

算學小叢書



代數學
順列組合及級數

佐藤充 水田文平著

崔朝慶 譯



商務印書館發行

算學小叢書

代 數 學

順列組合及級數

佐藤充 水田文平著

崔 朝 慶 譯

商務印書館發行

目 次

第一章 緒論	1
組合之定義...	1
排列不同之物	2
順列之定義...	2
第二章 順列	4
無遺漏無重複之順列之羣...	4
作順列羣之方法...	4
順列之數	5
計算順列之數	6
計算 nP_r 之公式	7
基本定理	7
從 nP_r 之關係求 n 之值	8
從 nP_r 之關係求 r 之值	9
nP_r 間之關係式...	10
nP_r 之函數 $r=n$ 之順列數	10
從 $n!$ 求 n 之值	11
用階乘種表 nP_r 之值	11

記號 $o!$ 之值	12
簡單之應用問題	12
有若干文字占一定之位置之順列	14
若干文字所占之位置有相互之關係求其順列之數 ...	15
若干文字所占之位置有一定之範圍求其順列之數 ...	16
有若干數字不拘定同時用幾數字之問題	16
用若干數字所作之數之和	17
重複順列	17
取不全異之物作順列求順列之數	19
鑑定若干文字之次序作順列	21
排爲二列或三列以上之方法	21
環狀順列	22
練習問題 I	25
 第三章 組合	 28
表組合之數之記號	28
表組合之數之公式	28
以階乘表 ${}_nC_r$ 之值	29
求證 ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$	29
${}_nC_r$ 之最大值	30
從 ${}_nC_r$ 之添減 r 之值之關係求 n 或 r 之值 ...	32

簡單之應用問題	33
選擇有限制之組合	34
選擇有區別之組合	34
從若干羣分別選擇之組合	35
幾何學上之應用	35
從互異或不全互異之各物任意取若干物之情形	36
分配及分割	36
順列組合並用之問題	39
練習問題 II	40

第四章 二項定理 48

二項因數之連乘積	43
公項	47
展開式中某文字之幾次幕之係數	48
與初項末項距離相等之項之係數亦相等	50
會展開式之簡便方法	51
最大係數	52
最大項	53
從展開式之若干項求其係數求指數或其他文字之值	57
係數之和	60
用二項定理求三項之諸乘幕之展開式	61

指數為分數或負數之二項定理	63
計算近似值	64
練習問題 III	67
第五章 等差級數	70
級數之定義	70
等差級數	70
公項	71
等差中項	77
等差級數之和	81
推廣等差級數總和之公式之用	84
用聯立方程式之解法求等差級數未知之要素	88
應用問題	90
練習問題 I...	92
第六章 等比級數	95
等比級數之定義	95
公項	95
等比中項	101
相加平均數與相乘平均數	104
等比級數之和	106
推廣等比級數總和之公式之用	108

整除定理, 剩餘定理	111
無限等比級數	113
循環小數	117
應用問題	119
練習問題 II	121

第七章 調和級數 124

定義	124
調和中項	125
等差中項等比中項調和中項相互之關係	127
調和級數之和	128
練習問題 III	128

第八章 他種級數之和 131

求級數 $1+2+3+4+\cdots+n$ 之和	131
求級數 $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2$ 之和	131
同類項之和之記號 Σ	132
求級數 $1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3$ 之和	133
求級數 $1.2+2.3+3.4+\cdots$ 至第 n 項之和	134
求級數 $1.2+2.5+3.8+\cdots$ 至第 n 項之和	135

求級數 $1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots\cdots n$ 項之和		135
求級數 $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$ 之和		136
求級數 $a+(a+d)r+(a+2d)r^2+\cdots\cdots n$ 項之和		137
附錄 問題之答及解法指南		139

代數學—順列組合及級數

第一章

緒論

I. 組合之定義

今有四物，以 a, b, c, d 表之（本編常用文字表事物），從此等之物中，同時選擇二物，有種種不同之配合，如取 a, b 二物為一種配合，取 a, c 二物為一種配合，取 b, d 二物為一種配合，又同時選擇三物，亦有種種不同之配合，如取 a, b, c 為一種配合，取 a, b, d 為一種配合。略舉其例，餘可類推。

凡從若干物之中選擇幾物為一組，皆謂之組合。

如前例之 $(a, b), (a, c), (b, d)$ ，皆為從 a, b, c, d 四物中同時取二物之組合。又 $(a, b, c), (a, b, d)$ ，皆為從 a, b, c, d 四物中同時取三物之組合。

注意。如從 a, b, c 等諸物中，僅取 a 物，或僅取 b 物，或僅取 c 物，不配附他物，不適用組合之名，為包含於組合公式之中，亦稱為從 a, b, c 等物取一物之組合。

例. 求從 a, b, c, d 四物中取三物之三箇組合.

