

中等专业学校教材
工科专业通用

数学第二册

教学参考书

上海市中专数学教材编写组 编

高等教育出版社

目 录

第九章 空间图形	1
第十章 直线.....	52
第十一章 二次曲线.....	84
第十二章 极坐标和参数方程	117
第十三章 数列	146

第九章 空间图形

一 目的要求

1. 理解空间的直线、平面的概念和平面的基本性质,并会画出平面图形在水平平面内的直观图.
2. 理解空间的直线和直线、直线和平面、平面和平面的位置关系,了解它们的性质定理和判定定理.
3. 理解异面直线所成的角、直线和平面所成的角、直线垂直平面、二面角等概念,理解三垂线定理及其逆定理,并能熟练应用这些概念和定理进行计算.
4. 了解多面体和旋转体的概念以及柱、锥、台、球的主要性质,会画出直棱柱、正棱锥、正棱台、圆柱、圆锥、圆台、球的直观图,并能利用公式进行表面积和体积的计算.
5. 通过本章教学,逐步帮助学生建立空间观念,培养和提高学生的空间想象能力和逻辑推理能力.

二 教材说明

本章教材共分六节. 前四节研究空间的直线、平面的概念和性质,后两节研究多面体与旋转体的概念、主要性质与表面积、体积的计算.

第一节是平面. 教材一开始就提出了“平面是广阔无涯的”,并且指出日常见到的平面图形都可以看作是平面的一部

分。教材介绍了平面的画法和表示法，为了使学能比较正确地表达平面图形在水平平面内的形状，教材还介绍了几种平面图形的直观图的画法。教材用公理的形式阐述了平面的基本性质，并在此基础上，给出了确定一个平面的四种条件，同时，公理3对平面存在的唯一性作了论证。最后，教材给出了用集合的符号表示空间的点、直线和平面相互关系的规定。

第二节是直线和直线的位置关系。教材通过对长方体的某些线段之间位置关系的分析，给出了异面直线的定义，归纳出空间两条不重合直线的各种位置关系，并介绍了异面直线的直观画法。教材从平面内平行直线的传递性引出空间平行直线的传递性定理，并用实例加以验证。教材证明了空间两个角相等的定理，并在此基础上，给出了异面直线所成的角的定义。

第三节是直线和平面的位置关系。教材通过长方体的某些线段与平面之间位置关系的分析，给出了空间直线与平面平行以及直线与平面相交的定义，归纳出空间一条直线和一个平面的各种位置关系，并介绍了直线和平面平行，直线和平面相交的直观画法。对于直线和平面平行，教材给出了判定定理和性质定理。对于直线和平面相交，教材是分直线和平面垂直及直线和平面斜交两种情形分别加以讨论的。对于直线和平面垂直，教材给出了定义、判定定理和性质定理。其中判定定理1是从实例分析得出并加以证明的；性质定理的证明采用了反证法，有利于培养学生逻辑推理的能力。对于直线和平面斜交，教材给出了斜线和射影的有关概念和定理，并

在此基础上规定了直线和平面所成的角的定义。最后，教材讨论了三垂线定理及其逆定理。

第四节是平面和平面位置关系。教材通过长方体的某些平面之间位置关系的分析，给出两个平面平行的定义，归纳出空间两个不重合的平面的各种位置关系，并介绍了平行平面的直观画法。对于平面和平面平行，教材给出了判定定理和性质定理，介绍了判定定理在实践中的应用。在讨论平面和平面相交时，教材首先给出了二面角和它的平面角的定义，然后讨论了平面和平面垂直的情形，给出了平面和平面垂直的定义，证明了判定定理和性质定理。

第五节是多面体。教材介绍了多面体的一般概念，给出了棱柱、棱锥、棱台的定义，讨论了它们的主要性质，介绍了它们的直观图画法和表面积、体积的计算公式。最后，教材还介绍了拟柱体的定义和体积的计算公式。

第六节是旋转体。教材介绍了旋转体的一般概念，给出了圆柱、圆锥、圆台、球的定义，讨论了它们的主要性质，介绍了它们的直观图的画法和表面积、体积的计算公式。

本章教材的重点：(1)平面的基本性质；(2)空间直线和直线、直线和平面、平面和平面的各种位置关系；(3)异面直线所成的角、直线和平面所成的角、二面角的概念；(4)三垂线定理及其逆定理；(5)分析柱、锥、台、球的线、面关系，选用适当的方法解题。

