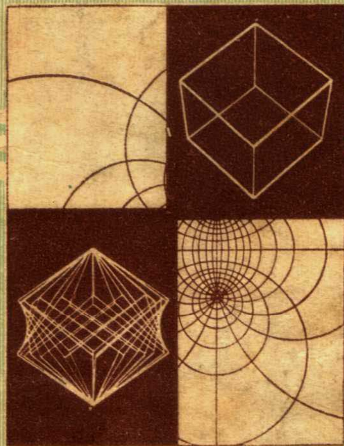
開明青年叢書



數學萬花鏡

裘光明譯

開明青年叢書

數學萬花鏡

史泰因豪斯著
裘光明譯

開明書店

數學萬花鏡

(МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КАЛЕЙДОСКОП)

每册售價人民幣5,700元　　10(芳5364)

著者	波蘭 史泰因豪斯 (Т. Штейнгауз)
譯者	裘光明
原著版本	ТЕХГИЗ, 1949
出版者	開明書店 (北京西總布胡同甲50號)
印刷者	東華印書局
發行者	三聯•中華·商務•開明•聯營 聯合組織 中國圖書發行公司

1952年6月初版(1—4000)　　59 P　32 K

付印題記

這本數學萬花鏡的譯稿交到我店來出版，我們曾經作了很仔細的審讀和整理。 本書取材的生動活潑和引人入勝，在原作者的序言裏和俄文本出版者的話裏都已經說到。 可是，我們還有一些新的體會，要向讀者鄭重說明一下。

我們體會到，這一本書不一定是專供某種程度的人讀的，因爲它提供了許多或淺或深的材料，任何人都可以憑着自己的數學修養接受其中一部分或全部分。 書中每一篇都有美麗的圖畫，即使是程度很低的小學生，也會在欣賞美術的一方面感到興趣。 至於有關數學的方面，初中程度的讀者會理解到與初中數學相當的深度，高中的就理解到相當高中的深度，程度愈高，理解得愈深入。 總之，有哪種程度就理解到那種深度，各自獲得不同的興趣。

所以我們應該抱着這樣的態度來閱讀這本書：我們能够了解多少就了解多少，暫時不必要求徹底了解。 否則的話，非但感不到興趣，反而會找到一些不必要的麻煩的。 只要隨着你的知識程度的增長，每隔一定的時期去重讀，就一定會得到一層深一層的了解。

最後還要說一說，本書原由譯者照俄文本很忠實地翻譯

而成，但是我們覺得有些地方還可以照顧到程度較低的讀者，應該儘可能使他們了解得更多一些，所以在字句或內容上我們特地作了適當的改動或補充。 這樣做，只求幫助讀者認淸問題的輪廓，至於其中精微奧妙的地方，還是要靠讀者自己去思索和玩味的；如果要和盤托出，非但爲事實所不許，而且也是違背作者的原意的。

開明書店生產部

一九五一年十月

譯者的話

這本書是波蘭數學家史泰因豪斯做的。他收集了數學上的一些美麗的花朵——有趣的問題，用圖形爲主，文字爲輔的方法表達出來，來加强讀者對於數學的認識，和提高讀者對於數學的興趣。

原書最初是用英文寫的，現在的譯本所根據的是俄文本。因爲俄文本是最近（1949 年）出版的，對於原書有修正、補充和删改(參看俄文本出版者的話)。 本書譯文是完全依照俄文本的，但是譯時也曾參攷英文本。

在譯完以後，因爲出版的關係，對譯稿作了一次檢查，最後决定删掉了一小部分(原書有 125 篇，現在還有 120 篇)。删掉的是對於中國讀者大多不熟悉的關於西洋象棋的材料，因爲那只有懂得西洋象棋的人看來才有趣味；又爲了印刷上的困難改動了幾個套色的圖形，另外爲了減輕讀者負担，把原書用硬紙印了附在書外的活動卡(bioscope)也省掉了。

承段學復先生把英文本原書借給譯者，使譯者在翻譯上得到很大的幫助，特在這裏表示謝意。

裘光明

一九五一年四月二十六日於淸華園

俄文本出版者的話

著名的波蘭數學家史泰因豪斯氏的通俗小書‘數學萬花鏡’，提供了數學上的一些有趣的問題。通常在數學方面的趣味性小書裏，常常有不相干的材料、無稽的故事等等，它們是與數學毫無關係的。在這本書裏，作者以很高的鑑別力選擇了完全是數學的材料，貢獻給讀者，這些材料是用一種啟發好奇心理的形式出現的。他從廣大的數學領域裏選出容易理解的材料，用生動而且直覺的方法表現出來，只用極少的文字來說明。