解. 一爲 a, b, c , 一爲 a, b, d , 一爲 b, c, d .

〔問 1〕 有 a, b, c, d 四物, 求作次之組合.

(一) 取二物之四箇組合.

(二) 取一物之三箇組合.

(三) 取三物之四箇組合.

〔問 2〕 有 v, w, x, y, z 五物, 求作次之組合.

(一) 取三物之四箇組合.

(二) 取四物之五箇組合.

2. 排列不同之物

設有 a, b, c 三物, 自左而右排列, 其次序有種種不同, 列如置 a 於左, 置 b 於中央, 置 c 於右, 可連書 abc 成一直線以表之, 或置 b 於左, 置 c 於中央, 置 a 於右, 可連書 bca 成一直線以表之.

3. 順列之定義

今有 a, b, c, d 四物, 從其中取二物作組合, 如所取之二物爲 a 與 b , 此組合之二文字, 有 ab, ba 兩種次序不同. 又從四物中取 a, b, d 三物, 其次序有 abd, adb 等許多不同.

凡從若干物中選擇幾物排列, 有許多不同之次序, 所成之排列, 皆謂之順列.

如上之 ab, ba , 皆爲從 a, b, c, d 四物中取二物之順列, 如 abd, adb , 皆爲從 a, b, c, d 四物中取三物之順列.

注意 1. 明瞭組合與順列之區別, 最爲緊要. 組合爲選擇之結果, 而順列乃選擇後排列之結果也.

注意 2. 如 abc, acb, cab , 其選擇之三物相同, 就組合而言, 同爲一種組合, 就順列而言, 則爲三種互異之順列, 文字相同, 排列之次序又同, 始可謂之同一順列也。

注意 3. 論順列之意義, 極少須有不同之二物, 若從 a, b, c 等物中僅取 a 物, 或僅取 b 物, 不能成列, 爲包含於順列公式之中, 亦稱爲從 a, b, c 等物取一物之順列。

例. 有 a, b, c, d 四物, 求以二物作五箇不同之順列。

解. ab, ba, bc, cb, cd .

〔問 3〕從 x, y, z 求作次之順列。

(一) 取二物之三箇順列。

(二) 取三物之五箇順列。

第二章

順列

4. 無遺漏無重複之順列之羣

因從 a, b, c 三物取二物之組合，祇有次之三種。

即 a 與 b , a 與 c , b 與 c (1)

故從 a, b, c 三物取二物之順列，祇有次之六種。

即 $\left. \begin{array}{l} \text{以 } a \text{ 與 } b \text{ 排列, 得 } ab, ba \\ \text{以 } a \text{ 與 } c \text{ 排列, 得 } ac, ca \\ \text{以 } b \text{ 與 } c \text{ 排列, 得 } bc, cb \end{array} \right\}$ (2)

檢 (2) 之順列羣，從 a, b, c 三物取二物作順列，無一相同，且不能再有不同者，故知斯之順列羣，即從三物取二物無遺漏無重複之順列之羣。

5. 作順列羣之方法

如作前節之順列羣，可有數種方法，說明其中之一例於次。

設有 a, b, c, d 四物，取三物作順列，不使有遺漏重複。

順列之左端一文字所占之位置為第一位，其右為第二位，再右為第三位，餘類推。

其第一位為 a ，或為 b ，或為 c ，或為 d ，有四種變化，不能再有其他變化。第二第三兩位，暫以 o 表之。

即 $ao o, bo o, co o, do o$ 。

次定 $ao o$ 之第二位文字，因僅餘 b, c, d 三文字，其第二位為 b ，或為 c ，或為 d ，有三種變化，不能再有其他變化，第三位仍暫以 o 表之。

即 abo, aco, ado .

依同法定 boo, coo, doo 之第二位文字.

