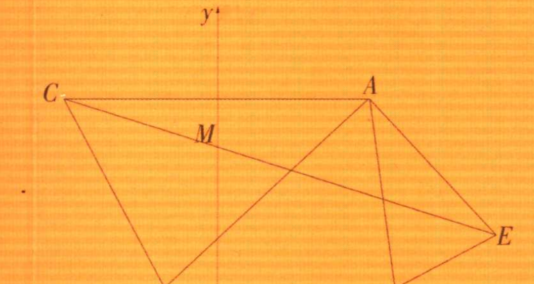
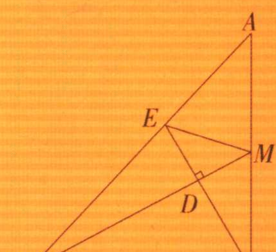
李大勇 编著

中学数学解题论导引

ZHONGXUE SHUXUE JIETILUN DAOYIN





合肥工业大学出版社

中学数学解题论导引

李大勇　编著

合肥工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

中学数学解题论导引/李大勇编著. —合肥:合肥工业大学出版社,2004.6
ISBN 7-81093-100-8

Ⅰ.中…　Ⅱ.李…　Ⅲ.数学课—中学—解题　Ⅳ.G 634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 051054 号

中学数学解题论导引

李大勇　编著　　　　　　　　责任编辑　陆向军

出　　版：	合肥工业大学出版社
地　　址：	合肥市屯溪路193号
电　　话：	总编室:0551-2903038　发行部:0551-2903198
版　　次：	2004年7月第1版　　2004年7月第1次印刷
开　　本：	850×1168　1/32
印　　张：	11.5　　字　数:280千字
印　　数：	1—3 000
发　　行：	全国新华书店
印　　刷：	合肥学苑印务有限公司
邮　　编：	230009
网　　址：	www.hfutpress.com.cn　　E-mail:press@hfutpress.com.cn

ISBN 7-81093-100-8/O·12　　定价:20.00元

如有影响阅读的印装质量问题,请与出版社发行部联系调换

序

中学数学解题是一门学问，已成为众多数学教育家的共识。正因如此，近年来在各类刊物上发表的有关中学数学解题的研究性文章可谓不计其数，其中也不乏真有水平、有特色、有创见的，这是令人欣慰的。但是我们也看到，在众多的有关中学数学解题的研究性文章中，对个别或一类数学问题怎样解决的研究性文章多，而对数学问题解决从总体上进行系统研究的少；从方法论层面上进行探讨的多，而从解题理论层面上进行研究的少；对解题实践活动进行概括、总结的多，而对解题规律进行探索、提炼的少；属于经验型、心得体会式的多，而属于全方位、深层次理性思考的少。正是由于中学数学解题研究中存在着上述诸多问题，因而读罢这些文章，会使人产生“只见树木不见森林”的迷茫。不少文章，甚至大同小异，给人以“似曾相识燕归来”之感。总之，中学数学解题研究方兴未艾，还有许多工作在等待着数学教育工作者去完成，中学数学教育实践正呼唤着数学解题理论的构建与完善，中学数学解题教学亟待数学解题理论的统领与指导。李大勇副教授编著的《中学数学解题论导引》可以说正是顺应了这样一种客观需要。

这本书有这样几个主要特点：

首先，构建了一个比较完整的中学数学解题理论框架。在数

学的学习和研究中，解题是一项非常重要的活动。关于怎样解题，许多学者尽管从不同角度、不同层次进行了大量研究，但迄今为止，真正构建起一个比较完整的中学数学解题理论框架的应该说首推本书。为了确定中学数学解题理论的研究对象，作者在“绪论”中探讨了诸如中学数学解题理论的研究对象和范围、学科性质及研究任务、学习研究中学数学解题理论的目的与意义等问题；出于对构建中学数学解题理论的探索，作者用了整个上篇共五章的篇幅来探讨诸如解题过程、解题模式、解题原则、解题策略及解题方法。应该说，作者对中学数学解题理论的构建是经过了认真思考的，作者在这方面所耗费的心智和工力也是值得称道的。