這本書的俄文本的出版是直接在作者指導之下進行的。他對於原書作了許多修改和補充，以致有一些敍述是原書所沒有的。另一方面，這裏也去掉了一些並不特別有數學趣味的材料，例如立體的變色圖形(這對於蘇聯讀者是很熟悉的)。原書的索引本來是作者註明書內材料的來源的，現在也去掉了，因爲它們的目錄並不完備，而且對於讀者也沒有多大的用處。

原　序

這本書不是數學裏某個領域的系統課本，也不是數學問題的通俗讀物。 這只是一本有很多圖畫的小書。

這裏所包含的圖畫，絕大多數是從初等數學裏挑選出來的。 有一些圖畫是和高等數學相關的，但是要理解它們却都沒有多大的困難。此外也還有一些圖畫和一般的科學理論沒有緊密的關係。

好像電影上的字幕，好像樂章上的標題，對於書上的插畫和照片只作了一些簡單的說明。 在某些地方附有問題，誰如果有興趣，不妨注意一下，也不妨嘗試着來作回答，這樣的問題並不多，而且絕大部分是不難回答的。 但是也有一些比較困難的，甚至還有在今日還沒有人能作回答的。

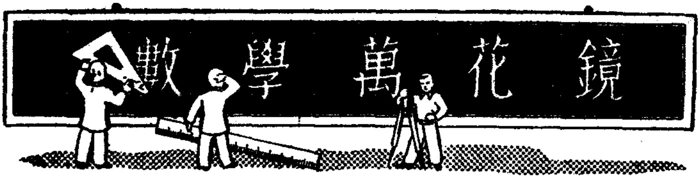
在動物園裏散步，不一定要抱着生物學家那樣的研究目的。同時我以爲，應該先對動物的生活習慣感到興趣，然後才是它們種類的研究和作解剖。 動物園對於所有的人開放，也包括那些只是以觀看動物的生活情形作娛樂的人。所以如果有人說我的圖畫並不是數學也不要緊。誰如果從頭到尾看完了這本書，誰就會注意到，一般地說來，這些圖畫是統一的，而這就是數學。

史泰因豪斯 (H. Steinhaus)

目 · 次

付印題記……………………iii
譯者的話…………………… v
俄文本出版者的話…………vi
原序 ……………………vii
1. 四塊小板………………1
2. 兩個正方形拼成一個…1
3. 一塊地毯分成兩塊……1
4. 用不同的正方形鋪滿平面………………2
5. 用不同的正方形鋪滿長方形……………2
6. 三角形面積的七分之一…………………3
7. 用直線填滿三角形……4
8. 九格板上的棋子遊戲…4
9. 巨大的數目……………5
10. 馬步循環………………7
11. 三十六個軍官…………8
12. 十五個方塊的遊戲……9
13. 整數格子………………10
14. 鋼琴上的等程音階……12
15. 沒有數目的諾謨圖……13
16. 有比例尺的諾謨圖……15
17. 透鏡的諾謨圖…………16
18. 二進位數目的和………17
19. 四個砝碼的天平………17
20. 沒有盡頭的彈子路線…18
21. 什麼時候彈子打進洞裏？…………………18
22. 碰到四邊的路線………19
23. 最短的路線……………20
24. 黃金分割………………21
25. 斐波那契級數…………23
26. 樹木生長的斐波那契級數…………………23
27. 用六角形鋪滿平面……24
28. 代表隊的問題…………24
29. 三個容器倒來倒去……26
30. 正多角形的均勻嵌鑲圖案…………………28
31. 非均勻的嵌鑲圖案……29
32. 星狀的正多角形………29
33. 克來蒙那的反形………29
34. 三個鄉村合設一個小學校…………………33
35. 劃線器…………………35
36. 不用直尺的作圖………36
37. 不用圓規的作圖………37
38. 不可能性的一個證明…38
39. 把圓周變成直線………39
40. 長度計…………………40
41. 蜂巢的形成……………41
42. 兩組圓…………………41
43. 銀角子的謎……………43
44. 滾動圓上的點的軌跡…43
45. 旋輪線…………………43
46. 圓的漸伸線……………45
47. 阿基米德螺線…………46
48. 把旋轉運動變成直線運動…………………47
49. 已知周圍的最大面積…47
50. 計算面積的新方法……47
51. 關於凸出的圖形的明可夫斯基定理………48