即 $bao, beo, bdo, cao, cho, cdo, dao, dbo, deo$.

次定 abo 之第三位文字, 因僅餘 c, d 二文字, 其第三位或為 c , 或為 d , 祇有二種變化, 不能再有其他變化.

即 abc, abd .

由此知從四物取三物, 能作二十四箇順列.

如 $abc, abd, acb, acd, adb, adc$

$bac, bad, bca, bcd, bda, bdc$

$cab, cad, cba, cbd, cda, cdb$

$dab, dac, dba, dbc, dca, dec$

此即無遺漏無重複之順列羣也.

[問 1] 從 a, b, c, d 四物取二物, 作無遺漏無重複之順列.

[問 2] 以 a, b, c 三物作無遺漏無重複之順列.

6. 順列之數

設從不同之四物取三物, 求作無遺漏無重複之順列羣, 其羣中順列之數, 可以 ${}_4P_3$ 表之.

從不同之 n 物中取 r 物, 作無遺漏無重複之順列羣, 其羣中順列之數, 代數學之通例, 以 ${}_nP_r$ 表之.

順列羣中之諸順列, 有時省略, 不一一列舉.

如前節從四物取三物之順列羣, 可以 ${}_4P_3=24$ 表其順列之數.

注意 1. 以 P 表順列, 乃取英語 Permutation 之第一文字.

注意 2. P 之左下角及右下角之文字或數字, 名曰添數. 左之添數, 表所設之物之總數, 右之添數, 表從共物取幾物之數. 其字

體俱宜略小，右之添數不宜大於左之添數，如左爲 3，右爲 4，乃指從三物中取四物，此爲不可能之事。故左爲 n ，右爲 r ，其 r 常小於 n ，亦可相等，但無 r 大於 n 之理。

〔問 3〕如云從不同之六物取四物，求順列之數，若詳言之，則如何。

〔問 4〕求次之諸順列羣之值。

(一) ${}_2P_1, {}_1P_2$

(二) ${}_3P_1, {}_3P_2, {}_3P_3$

(三) ${}_4P_0, {}_4P_2$

7. 計算順列之數

問 4 之諸題，皆可依第 5 節之方法，先求得順列之羣，然後合計其順列之數。若左右添數 n 與 r 之值略大，則一一求其順列，頗覺不易。今述計算其數之方法於次。

設有 a, b, c, d 四物，取三物作順列，欲求順列之數（以下宜參觀第 5 節作順列羣之方法），四物可任意以一物置於第一位，故定此順列之第一位，有 4 種變化。第一位既定，續定其第二位，又可任意以三物（除第一位已置之一物）中之一物，與第一位配合，故定順列之第一位第二位有 4×3 種變化。第一第二兩位既定，續定其第三位，又可任意以二物（除第一第二兩位已置之二物）中之一物，與前二位配合，故定此順列之第一位第二位第三位，有 $4 \times 3 \times 2$ 種變化。結果爲 ${}_4P_3 = 24$ 。

〔問 5〕敝上之方法，求次之諸順列羣之值。

(一) ${}_6P_2, {}_6P_2, {}_7P_2$

(二) ${}_6P_3, {}_6P_3$

(三) ${}_4P_4$

8. 計算 nPr 之公式

由述於前節之方法，推得 ${}_nP_1 = n(n-1)$, ${}_nP_2 = n(n-1)(n-2)$.

$$\text{故 } {}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

[問 6] 求證 ${}_nP_2 = n(n-1)$.

[問 7] 求證 ${}_nP_3 = n(n-1)(n-2)$.

注意：上之公式右邊因數之數，等於 ${}_nP_r$ 之右下角函數 r .

例：依公式求 ${}_8P_5$ 之值。

解：以 8, 5 代公式之 n, r ，依上之注意，知共有五箇因數。

故 ${}_8P_5 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$.