其次，首眼于解题理论对解题实践活动的指导作用。数学解题理论是把“解题”作为一种由诸多因素构成的相互制约、相互影响的因果系列活动来加以研究的。构建中学数学解题理论的目的不是别的，正是为了用于指导中学数学解题实践。诚如作者所说，数学解题理论一方面要对数学解题实践活动作科学的概括、抽象和总结，另一方面又要注意将数学解题理论用于指导数学解题实践。解题教学需要解题理论的指导，学习解题同样需要解题理论的指导，这就需要我们对数学解题方法进行总结，使之系统化，并教会学习者有效地掌握和应用。正是基于以上认识，作者在本书中用了整个中篇共八章的篇幅来研究典型数学解题方法，其中，“转化”、“逼近”、“构造”、“数学建模”等都是从策略的角度来进行思考的，为数学解题方法的分类提供了一种新思路。

第三，着眼于培养数学学习者的解题能力。数学解题能力是顺利完成数学解题活动所必备的并直接影响解题效率的比较稳定的心理特征。数学解题能力的强弱，有赖于学习者对解题理论的掌握和应用。为了培养和提高学习者的数学解题能力，本书下篇中的“解题错误分析”、“解题教学与解题能力培养”、“中学数学竞赛与解题教学”等章节都是着眼于这一问题来展开讨论的。读完本书，作为数学教育工作者，会更加注重对学生解题能力的培养；作为学生，相信你的数学解题能力会在原有基础上得到提高。

纵观全书，在统一严谨的风格中，包含着不拘一格的多变文采，充满精心构撰的形象描叙，且比较注意学习、借鉴现代认知心理学的研究成果，写得较为生动活泼。总之，《中学数学解题论导引》有其自己的风格与特点，是对构建中学数学解题理论所作的一次大胆探索与尝试，具有一定的理论价值，必将对数学教育产生有益的指导作用。在本书即将付印之际，我十分乐意地向广大数学教育工作者和数学学习者推荐本书。

吕传汉

2004年6月于贵州师范大学

目　录

中篇　典型数学解题方法

下篇　数学解题教学

绪　论

第一节　中学数学解题论研究的对象与范围

一、数学问题及其结构

1. 数学问题

什么是数学问题?1988 年召开的第六届国际数学教育大会的一份报告指出:“一个(数学)问题是一个对人具有智力挑战特征的、没有现成的直接方法、程序或算法的未解决的情境.”

心理学家梅耶(R. E. Mayer)认为:“当问题解决者想让某种情境从一种状态转变为另一种状态,而且问题解决者不知道如何扫除两种状态之间的障碍时,就产生了问题.”他还指出一个问题由三种成分构成:给定状态、目标状态以及阻止给定状态转变为目标状态的障碍.并且,问题的存在与否是相对于问题解决者而言的,因此,问题具有目标性、障碍性和相对性.

波利亚则把问题与困难紧密联系起来,他认为:“一个问题,如果很困难,就是个大问题;如果它只有一点困难,就是一个小问题.”“没有困难,也就没有问题了.”在他看来,解决问题就是克服困难.

我们认为,问题反映了现有水平与客观需要的矛盾,问题就是矛盾.对于学生而言,问题应具有以下三个特征:

(1) 接受性:学生愿意解决并且具有解决它的知识基础和能力基础.

(2) 障碍性:学生不能直接看出它的解法和答案,而必须经过思考才能解决.

(3) 探究性:学生不能按照现成的公式或常规的套路去解,需要进行探索和研究,寻找新的处理方法.

2. 数学问题的结构

对于数学问题,我们首先要考察的是它是由什么组成的和怎样组成的,即考察数学问题的结构形式.数学问题的结构形式,是数学问题分类的一个重要标准.结构形式上的相同,往往预示着可以用类似的思维方法去思考,用类似的手法去处理,用类似的方法和技巧去解决.一个学生拿到一个题,他会在心里问自己:"这是一道什么类型的题?"事实上,问题的提出者已积累了一定的解题经验,他通过这种提问品尝过甜头.如果他能把手里的问题归类、识别其类型,他就取得了一些进展,他就有可能回忆起解这一类问题的方法.

那么,数学问题的结构是怎样的呢?任何一个数学问题的陈述都是由某些题设条件(也简称为条件)和问题的要求(也称为结论、论断或问题的目标)组成.在一般情况下,数学问题中的条件不止一个而可以有若干个,问题的要求也可以有若干个.

数学问题的题设条件是解题的基础和出发点.问题的要求是指明解题人要达到什么样的目标.数学问题的题设条件和问题的要求都具有一定的内容和形式,即具有某种在知识结构、语言结构和逻辑上的特定的形式,因而解法一般也不相同.因此,这种特定的内容和形式就成为数学问题分类的标准之一.

