算學小叢書

代數學
順列組合及級數

佐藤充　水田文平著
崔　朝　慶　譯

商務印書館發行

算學小叢書

代數學

順列組合及級數

佐藤充　水田文平著

崔朝慶譯

商務印書館發行

目　次

代數學—順列組合及級數

第一章

緒論

I. 組合之定義

今有四物，以 a, b, c, d 表之(本編常用文字表事物)，從此等之物中，同時選擇二物，有種種不同之配合，如取 a, b 二物爲一種配合，取 a, c 二物爲一種配合，取 b, d 二物爲一種配合，又同時選擇三物，亦有種種不同之配合，如取 a, b, c 爲一種配合，取 a, b, d 爲一種配合．略舉其例，餘可類推．

凡從若干物之中選擇幾物爲一組，皆謂之組合．

如前例之 (a, b), (a, c), (b, d)，皆爲從 a, b, c, d 四物中同時取二物之組合．又 (a, b, c), (a, b, d)，皆爲從 a, b, c, d 四物中同時取三物之組合．

注意．如從 a, b, c 等諸物中，僅取 a 物，或僅取 b 物，或僅取 c 物，不配附他物，不適用組合之名，爲包含於組合公式之中，亦稱爲從 a, b, c 等物取一物之組合．

例. 求從 a, b, c, d 四物中取三物之三箇組合.

解. 一爲 a, b, c, 一爲 a, b, d, 一爲 b. c, d.

[問 1] 有 a, b, c, d 四物, 求作次之組合.

(一) 取二物之四箇組合.

(二) 取一物之三箇組合.

(三) 取三物之四箇組合.

[問 2] 有 v, w, x, y, z 五物, 求作次之組合.

(一) 取三物之四箇組合.

(二) 取四物之五箇組合.

2. 排列不同之物

設有 a, b, c 三物, 自左而右排列, 其次序有種種不同, 列如置 a 於左, 置 b 於中央, 置 c 於右, 可連書 a b c 成一直線以表之, 或置 b 於左, 置 c 於中央, 置 a 於右, 可連書 b c a 成一直線以表之.

3. 順列之定義

今有 a, b, c, d 四物, 從其中取二物作組合, 如所取之二物爲 a 與 b, 此組合之二文字, 有 a b, b a 兩種次序不同. 又從四物中取 a, b, d 三物, 其次序有 a b d, a d b 等許多不同.

凡從若干物中選擇幾物排列, 有許多不同之次序, 所成之排列, 皆謂之順列.

如上之 a b, b a, 皆爲從 a, b, c, d 四物中取二物之順列, 如 a b d, a d b, 皆爲從 a, b, c, d 四物中取三物之順列.

注意 1. 明瞭組合與順列之區別, 最爲緊要. 組合爲選擇之結果, 而順列乃選擇後排列之結果也.

注意 2. 如 a b c, a c b, c a b, 其選擇之三物相同, 就組合而言, 同爲一種組合, 就順列而言, 則爲三種互異之順列, 文字相同, 排列之次序又同, 始可謂之同一順列也.

注意 3. 論順列之意義, 極少須有不同之二物, 若從 a, b, c 等物中僅取 a 物, 或僅取 b 物, 不能成列, 爲包含於順列公式之中, 亦稱爲從 a, b, c 等物取一物之順列.

例. 有 a, b, c, d 四物, 求以二物作五箇不同之順列.

解. a b, b a, b c, c b, c d.

[問 3] 從 x, y, z 求作次之順列.

(一) 取二物之三箇順列.

(二) 取三物之五箇順列.

第二章

順列

4. 無遺漏無重複之順列之羣

因從 a, b, c 三物取二物之組合, 祇有次之三種.

卽 a 與 b, a 與 c, b 與 c (1)

故從 a, b, c 三物取二物之順列, 祇有次之六種.

卽 以 a 與 b 排列, 得 ab, ba
以 a 與 c 排列, 得 ac, ca
以 b 與 c 排列, 得 bc, cb (2)

檢 (2) 之順列羣, 從 a, b, c 三物取二物作順列, 無一相同, 且不能再有不同者, 故如斯之順列羣, 卽從三物取二物無遺漏無重複之順列之羣.

5. 作順列羣之方法

如作前節之順列羣, 可有數種方法, 說明其中之一例於次.

設有 a, b, c, d 四物, 取三物作順列, 不使有遺漏重複.

順列之左端一文字所占之位置爲第一位, 其右爲第二位, 再右爲第三位, 餘類推.

