数学逻辑学概论

郑君文 张恩华 著

数学逻辑学概论
数学逻辑学概论
数学逻辑学概论
数学逻辑学概论

安徽教育出版社

数学逻辑学概论

郑君文　张恩华　著

安徽教育出版社

数学逻辑学概论

郑君文　张恩华　著
安徽教育出版社出版发行
（合肥市金寨路 381 号）
新华书店经销　合肥南方激光照排部照排
合肥永青印刷厂印刷
*
开本 850×1168　1/32　印张 13.375　字数 280000
1995 年 7 月第 1 版　　1995 年 7 月第 1 次印刷
印数:2,000
ISBN7—5336—1692—8/G·2228

定价:11.50 元

前　言

在学习、研究数学和从事数学教育的过程中，不论是形成概念或定义概念，分析命题或提出命题，进行推理或实施论证，以及分析或培养学生的逻辑思维能力等等，都需要运用逻辑及其方法这一工具来解决所遇到的问题和探索其特点与规律。因此，就有必要对此进行研究，建立起相应的理论，为研究数学和数学教育提供依据。数学逻辑学就是适应这方面的需要而产生的一门应用性、边缘性学科。它不仅需要引进必要的逻辑知识，而且还需借此来分析数学和数学教育，解决数学教育中所提出的逻辑问题。我们在担任数学系本科生数理逻辑选修课和学科教学论（数学）专业研究生的数理逻辑课程的教学中，深感有必要建立这门学科，遂结合教学进行研究。现已将材料加以整理和充实，成此《数学逻辑学概论》一书，作为本学科研究的初始作，奉献给已经是或将要是数学教师的广大读者。

数理逻辑是用数学方法研究推理特别是数学中的推理和逻辑问题的一门科学，近百年来它得以成熟和迅速发展，已成为数学的一个分支。在它成熟和发展过程中还产生了把数学看成一个整体的各种思潮和数学基础的诸流派。同时，它把逻辑的发展推向一个新阶段，并产生了巨大的影响。例如，促进传统的形式逻辑教材的改革，似有较多地利用数理逻辑来阐明内容的趋向，显示出它的优越性。因此，我们主要引进数理逻辑知识及其在数学和数学教育中的运用来建立本学科。其中，着重分析了数学教育中常见的逻辑问题，并提出相应的处理意见。这样做，就避免了传统形式逻辑带来的“先天”不足，难以展开全面深入分析的问题。集合论现已深入到数学各个分支，但通常的集合论（素朴

集合论)存在着悖论，于是后来产生了公理集合论(数理逻辑的一部分)。作为当今的数学教师，也应对此有所了解。另外，波利亚(G·pblya，1887～1985)在《数学与猜想》一书中写道："一个对数学有抱负的学生，不管他将来的兴趣如何，他应该力求学习两种推理：论证推理和合情推理。"所以我们在本书中还引入归纳推理(包括类比推理)或更一般的合情推理(虽然数理逻辑中没有该内容)，以利运用于数学教育和建立本学科。由上可知，除绪论外，本书的内容包括命题逻辑、谓词逻辑、归纳逻辑和概念，以及数学系统、公理集合论和数学基础诸流派等。

命题逻辑和谓词逻辑是数理逻辑的基础部分，我们分非形式(采取直观方法叙述)和形式(采用形式的公理方法给出)两个层次介绍。对于初次接触这方面知识的读者来说，对形式系统部分(即第四、八、九和十等章)可以暂不阅读，以便在较短时间内掌握逻辑的基本知识及其在数学和数学教育中的应用。

本书共十二章，其中第一至八章由郑君文撰写，第九至十二章由张恩华撰写。在写作过程中，我们参阅了许多书籍和文章，它们对本书的完成起了很大的作用。在此，谨向有关作者致谢。

本书的撰写和出版，得到南京师范大学数学系领导的关心与支持，以及刘云章教授的鼓励与帮助；得到安徽教育出版社的大力支持。我们在此一并表示由衷谢意。

随着数学和逻辑学的发展以及数学教育改革的深入，数学逻辑学的研究将越来越引起人们的关注。本书仅反映我们的一些观点和初步研究的成果。由于水平所限，书中难免会有错误或不当之处，敬请专家学者及广大读者批评指正。