(別解) 先計算 $n-r+1$ 之值得 4，以 4 至 8 之五箇整數連乘，得 6720。

[問 8] 求次之諸式之值。

$$(一) {}_8P_4 \quad (二) {}_9P_5 \quad (三) {}_{11}P_3$$

9. 基本定理

第 7 節中，述從四物取三物作順列，其第一位有 4 種變化。既定第一位，其第二位各有三種變化，接續定第一位第二位，共有 4×3 種變化。既定第一第二兩位，其第三位各有二種變化，接續定第一位第二位第三位，共有 $4 \times 3 \times 2$ 種變化。所求之順列，應有盡有，完全無缺，由此得定理於次。

定理 作甲事，有 L 種方法，作乙事，有 m 種方法，作丙事，有 n 種方法，連續作甲乙二事（無論用 L 種方法之何一種方法，皆能接用 m 種方法中之一

種方法), 計有 $l m$ 種互異之方法. 又連續作甲乙丙三事 (無論用 $L m$ 種方法之何一方法, 皆能接用 n 種方法中之一種方法), 共計有 $L m n$ 種互異之方法.

此為本篇所常用之定理, 有基本定理之稱.

10. 從 ${}_nP_r$ 之關係求 n 之值

例 1. 設 ${}_nP_5 = 2 \times {}_nP_4$, 問 n 之值如何.

解. 因 ${}_nP_5 = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$.

$${}_nP_4 = n(n-1)(n-2)(n-3).$$

$$\text{故 } n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 2n(n-1)(n-2)(n-3). \quad (1)$$

$$\text{轉項 } n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) - 2n(n-1)(n-2)(n-3) = 0.$$

$$\text{化得 } n(n-1)(n-2)(n-3)\{(n-4)-2\} = 0.$$

$$\text{即 } n(n-1)(n-2)(n-3)(n-6) = 0.$$

左邊之各因數, 有一為 0, 則兩邊相等.

由此知 n 之值可使等於次之五數.

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 6.$$

上之五數中, 0, 1, 2, 3 皆不適合於此題, 僅有一答為 $n=6$.

注意: 上之 (1) 式兩邊同以 $n(n-1)(n-2)(n-3)$ 除之, 即可豫先刪除不適合本題之答數.

[問 9] 從次之相等式求 n 之值.

$$(一) \quad {}_nP_7 = 3 \times {}_nP_5 \qquad (二) \quad {}_nP_r = m \times {}_nP_{r-1}.$$

例 2. 設 ${}_nP_5 = 2 \times {}_nP_3$, 求 n 之值.

解. 因 ${}_nP_5 = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$.

$${}_nP_3 = n(n-1)(n-2).$$

故 $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 2n(n-1)(n-2)$.

移項 $n(n-1)(n-2)\{(n-3)(n-4)-2\}=0$.

即 $n(n-1)(n-2)(n^2-7n+10)=0$.

令左邊之各因數同等於 0.

$n=0, n-1=0, n-2=0, n^2-7n+10=0$.

從前三式得 n 之值為 0, 1, 2.

又分解最後之式為 $(n-2)(n-5)=0$, 得 n 之值為 2, 5.

$n < 5$, 皆不適合於此題, 僅有一答為 $n=5$.

注意: 例 1 之左右兩邊 P 之右下角添數差 1, 求 n 用一次方程式之解法, 例 2 之左右兩邊 P 之右下角添數差 2, 求 n 用二次方程式之解法. 若添數差 3, 知求 n 須用三次方程式之解法.

[問 10] 從次之相等式求 n 之值.

$$(一) {}_nP_6 = 30 \times {}_nP_4 \quad (二) {}_nP_5 = 3 \times {}_{n+1}P_4$$

11. 從 ${}_nP_r$ 之關係求 r 之值

例 1. 設 ${}_nP_r = 990$, 問 r 之值若干.

解. 因 ${}_nP_r = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdots (11-r+1)$.

其右邊 r 箇因數之積等於 990, 以因數 11, 10, 9 連除之, 至得商為 1 而止, 因最後之除數為 9, 從 $11-r+1=9$, 化得 $r=3$.

[問 11] 從次之相等式求 r 之值.

$$(一) {}_9P_r = 504 \quad (二) {}_{10}P_r = 30240$$

例 2. 設 ${}_nP_r = 3 \times {}_nP_{r-1}$, 問 r 之值如何.

解. ${}_nP_r = 8.7 \cdots (8-r+1)$.

$${}_nP_{r-1} = 8.7 \cdots (8-r+2).$$

故 $8.7 \cdots (8-r+1) = 3 \cdot 8.7 \cdots (8-r+2)$.

兩邊同以公共之因數 $8.7 \cdots (8-r+2)$ 約之.