本章教材的难点：(1)建立空间观念，画出空间图形的直观图；(2)了解判定定理和性质定理的逻辑推理过程，特别是应用反证法进行推理的过程；(3)正确选用判定定理、性质

定理来解题。

平面的基本性质(三个公理、三个推论)是研究本章的基础,有关空间直线和平面的各种判定定理、性质定理都是在这个基础上来讨论的。空间直线、平面的各种位置关系既是后面研究多面体、旋转体的基础,也是学生建立空间观念的基础。

异面直线所成的角、直线和平面所成的角、二面角等概念和三垂线定理及其逆定理在研究多面体、旋转体的主要性质和面积、体积的计算时经常用到。因此上述(1)、(2)、(3)、(4)的内容都是本章的重点。帮助学生建立空间观念是本章的难点,因此,教学中应该重视空间图形的直观画法。学生往往习惯于在平面几何范畴内思考问题,把空间图形当成平面图形来画,没有立体感,有时把空间图形中各个面上的直线画得重叠在一起,影响了问题的分析和计算。教学中要注意联系学生熟知的事例,多运用直观教具,指导学生正确地画出空间图形。本章概念较多,各种判定定理、性质定理也较多。学生往往对定理的证明不易了解,不能区别判定定理与性质定理的异同与作用,也不会正确运用定理来解题。所以在教学中要分析定理的条件与结论,讲清推理的步骤,特别是讲清用反证法推理的主要步骤;在计算题中注意对柱、锥、台、球各种形体的线面关系的分析,以加强学生对概念、定理的理解和运用,提高学生分析问题、解决问题的能力。

本章教学约需 30 课时,具体分配如下(仅供参考):

§ 9-1 平面 约 2 课时

§ 9-2 直线和直线的位置关系 约 2 课时

§ 9-3 直线和平面的位置关系	约 6 课时
§ 9-4 平面和平面的位置关系	约 6 课时
内容小结	约 2 课时
§ 9-5 多面体	约 6 课时
§ 9-6 旋转体	约 5 课时
本章总结	约 1 课时

三 教 学 建 议

§ 9-1 平 面

1. “平面”是一个只作描述的最基本的概念,是构成空间图形最基本的元素,也是我们日常生活中到处都会接触到的一个概念.教材一开始就提出“平面是广阔无涯”的,但学生对此并不是能立即接受的.因为学生日常接触到的很多具有“平面”的事物,如黑板面、窗玻璃面、纸面等都是有限界的,所以往往把平面看成是有限的,四面有边的.从这样的观点出发,就会错误地认为两个平面可以相交于一个点,或一条线段.因此在教学中要帮助学生建立这个概念,如联系平面几何知识进行类比,在平面上,直线可以无限延长,在空间,平面也可以无限伸展;在平面上,直线只能画出一段,在空间,平面也只能画出一部分.

在讲平面的画法时,可指出教室里的黑板面、窗玻璃面、课桌面等,它们大都具有矩形的形状,如果从适当的位置(一定的角度、一定的距离)去看这些矩形,会感觉到它们都象平行四边形,因此通常把一个平面画成平行四边形来表示.教材指出画一个水平放置的平面时,一般是把表示平面的平行

四边形的锐角大约画成 45° ，把横边的长度大约画得等于另一边长度的两倍。由于我们从不同的角度、不同的距离来看同一个水平放置的平面时，平行四边形的形状和大小会各有不同，所以在讲平面的画法时，只需指明它们大致的比例，不要规定得太死。画一个平面的一部分被另一个平面遮住时，应该强调被遮住部分的线段要画成虚线或不画。有些学生由于忽视这一点，画出来的图形就显得没有立体感。所以应培养学生一开始就认真画图的习惯，这对建立空间观念和学习以后内容都是有益的。

2. 教材通过例题介绍了平面图形在水平平面内画直观图的方法，它是后面棱柱、棱锥、棱台等空间图形在水平平面内直观图画法的基础。这里介绍的是斜二侧画法，关于圆的直观图，这里没有讨论，而是在介绍圆柱直观图画法时再行介绍。在讲书上 p. 3~p. 4 的三个例子时，要突出画图的三条规则。特别是水平方向的线段与垂直方向的线段的画法应使学生掌握。