作　　者

1994年6月于南京师范大学

目　录

第一章　绪　　论

人们在进行数学研究和数学教学时，总会自觉或不自觉地运用逻辑或施行逻辑分析；学生在学习数学时，也会或明或暗地受到逻辑的训练，发展着自身的逻辑思维。由此可见，数学、数学教育与逻辑之间存在着密切的关系，揭露这种关系，对如何建立一门适合于数学，特别是数学教育需要的逻辑学（即数学逻辑学），具有十分重要的作用。本章就从分析数学与逻辑、数学教育与逻辑之间的关系入手，提出构建数学逻辑学的设想，并给出其内容的一个框图，最后简单介绍数学中的符号体系。

§1　数学与逻辑

数学与逻辑之间的关系，不仅由于它们内容都非常丰富，涉及的面很广，难于全面介绍，而且还受着人们观点和认识不同的影响，出现种种回然不同的看法和结论，更显得十分复杂。因此，我们只能先从数学与逻辑的发展过程中，择其主要的加以介绍，以了解它们之间关系的概貌，然后再从各自研究对象、性质和特点的分析中，进一步对它们之间的关系作些探讨。

一、数学与逻辑的发展概况

数学是从人的生产和生活需要中产生的，它开始仅仅从人类长期的实践活动中获得许多数学事实（即算术、代数和几何的初步知识），以解决人们所遇到的实际问题，但就这些知识而言，

都是零碎、片断和互不联系的，没有形成 一个体系，也没有体现出方法论上自身的特点。这正如美国数学史家M·克莱因所说的："算术和代数步骤以及几何法则，都是根据物理事实、边试边改以及从直观认识得出的结果。……关于证明的想法，依据于决定取舍原则的逻辑结构的思想，……数学里都是找不到的"。①

命题的证明，据传说是由古希腊哲学家泰利斯(Thales，约公元前640～546年)首先开创的，他曾证明了下列一些命题：圆被任一直径所平分；等腰三角形底角相等；两直线相交，对顶角相等；相似三角形对应边成比例；对半圆的圆周角是直角；两三角形两角与一边对应相等，则这两三角形全等。但泰利斯证明上述命题的具体方法早已失传，究竟如何进行证明不得而知，传说中他的证明是借助于实验的方法。泰利斯作为命题证明的开创者，限于当时的条件，所施行的证明只能是初步的，不可能具有完善的逻辑证明。

毕达哥拉斯(Pythagoras，约公元前585～500年)及其所创立的学派(毕达哥拉斯学派)，曾对数学作出了重要贡献。他们崇拜数(指整数)，"企图用数解释一切"，并且"不仅仅认为万物都包含数，而且说万物都是数"。②因此，这个学派对数的研究看成为对事物本质的研究，从而获得数论初步知识。例如该学派发现了完全数及亲和数(完全数指一数除本身这个因数外，它等于所有因数之和，如6，28和496等，都是完全数；亲和数指两个数，每个数的因数之和等于另一个数，如220和284就是亲和数)，及其对三元二次不定方程 $x^2+y^2=z^2$ 的研究等。几何方面获得

① [美]M·克莱因著《古今数学思想》(第一册)，上海科学技术出版社，1979年第一版，第14页。

② 梁宗巨《世界数学史简编》，辽宁出版社，1980年第1版，第98页。

的成果，在西方传统上总是把勾股定理（西方称为毕达哥拉斯定理）的发现和证明归功于毕达哥拉斯，并认为关于三角形、平行线、多边形、圆、球和正多面体的一些定理也是该学派发现的，其中特别是三角形三内角之和等于 180°，以及平面能被正三角形、正方形和正六边形所填满等。但他们对命题的证明或根据公理施用演绎推理来推出，“是非常值得怀疑的”，“在该学派存在的大部分时间里，他们是根据一些特例来肯定所得的结果的。……晚期的成员可能作出了合法的证明”。①