52. 一個圖形佔有多少個格子點？……48
53. 關於三個任意圖形的定理……50
54. 有固定寬度的曲線……50
55. 尼可米德蚌線……52
56. 巴斯加蝸線……52
57. 圓錐曲線……53
58. 橢圓……53
59. 拋物線……54
60. 正弦曲線的形成……54
61. 曳物線和僞球面……57
62. 特殊的飄浮物體……58
63. 外切和內接正方形……58
64. 舖滿正方形的曲線……59
65. 四面體……59
66. 立方體……61
67. 樸爾凱定理……62
68. 立方體的六角形截面……62
69. 蜘蛛和蒼蠅的問題……63
70. 鹽的晶體……63
71. 立方體各面塗顏色……65
72. 立方體的旋轉……66
73. 八面體……66
74. 十二面體……67
75. 二十面體……68
76. 互相對應的正多面體……68
77. 非正多面體的晶體……69
78. 有菱形面的多面體……70
79. 星狀多面體……72
80. 用正多面體填滿空間……72
81. 從四個體育會挑選代表隊的問題……73
82. 圓球的堆疊……74
83. 肥皂泡……75
84. 月亮的形狀……77
85. 斜航線和直航線……78
86. 麥卡托地圖……79
87. 平射投影……79
88. 對數螺線……81
89. 心射投影……81
90. 地圖的缺陷……81
91. 單葉雙曲面……81
92. 圓錐上的最短線……82
93. 螺旋線……84
94. 有尖頭的曲線……84
95. 空間曲線的特別性質……85
96. 螺旋桿……85
97. 螺旋面……86
98. 平面、圓柱面和球面的性質……86
99. 空間四角形……87
100. 雙曲拋物面……87
101. 懸鏈面……88
102. 懸鏈線……88
103. 可尼斯堡的橋……89
104. 關於九條路的問題……91
105. 兩種形狀的結……93
106. 套着的繩圈……94
107. 謀比烏斯帶子……95
108. 謀比烏斯帶子切開以後……95
109. 雙側曲面……95
110. 特別的曲面……96
111. 四種顏色問題……97
112. 環面染色問題……97
113. 等溫曲線和絕熱曲線……98
114. 巴斯加三角形…… 100
115. '青蛙曲線' …… 101
116. 細菌生長曲線…… 104
117. 實驗曲線…… 105
118. 棍子的重心…… 105
119. 向不同的方向轉…… 106
120. 用鈕扣作實驗…… 106