其第一位爲 a, 或爲 b, 或爲 c, 或爲 d, 有四種變化, 不能再有其他變化. 第二第三兩位, 暫以 o 表之.

卽 a o o, b o o, c o o, d o o.

次定 a o o 之第二位文字, 因僅餘 b, c, d 三文字, 其第二位爲 b, 或爲 c, 或爲 d, 有三種變化, 不能再有其他變化, 第三位仍暫以 o 表之.

卽 a b o, a c o, a d o.

依同法定 b o o, c o o, d o o 之第二位文字.

卽 bao, bco, bdo, cao, cbo, cdo, dao, dbo, dco.

次定 abo 之第三位文字, 因僅餘 c, d 二文字, 其第三位或爲 c, 或爲 d, 祇有二種變化, 不能再有其他變化.

卽 abc abd.

由此知從四物取三物, 能作二十四箇順列.

如 abc abd acb acd adb adc

bac bad bca bcd bda bdc

cab cad cba cbd cda cdb

dab dac dba dbc dca dcb

此卽無遺漏無重複之順列羣也.

[問 1] 從 a, b, c, d 四物取二物, 作無遺漏無重複之順列.

[問 2] 以 a, b, c 三物作無遺漏無重複之順列.

6. 順列之數

設從不同之四物取三物, 求作無遺漏無重複之順列羣, 其羣中順列之數, 可以 ${}_4P_3$ 表之.

從不同之 n 物中取 r 物, 作無遺漏無重複之順列羣, 其羣中順列之數, 代數學之通例, 以 ${}_nP_r$ 表之.

順列羣中之諸順列, 有時省略, 不一一列舉.

如前節從四物取三物之順列羣, 可以 ${}_4P_3=24$ 表其順列之數.

注意 1. 以 P 表順列, 乃取英語 Permutation 之第一文字.

注意 2. P 之左下角及右下角之文字或數字, 名曰添數. 左之添數, 表所設之物之總數, 右之添數, 表從共物取幾物之數. 其字

體俱宜略小, 右之添數不宜大於左之添數, 如左爲 3, 右爲 4, 乃指從三物中取四物, 此爲不可能之事. 故左爲 n, 右爲 r, 其 r 常小於 n, 亦可相等, 但無 r 大於 n 之理.

[問 3] 如云從不同之六物取四物, 求順列之數, 若詳言之, 則如何.

[問 4] 求次之諸順列羣之值.

(一) ${}_2P_1$, ${}_1P_2$

(二) ${}_3P_1$, ${}_3P_2$, ${}_3P_3$

(三) ${}_4P_3$, ${}_4P_2$

7. 計算順列之數

問 4 之諸題, 皆可依第 5 節之方法, 先求得順列之羣, 然後合計其順列之數. 若左右添數 n 與 r 之值略大, 則一一求其順列, 頗覺不易. 今述計算其數之方法於次.

設有 a, b, c, d 四物, 取三物作順列, 欲求順列之數 (以下宜參觀第 5 節作順列羣之方法), 四物可任意以一物置於第一位, 故定此順列之第一位, 有 4 種變化. 第一位既定, 續定其第二位, 又可任意以三物 (除第一位已置之一物) 中之一物, 與第一位配合, 故定順列之第一位第二位有 4×3 種變化. 第一第二兩位既定, 續定其第三位, 又可任意以二物 (除第一第二兩位已置之二物) 中之一物, 與前二位配合, 故定此順列之第一位第二位第三位, 有 4×3×2 種變化. 結果爲 ${}_4P_3=24$.

[問 5] 倣上之方法, 求次之諸順列羣之值.

(一) ${}_5P_2$, ${}_6P_2$, ${}_7P_2$

(二) ${}_5P_3$, ${}_6P_3$

(三) ${}_4P_4$

8. 計算 $_nP_r$ 之公式

由述於前節之方法，推得 $_nP_2=n(n-1)$，$_nP_3=n(n-1)(n-2)$.

$$故\ _nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1).$$

[問 6] 求證 $_nP_2=n(n-1)$.

[問 7] 求證 $_nP_3=n(n-1)(n-2)$.

注意. 上之公式右邊因數之數，等於 $_nP_r$ 之右下角添數 r.

例. 依公式求 $_8P_5$ 之值.

解. 以 8, 5 代公式之 n, r, 依上之注意，知共有五箇因數.

故 $_8P_5=8, 7, 6, 5, 4=6720$.

別解. 先計算 $n-r+1$ 之值得 4，以 4 至 8 之五箇整數連乘，得 6720.