柏拉图（Plato，公元前 427～347 年）以及学派，柏拉图虽不是数学家，但他却非常重视数学，传说在他创办的学院门口写着：“不懂几何者不得入”。柏拉图热心数学，鼓励他人从事数学研究，关心对已有数学知识的完善，大力推进立体几何的研究，该学派最重要的发现是圆锥曲线，一般认为这是为解决三个著名几何作图不能问题而引起的。柏拉图不仅关心证明和推理，而且确认知识有加以演绎整理成系统的需要，这对数学的研究产生了很大的影响，正如 M・克莱因所说：“不管柏拉图有否明确的公理真正用演绎法整理过数学，有一点是无容置疑的，即至少从柏拉图时代起，数学上要求根据一些公认的原理作出演绎证明，由于坚持要有这种形式的证明，希腊人得以把前此几千年来数学里所有法则、步骤和事实全部抛弃”。柏拉图还对概念的定义、命题和推理等作过研究，为创建逻辑学做了准备工作。

相传正方形的一边与其对角线不可通约（即 $\sqrt{2}$ 的无理性）是由毕达哥拉斯学派的希帕苏斯（Hippasus，约公元前 470

① M・克莱因著《古今数学思想》（第一册），上海科学技术出版社，1979 年第 1 版，第 39 页。

年)发现的，这一发现违背了该学派“万物都是(整)数(或整数之比)”的信条，引起了这派成员的震惊，因而把他抛到大海之中，从而出现了数学的第一次危机。这之后，昔兰尼的西奥多罗斯(Theodorus of Cyrene，约公元前425年)，又相继证明了现在记为$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{7}$，……，$\sqrt{11}$的无理性，因此迫使着人们去解决这一危机。后来这一危机是由古希腊时代的杰出数学家欧多克斯(Eudoxus，约公元前408～355年)解决的，他通过给比例下新的定义，建立起一整套完善的比例论，令人信服地处理好了不可通约的量，即解决了由出现无理数而引起的数学危机。由于正方形一边与其对角线不可通约的证明用的是反证法(与我们现在见到的相同)，无疑会引起对推理的重视与研究，促进了数学演绎体系的产生。

自从泰利斯开创证明以来，几何逐渐由实验几何向推理几何过渡。如果说开始时它带有实验的成分较多或推理论证比较粗糙，那么到了数学的第一次危机后，它运用推理论证已占主要地位并且也较为合理了，这样，就为逻辑学的建立创造了十分有利的条件。亚里斯多德(Aristotle，公元前384～322年)就在这种情况下创立了逻辑。人们“从亚里斯多德的著作中，可以十分清楚地看出，他是从数学中得出逻辑的。……用当时课本中的数学例子来说明他的推理原则”。①

亚里斯多德专门论述逻辑问题的著作有：《范畴篇》、《解释篇》、《分析前篇》、《分析后篇》、《论辩篇》和《辩谬篇》六部，内容非常丰富，涉及面很广。据说由他的学生把上述六部著作汇编在

① [美]M·克莱因著《古今数学思想》(第一册)，上海科学技术出版社，1979年第1版，第62页。

一起，取名为《工具论》，流传于世。值得特别注意的是，亚里斯多德不仅深入研究了逻辑推理，得出了三段论学说，而且把它表述为一个公理系统，具体阐明了公理化方法。对此人们给予高度评价："亚里斯多德并没有局限在简单列举他认为是可靠的推理规则，而是头一次对逻辑作出了某种公理化。这个成就确实是很大的"。[①]

逻辑虽主要来自数学，但一旦建立后，它的思想、原理和方法，反过来又直接影响数学的发展，推进几何演绎体系的建立。事实上当亚里斯多德创立逻辑不久，欧几里得（Euclid，大约公元前 300 年）就在整理前人几何知识的基础上，建立起数学中第一个公理系统——《几何原本》，达到了古希腊数学的顶峰。亚里斯多德强调演绎证明，重视演绎体系的建立，认为证明应从真实性不言而喻的命题开始。"他把公理和公设加以区别，认为公理是一切科学所公有的真理，而公设只是为某一门科学所接受的第一性原理。……所列出的一批公理或公设，数目应该愈少愈好，只要它们能用以证明所有结果"。[②] 在《几何原本》中，欧几里得也把公理与公设区别开来，但后来的数学家却不再把它们加以区别。亚里斯多德认为与公理一样，定义也要从一些不加定义的原始概念开始，但这一点没有被欧几里得所采纳，也为其后的数学家所漠视，直到 19 世纪末，才有了根本改变。