1. 四塊小板 從圖 1 這樣的四塊小板，可以拼成一個正方形或者一個正三角形，就看我們是向上面轉還是向下面轉。

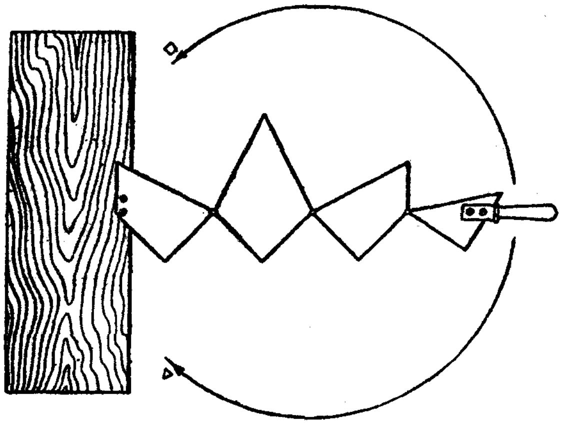


圖 1

2. 兩個正方形拼成一個 從兩個正方形可以拼成一個正方形，只要把比較大的一個照圖 2 用兩條直線分成四個相等的部分。

3. 一塊地毯分成兩塊 有一塊長方的地毯，長 12 尺，闊 9 尺。從這塊地毯割掉一塊 8 尺長、1 尺闊的小地毯；如果

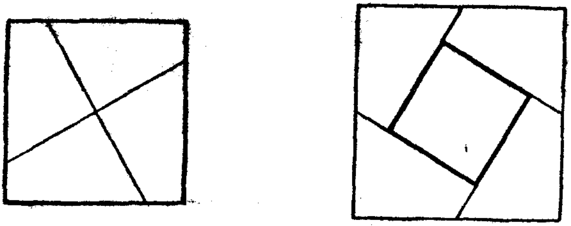


圖 2

把剩下來的部分再分割兩次，就可以重新縫成一塊長方的地毯。（怎麼辦?）

4. 用不同的正方形鋪滿平面 可以用正方的板來鋪滿整個的平面。要做到這樣還可以取大小不同的板。舉例說，像圖 3 這樣五種大小不同的正方形就鋪滿了整個平面。

我們還不知道，是否可以用這樣的正方形來鋪滿平面，所有這些正方形，沒有兩個是同樣大小的，而且沒有過份大的，也沒有過份小的。

5. 用不同的正方形鋪滿長方形 要用大小不同的而且沒有重複的正方形來組成一個長方形，至少需要有九個，這些正方形的邊長是

1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 18.

我們不知道是否可以用更少的不重複的正方形，來組成一個長方形，這些正方形的邊長需要是一些整數。我們也不知道是否可以把正方形分成一些不重複的正方形。

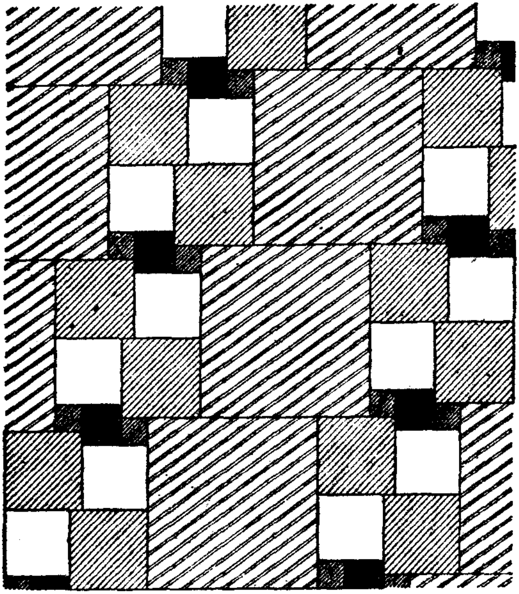


圖 3

6. 三角形面積的七分之一 三條直線 Aa, Bb 和 Cc 把三角形 ABC 分成七部分(圖 4)，如果線段 Ab 等於 AC 邊的三分之一，而且別的邊也是這樣的分成相等的三段，那末夾在

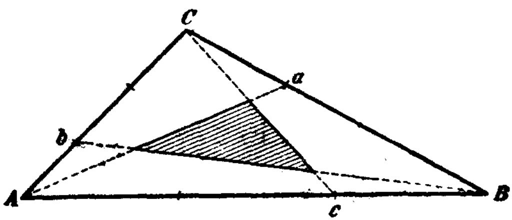


圖 4

中間劃着斜線的小三角形的面積，就等於整個三角形面積的七分之一。(爲什麼?)

7. 用直線塡滿三角形 三角形可以像圖 5 這樣地劃分成線段，使得所有的線段都有同樣的長度，並且通過每個點都有線段而且只有一個線段。換一句話說，可以用某一長度的

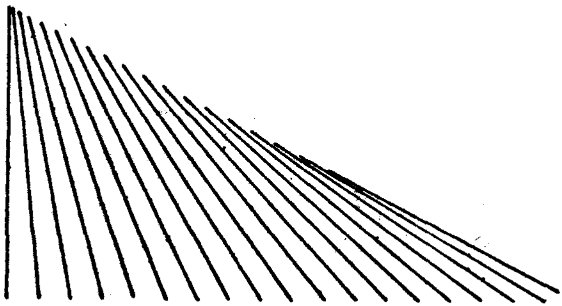


圖 5

線段塡滿一個三角形，並且通過這個三角形裏的每個點只有一個線段。

把圓形分成這樣的線段是不可能的，除非線段的長度是可以變動的。(爲什麼?)