二、数学问题的分类

将数学问题分类,目的在于使同一类型的数学问题可以采用类似的思维方法进行解题.到目前为止,对数学问题并没有一个统一的分类方法,人们总是根据自己的不同需要,对数学问题进行不

同的分类.在此,我们只对数学题的常见分类作一些客观的介绍.

人们首先根据数学问题的形式、内容、解法的不同,把数学问题分为许多不同的类型.如选择题、填空题、是非题、问答题、计算题、作图题、证明题等等.人们传统上又习惯按问题的要求的不同,把这些类型的题归结为两大类:求解题和求证题.

第一类:求解题.在这类数学问题中,问题的要求是求出(寻找、作出、鉴别、列出、描述)满足题设条件的某个未知量,这个未知量可能是数、关系式、函数、图形等等.

第二类:求证题.在这类数学问题中,问题的要求是证明某个清晰陈述的论断的正确性,或者判定它是成立或不成立,或者说明某一种现象、某一个事实为什么成立等等.凡是问题要求包含有"证明"、"判定"、"为什么"等这些词的问题,通常都属于求证题.

人们还从数学问题的结论是否已为数学家所已知,把数学问题分为练习型题和研究型题两类.练习型的题具有教学性,它的结论为数学家或教师所已知,其之所以成为问题仅相对于教学或学生而言,包括一个待计算的答案、一个待证明的结论、一个待作出的图形、一个待判断的命题、一个待解决的实际问题等.

研究型的题具有学术性,它的结论对于数学家都是未知的,其中有数学自身理论发展的认知题,又有应用数学理论解决实际问题的应用题.

在教学中基本上都是练习型的题,而在科研中则不承认已经解决的课题仍为问题.本书的讨论出于教学的目的,仅限于考虑练习型的题目,且主要限于初等数学的范围.

数学题还可按学科、教学、评分的客观性、认识的范畴等分类如下:

按学科分类:

人们习惯上常把学科作为分类标准,将数学题分为代数题、三角题、平面几何题、平面解析几何题、立体几何题等,同时人们根据

需要有时还对以上每一类作进一步分类，比如人们常把代数题进一步分为方程题、不等式题、函数题、数列题等等，而方程又可分为代数方程与超越方程等.

按教学分类：

1. 按教学活动的形式人们常把数学题分为：口答题、板演题、讨论题，课堂练习题、家庭作业题，复习题、测验题、考试题，改错题、计算题、证明题、作图题等.

2. 按综合程度人们又常把数学题分为单一性题目与综合性题目，而综合题又有纵向综合题与横向综合题之分.

3. 按得分率分类：

人们出于对教学活动进行分析、总结、评价的需要，又常按通过率将数学题分为容易题、中档题、难题. 通过率在 70% 以上的题通常被视为容易题；通过率在 40% ～ 70% 之间的题通常被视为中档题；通过率在 40% 以下的题通常被视为难题.

按评分的客观性分类：

1. 客观性题：如是非题、选择题、部分填空题，无论谁阅卷得分都一样，评分客观，可使用机器阅卷.

2. 主观性题：需要详细写出解题过程的求解题或求证题. 不同的人阅卷有可能产生得分上的差异.

按认识的范畴分类：

1. 纯数学题：题目只涉及数学概念、符号、定理、法则、公式，不直接与生产、生活发生联系.

2. 应用题：把数学知识用于解决生产、生活中的实际问题. 在全社会重视素质教育的今天，这类题目的训练不可忽视.

三、数学问题在数学中的地位

问题是数学的生长点. 数学史告诉我们，数学源于问题，没有问题就没有数学. 问题是数学的心脏. 不仅对于数学科学，而且对

于数学教学来说，问题也是它的心脏.美国数学家哈尔莫斯认为："数学研究主要的就是发现问题和解决问题."波利亚则强调指出："中学数学教学首要的任务就是加强解题训练."他有一句名言："掌握数学就是意味着善于解题."我国著名的数学家华罗庚也说过："如果不做书中所附的习题，那就好比入宝山而空还."

力求提高解题教学在数学教学中的作用已经是现代数学教学理论的一个特点.现代兴起的"问题教学法"、"研究法"、"发现法"、"试错法"等教学法，都明显地突出了解题教学在数学教学中的地位.