[問 8] 求次之諸式之值.

(一) $_8P_4$　　(二) $_9P_5$　　(三) $_{11}P_3$

9. 基本定理

第 7 節中，述從四物取三物作順列，其第一位有 4 種變化. 既定第一位，其第二位各有三種變化，接續定第一位第二位，共有 4×3 種變化. 既定第一第二兩位，其第三位各有二種變化，接續定第一位第二位第三位，共有 $4\times3\times2$ 種變化. 所求之順列，應有盡有，完全無缺，由此得定理於次.

定理　作甲事，有 L種方法，作乙事，有 m 種方法，作丙事，有 n 種方法，連續作甲乙二事（無論用 L種方法之何一種方法，皆能接用 m 種方法中之一

種方法)，計有 $l\,m$ 種互異之方法. 又連續作甲乙丙三事(無論用 Lm 種方法之何一方法，皆能接用 n 種方法中之一種方法)，共計有 $Lm\,n$ 種互異之方法.

此爲本篇所常用之定理，有基本定理之稱.

10. 從 ${}_nP_r$ 之關係求 n 之值

例 1. 設 ${}_nP_5=2\times{}_nP_4$，問 n 之值如何.

解. 因 ${}_nP_5=n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$.

${}_nP_4=n(n-1)(n-2)(n-3)$.

故 $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)=2n(n-1)(n-2)(n-3)$. (1)

轉項 $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)-2n(n-1)(n-2)(n-3)=o$.

化得 $n(n-1)(n-2)(n-3)\{(n-4)-2\}=o$.

即 $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-6)=o$.

左邊之各因數，有一爲 0，則兩邊相等.

由此知 n 之值可使等於次之五數.

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 6.$$

上之五數中，0, 1, 2, 3 皆不適合於此題，僅有一答爲 $n=6$.

注意. 上之 (1) 式兩邊同以 $n(n-1)(n-2)(n-3)$ 除之，卽可豫先删除不適合本題之答數.

[問 9] 從次之相等式求 n 之值.

(一) ${}_nP_7=3\times{}_nP_6$ (二) ${}_nP_r=m\times{}_nP_{r-1}$.

例 2. 設 ${}_nP_5=2\times{}_nP_3$，求 n 之值.

解. 因 ${}_nP_5=n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$.

${}_nP_3=n(n-1)(n-2)$.

故 $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)=2n(n-1)(n-2)$.

移項 $n(n-1)(n-2)\{(n-3)(n-4)-2\}=0$.

卽 $n(n-1)(n-2)(n^2-7n+10)=0$.

令左邊之各因數同等於 0.

$n=0$, $n-1=0$, $n-2=0$, $n^2-7n+10=0$.

從前三式得 n 之値爲 0, 1, 2.

又分解最後之式爲 $(n-2)(n-5)=0$, 得 n 之値爲 2, 5.

$n<5$, 皆不適合於此題, 僅有一答爲 $n=5$.

注意. 例 1 之左右兩邊 P 之右下角添數差 1, 求 n 用一次方程式之解法, 例 2 之左右兩邊 P 之右下角添數差 2, 求 n 用二次方程式之解法. 若添數差 3, 知求 n 須用三次方程式之解法.

[問 10] 從次之相等式求 n 之值.

(一) ${}_nP_6=30\times{}_nP_4$　　　(二) ${}_nP_5=3\times{}_{n+1}P_4$

11. 從 ${}_nP_r$ 之關係求 r 之值

例 1. 設 ${}_{11}P_r=990$, 問 r 之值若干.

解. 因 ${}_{11}P_r=11.10.9\ldots\ldots(11-r+1)$.

其右邊 r 箇因數之積等於 990, 以因數 11,10,9 連除之, 至得商爲 1 而止, 因最後之除數爲 9, 從 $11-r+1=9$, 化得 $r=3$.

[問 11] 從次之相等式求 r 之值.

(一) ${}_9P_r=504$　　　(二) ${}_{10}P_r=30240$

例 2. 設 ${}_8P_r=3\times{}_8P_{r-1}$, 問 r 之值如何.

解. ${}_8P_r=8.7\ldots\ldots(8-r+1)$.

${}_8P_{r-1}=8.7\ldots\ldots(8-r+2)$.

故 $8.7\ldots\ldots(8-r+1)=3.8.7\ldots\ldots(8-r+2)$.

兩邊同以公共之因數 $8.7\ldots\ldots(8-r+2)$ 約之.