在西方，中世纪的数学和逻辑基本处于停滞状态，但随着文艺复兴的到来，生产力和科学技术得到了新的发展，而由于当时实验科学的需要，使算术和代数从古希腊从属于几何的地位中

---

① [德]亨利希·肖尔兹著《简明逻辑史》，商务印书馆出版，1977 年第 1 版，第 10 页。

② 同第 4 页①，第 60 页。

解放出来，获得了迅速的发展，并很快创立了解析几何和微积分。同样，逻辑在演绎逻辑得到广泛传播与研究的同时，对由亚里斯多德开创的归纳逻辑也获得了极大发展，并经培根(Francis Bacon，1561～1626 年)和穆勒(John Stuart Mill，1806～1873 年)等的工作，发展成为一门具有系统完整的逻辑理论。培根注重观察和实验，强调归纳，这在相当程度上为数学家所采用，从而促进了数学的发展。而伽利略(Galileo Galilei，1564～1643 年)的科学研究方式，则更符合于科学(包括数学)发展的实际，这种研究方式，就是通过观察和实验，归纳得出基本原理，然后运用数学方法，使科学(或数学)理论达到广博和完善。“牛顿(I·Newton，1642～1727 年)断言，需要用实验来提供基本定律。他又明白知道：在得到一些基本原理之后，科学的作用就是从这些原理推出新的事实。……只有依靠数学的描写(即使完全缺乏物理的了解时也依靠它)才使得牛顿的惊人贡献成为可能，更不用说后来的发展了”。① 这可以说是由逻辑与数学方法相互结合推动科学(包括数学)的发展。由于归纳推理(包括类比推理等)是一种或然性推理，于是随着概率论的创立和发展，运用它来解释或研究归纳逻辑也获得了发展。

代数的迅速发展，得力于引用一套较好的符号体系，许多数学家都对此作出贡献，其中韦达(F·Viète，1540～1603 年)贡献最大。由于完善的符号，使得代数运算和解方程等的研究获得长足的进步。莱布尼兹(G·W·Leibniz，1646～1716 年)对各种符号进行过长期的研究，认识到运用好符号有可能大大节省思维劳动，并认为数学之所以能如此快的发展与有效，就是因为使

① [美]M·克莱因著《古今数学思想》(第二册)，上海科学技术出版社，1979 年第 1 版，第 39～41 页。

用了特制的符号的原因。莱布尼兹“他一生都很注意逻辑，并且很早就神往于中世纪神学家 Raymond Lull(1235～1315 年)的图式。…莱布尼兹离开了经院逻辑和 Lull，而为一种宽广演算的可能性所激动，这种演算将使人们在一切领域中能够机械地轻易地去推理”。① 这里莱布尼兹已洞察到传统形式逻辑存在的缺陷和不足，需要彻底加以改革，并构思创立新逻辑的基本思想与计划，这就是后来的数理逻辑(或符号逻辑)。因此大家认为，数理逻辑的创始人是莱布尼兹。

莱布尼兹创立数理逻辑的基本思想，就是要建立一个“普遍的符号语言”，而这种符号语言是表意的，每个符号表示一个概念或命题，并能像代数一样进行“思维的演算”。这种“思维和推理就可以用计算来代替。…表意的符号语言和思维的演算是莱氏提出的重要思想，这二者也正是现代数理逻辑的特征”。② 莱布尼兹也曾说过：“我们要造成这样的一个结果，使所有推理的错误都只成为计算的错误，这样，当争论发生的时候，两个哲学家同两个计算家一样，用不着辩论，只要把笔拿在手里，并且在算盘面前坐下，两个人面面相觑地说：让我们来计算一下吧！”由于莱布尼兹对于开创新逻辑的卓越思想和贡献，逻辑史学界给予高度评价：“人们提起莱布尼兹就好像谈到日出一样，使亚里斯多德的逻辑获得‘新生’，…这种新东西是什么呢？它就是把逻辑加以数学化的伟大思想。”③ 从此逻辑的发展进入了一个新的时期。