我国现行《中学数学教学大纲》明确规定："练习是数学教学的有机组成部分，对于学生掌握基础知识和基本技能、培养能力是必不可少的.在教学中，要充分发挥练习的作用，加强对解题的指导，并及时进行检查."

四、解数学题的实质与过程

解数学题的实质与过程是什么呢?解题就是"解决问题"，即求出问题的答案，这个答案在数学上也叫做"解"，所以，解题也就是求出题的解.

为了探讨解题的一般规律和方法，只从字面上来理解"解题"这个术语是不够的，我们还有必要搞清楚解题的实质和过程.

为此我们来考察两个不太复杂的问题的解法.

首先，看一个代数题的解法过程：

例 0-1　分解因式$x^3-54+6x^2-9x$.

解　(1) $x^3-54+6x^2-9x=x^3-9x+6x^2-54$(交换律)

(2) $x^3-9x+6x^2-54=(x^3-9x)+(6x^2-54)$(结合律)

(3) $(x^3-9x)+(6x^2-54)=x(x^2-9)+6(x^2-9)$(提公因子到括号外)

(4) $x(x^2-9)+6(x^2-9)=(x^2-9)(x+6)$(提公因

式到括号外）

(5) $(x^2-9)(x+6)=(x+3)(x-3)(x+6)$（平方差的因式分解法则）

即 $x^3-54+6x^2-9x=(x+3)(x-3)(x+6)$.

如果读者注意分析上面的解法，就会发现：解答是由一个一个的推演步骤序列所组成，其中的每一个步骤都是把数学的一般原理（包括定义、公理、定理、法则、定律和公式等）运用于问题的条件（或者运用于这些条件的推论）的推理，至于整个解答则是把条件与结论串接起来的各个步骤所组成的序列. 而解题的实质就是给出这个序列.

上面的观点同样也适用于求证题.

例 0-2 如图 0-1 所示，已知 $AB=AC$，F、E 分别是 AB、AC 的中点，求证：$\Delta ABE\cong\Delta ACF$.

证明

(1) F、E 分别为 AB、AC 的中点（已知）

所以 $AE=\frac{1}{2}AC$，

$AF=\frac{1}{2}AB$（中点定义）

(2) $AB=AC$（已知）

所以 $AE=AF$（等量代换）

(3) $AB=AC$（已知）

$AE=AF$（已证）

$\angle A=\angle A$（公共角）

所以 $\Delta ABE\cong\Delta ACF$（边角边定理）.

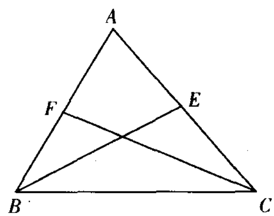


图 0-1

当然，我们实际上碰到的问题可能要比上面举出的两个例子复杂得多，但我们只要深入分析，就会发现解决它们的实质都是相同的，即给出一个把问题的条件和结论串接起来的严谨的推演步

骤序列，而每一个步骤都是把数学的一般原理运用于条件或条件的推论(中间结果)的推理.

在上面的两个例子中，当我们写出问题的解法时，只能算是写出了问题的解答. 但是，如何找出这些解法，以及证实它们是正确的，这才是更为重要的，这也是本书要研究的主要问题.

五、中学数学解题论研究的对象和范围

在数学的学习和研究中，解题是一项非常重要的活动. 无论是数学家还是中学生，天天都在解数学题. 可是迄今为止，虽然有许多数学教育工作者从不同角度、不同方面、不同层次对“怎样解题”进行了大量的研究，并有大量著述问世，但构建中学数学解题论的工作应该说刚刚起步.

我们要构建中学数学解题论，首要的任务就是要明确中学数学解题论得以独立存在的特定的研究领域或研究对象. 那么，中学数学解题论的研究对象是什么呢?本书认为，中学数学解题论的研究对象是“怎样解中学数学题”和“怎样教会中学生解数学题”. 为了研究“怎样解数学题”和“怎样教会中学生解数学题”，中学数学解题论就必须研究关于数学解题过程、数学解题模式、数学解题原则、数学解题方法和数学解题策略的理论，同时也有必要研究典型的数学解题方法和数学解题教学. 正是基于这样的认识，作者把本书分为上、中、下三篇，上篇阐述数学解题的一般理论，中篇介绍典型的数学解题方法，下篇探讨数学解题教学.

第二节　中学数学解题论的学科性质及其研究任务

一、中学数学解题论的学科性质

我们认为，中学数学解题论一方面是对中学数学解题实践活