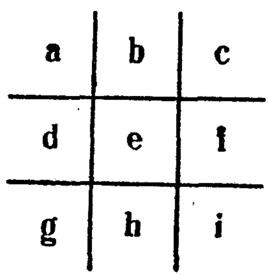


圖 6

8. 九格板上的棋子遊戲 在圖 6 這樣分成九格的方板上，可以玩下面樣子的一種棋子。這種棋是兩個人玩的，一個人有三顆白子，另

一個人有三顆黑子。他們輪流地把自己的棋子一個一個地放到板上，而且當所有的棋子都放完了以後，他們可以把棋子移動到相鄰的方格裏去，但是不可以斜着走。誰先把自己的棋子排成直行、橫行或者斜行，他就贏了。

如果第一個人一開始就佔據中間的方格，而且以後沒有走錯的話，他一定可以贏。因爲如果白的佔領了 e，那末黑的可以走的就只有角上或者邊上的方格。如果他佔領的是 a，那末白的應該佔領 h；這就强迫黑的去佔領 b，而白的自己應該佔領 c，這樣就强迫黑的去佔領 g。現在白的只要走這樣的兩着：從 h 移動到 i 和從 e 移動到 f，這樣一來，他就贏了。又如果黑的在開始時佔領的是邊上的方格 b，那末白的應該佔領 g；然後黑的佔領 c，白的佔領 a，黑的佔領 d。現在白的從 g 移動到 h，再從 h 移動到 i，他就贏了，因爲放在 c 的黑子來不及去阻擋它。

如果玩的人約好，不可以一開始就佔領中間的方塊 e，那末對於玩得精巧的人，結果是雙方都沒有輸贏。

一般地說來，由玩的人輪流着走的遊戲（譬如上面所寫的遊戲，又譬如象棋），在理論上如果有輸贏可言，就一定是對於某一方是不公平的（譬如說先走的人往往佔便宜）。

9. 巨大的數目 西洋象棋的棋盤是一塊方板，分成六十四個小方格，棋子就走在方格的中間。

據說，西洋象棋是古代波斯一個叫做勃拉明 (Brahmin)

的人發明的。他請求波斯的國王把獎賞給他的穀子舖在象棋盤上:在第一格放一顆,第二格放兩顆,第三格放四顆,以後每一格裏放的穀子都是前一格的兩倍(圖7)。要知道,要把這個棋盤放滿,不但波斯的國王沒有這麼多穀子,就是全世界的穀倉裏也沒有那麼多。勃拉明所要的穀子,用等比級數求和法可得

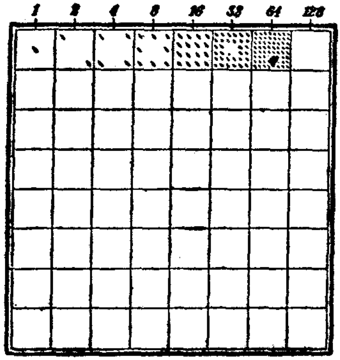


圖 7

$$1+2+2^2+\cdots+2^{63}=2^{64}-1$$

顆。這是一個 20 位的數目。它不是素數,而是合數,因爲它有約數。(什麼約數?)

如果不但在一個 64 格的棋盤上,而且繼續在第二個棋盤上放穀子,穀子的顆數還是繼續地加倍,在第二個棋盤的最後一格裏拿掉一顆穀子,則在這一格裏還留下

$$2^{127}-1=170,141,183,460,469,231,731,687,303,715,884,105,727$$

顆穀子。這個數目沒有約數,是我們現在所確定是素數的數目中最大的一個,除掉 1 和它自己以外,沒有一個比它小的數目能够除盡它。

古代偉大的數學家歐幾里得 (Euclid) 證明,素數的個數

是無限的，但是直到今日，我們還不知道比這個 39 位的數目更大的素數。

用 L 表示這個數目。比 L 大得多的有下面的數目 M：

$$M=2^{257}-1=8L^2+16L+7$$

$$=231,584,178,474,632,390,847,141,970,017,375,845,706,539,969,331,281,128,078,915,168,015,826,259,279,871.$$

這個 78 位的數目 M，已經有人證明過，它不是素數。但是直到今日，還沒有人能找出它的一個約數來。

這種有未知的約數的數目很多，但是在它們中間，M 是到現在爲止大家所知道的最大的一個。

10. 馬步循環 在西洋象棋裏有'武士'，它的走法和中國象棋裏的'馬'差不多。它是在方格裏斜着走的：向橫裏一格直裏兩格或者向直裏一格橫裏兩格。

'馬'在整個棋盤上可以走出所謂馬步循環，它走了 64 步，走遍了棋盤上的每一格後，又回到原先的方格裏，這個問題有許多解答。

圖 8 表示其中很出名的一個，因爲寫在方格裏用來表示馬步順序的數目，組成一個幻方，因爲在每個橫列和每個直行裏的數目的總和都是一樣的。這個總和是 260，別的數目是不可能的。（爲什麼？）