---

① [美]M·克莱因著《古今数学思想》(第四册)，上海科学技术出版社，1979 年第 1 版，第 295～296 页。

② 王宪钧《数理逻辑引论》，北京大学出版社，1982 年第 1 版，第 261 页。

③ [德]亨利希·肖尔兹著《简明逻辑史》，商务印书馆，1977 年第 1 版，第 54、48 页。

在微积分创建的初期，由于它的基础还未来得及建立起来，这样就不可避免出现了逻辑矛盾。例如，在求函数 $y=x^n$ 的导数时，因为当时还没有建立起极限理论，所以在给出函数的增量与自变量增量之比后，不得不先令 $\Delta x\neq 0$，约去 Δx；再令 $\Delta x=0$，得出所求的导数。但在这里明显存在着问题，即在同一个思维过程中，一会儿说 $\Delta x\neq 0$，一会儿又说 $\Delta x=0$，这显然违背了逻辑学中的矛盾律。为此牛顿与莱布尼兹都曾各自给出解释，但都无法自圆其说。“因此英国主教贝克莱(Berkeley)便对微积分大肆攻击，说微积分是荒谬的，建立在沙滩之上的，经不起考验云云。这种攻击不无道理，这便是第二次数学危机。”①

在牛顿、莱布尼兹之后，大多数数学家都忙于把微积分的内容和技术推向前进与做有关各分支的创建工作及其应用，无暇顾及解决第二次数学危机，这样直到 18 世纪末 19 世纪初才开始为数学家所关心，并由柯西(A·L·Cauchy，1789～1857 年)等建立起极限理论，解决导数、积分等概念的问题。但极限理论依懒于实数理论，因此，当戴德金(J·W·Dedekind，1831～1916 年)和康托(G·F·Cantor，1845～1918 年)等建立起实数理论时，第二次数学危机才获得解决。

与此同时，逻辑的发展也经历类似地过程。自莱布尼兹提出创建新逻辑后，直到 19 世纪初叶由布尔(G·Boole，1815～1864 年)建立起逻辑代数，再经弗雷格(G·Frege，1848～1925 年)引入量词，建立起谓词演算(即谓词逻辑的公理化)，才完成从传统的形式逻辑发展成为现代的形式逻辑(即数理逻辑)。

数理逻辑的创建，满足了数学发展的需要，它为对变量数学

---

① 莫绍揆《数学基础》，高等教育出版社，1991 年第 1 版，第 10 页。

与近代数学进行逻辑分析创造了有力的工具，也为建立数学理论提拱了条件与方法。

如上所述，微积分的基础最后归结为实数理论，这样实数理论自身的相容性（或不矛盾性、一致性、和谐性）就成为问题的中心。另外，非欧几何的产生也提出了它的相容性问题，经由 F·克莱因（Felix Klein，1849～1925 年）和庞加莱（Henri Poincar ė，1854～1912 年）等建立罗氏非欧几何的模型，把它的相容性归结为欧氏几何的相容性问题。而欧氏几何的相容性，当建立坐标系后，点与坐标对应，直线与一次方程对应等，最后也归结为实数理论的相容性问题。但是实数可表示为有理数的某种无穷集合，而有理数又可利用自然数来表示，这样实数理论的相容性，又归结为自然数理论与集合论的相容性问题。然而自然数可利用集合来定义。因此，不管来自几何或微积分的相容性都最终归结为集合论的相容性问题。这就是说，只要集合论是不矛盾的，数学的各分支也不会产生矛盾。

到了 19 世纪末，人们相信集合论是不会有矛盾的，严密地建立数学的目标似乎达到了。因此，庞加莱于 1900 年在巴黎召开的第二次国际会议上夸耀道，数学“现在可以说，绝对的严密是已经达到了”。①

但是，事隔不久，罗素（B·Russell，1872～1970 年）于 1902 年发现了集合论中的悖论，直接宣告集合论本身含有矛盾，从而引起数学界的震惊与争论。通常认为，给定条件 $\varnothing(x)$，必有集合 $A(A=\{x|\varnothing(x)\})$ 使得 $x\in A\leftrightarrow\varnothing(x)$，这就是概括原则。因此，当给一条件：$x\notin x$（意指 x 不是 x 的元素），必有集合 M（M

① ［美］M·克莱因著《古今数学思想》（第四册），上海科学技术出版社，1981 年第 1 版，第 97～98 页。