2)^{-1}}\right]^{n^2-1}}}$；

5）$\left(\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right)\left(\frac{-a+b}{\sqrt{4ab}-2b}\right)+$

$$\frac{a+2a+3a+\cdots\cdots+na}{n^2-2n-3}.$$

4.計算下列各式:

1) $\{0.027^{\frac{2}{3}}+15\times 0.0014^{\frac{3}{4}}+[(0.0081)^{-\frac{3}{4}}]^{0}\};$

$:\{[(-4)^{-1.5}]^{-\frac{4}{3}}+16^{0.25}-(\sqrt[\frac{4}{3}]{4})^{-2}\}$

2) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot$

$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.$

5.用綜合除法計算:

1) $(x^4+x^3-x^2+2x-2)\div(x-2);$

2) $(6x^4+11x^3+2x^2+6x+1)\div(3x+1);$

6.有理化分母:

1) $\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}};$

提示: 分子 $=5+\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{2}\sqrt{5}+\sqrt{2}\sqrt{3}=$

$\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2.$

2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}.$

提示: (i)利用: $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=x^2+y^3+z^3-3xyz;$

(ii)再以 $(a+b+c)^2+3\sqrt[3]{abc}\,(a+b+c)+9\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ 乘分母和分子。

7.若 n 为正整数，試証 $(x+3)^n-1$ 能被 $x+2$ 所整除。

8.若 m 为自然数，求証多項式。

$(a+b+c)^{2m+1}-a^{2m+1}-b^{2m}-c^{2m+1}$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com