3. 平面的基本性质是研究空间图形性质的理论基础。要讲清描述平面的基本性质的三个公理和三个推论，对它们的条件和结论要逐字逐句地进行解释，三个推论的证明思路与依据要说理透彻，层次分明。教材在公理 3 的后面指出了“可以引并且只可以引一个平面”，可以简单地用“确定一个平面”来表示。在这里，学生对“可以并且只可以”的术语比较生疏，教师应该作些说明：“可以引一个平面”表明这个平面是存在的，“只可以引一个平面”表明这个平面是唯一的；“可以引并且只可以引一个平面”表明这个平面不但存在而且唯一，所以

它是完全确定的,因而可以简单地说成“确定一个平面”。

公理 1 除了可以用来判定直线是否在平面内之外,还可用来检验一个面是不是平面。例如,木工在检验工作物的表面是否平整时,常把曲尺的直边紧靠在工作物的表面作任意滑动,如果曲尺的直边和表面接触紧密不透光,这个面就是平的,否则就不平。

讲公理 2 时,应使学生明确由于平面是可以无限伸展的,所以如果两个平面相交,有一个公共点,那末它们就相交于过这点的一条直线。

公理 3 实际上是给出了确定平面的条件。讲解时应突出只有经过不在同一直线上的任意三点才能确定一个平面,如果只经过一点、两点或在同一直线上的任意三点,虽然也可引平面,但有无数个,不能确定是哪个平面。经过四点不一定能引平面,也不一定只能引一个平面。通过讨论,可以使学生更为信服公理 3 所述的事实。

教材对公理 3 的推论 1 作了较为详细的证明。推论 2 和推论 3 中只对平面的存在性作了证明,对平面的唯一性没有证明。现补充如下,供教学参考。

推论 2 两条相交的直线可以确定一个平面。

参看书上 p. 7 的图 9-9。如果过相交直线 l 和 m 还可引另一个平面 β , 那末 A 、 B 、 O 三点也在平面 β 内。这样,过不在一直线上的三点 A 、 B 、 O 就有两个平面 α 和 β 了。这与公理 3 相矛盾,所以过两条相交直线 l 、 m 的平面只有一个。

推论 3 两条平行直线可以确定一个平面。

参看书上 p. 7 的图 9-10。如果过平行直线 l 和 m 还可

引另一个平面 β , 那末 m 上的任意点一定也在平面 β 内. 这样, 过点 A 和直线 l 就有两个平面 α 和 β 了, 这与推论 1 相矛盾, 所以过两条平行直线的平面只有一个.

教材在推论 1 平面唯一性的证明中, 已经使用了反证法. 通过证明, 教师应小结反证法的一般步骤, 使学生对反证法有初步的了解. 用反证法证明命题的一般步骤为:

- (1) 作出与命题结论相反情况的假设;
- (2) 根据这个假设, 按逻辑推理进行论证;
- (3) 若得出与题设条件相矛盾的结论, 即可断定假设的情况不成立, 而命题的结论是成立的.

4. 教材给出了用集合的符号表示空间的点、直线和平面之间关系的规定. 由于点是构成直线和平面的最基本的元素, 所以直线和平面都是点的集合. 在这里, 教材给出的五条规定在以后命题的证明或计算题的叙述中都要经常使用, 应使学生熟悉.

§ 9-2 直线和直线的位置关系

1. 讲解这一节内容时, 教师可先提出以下问题: “在同一平面内, 两条直线的位置关系只有相交和平行两种, 在空间, 两条直线的位置关系是否也是如此呢?” 然后通过对长方体的某些线段之间位置关系的观察, 使学生了解到在同一平面内的两条直线不相交就平行, 但不在同一平面内的两条直线却可以既不相交也不平行, 从而给出异面直线的定义, 并且归纳出空间两条不重合的直线有三种位置关系. 学生往往会错误地认为只要两条直线不相交, 它们就是平行直线. 教师应再

次明确,只有在同一平面内的两条直线不相交,它们才是平行直线.不在同一平面内的两条直线,它们不能相交,这时称它们为异面直线,不能称它们为平行直线.

2. 异面直线的概念是本节内容的重点,教学时应有足够的重视.首先要指出:异面直线的定义中“不在同一平面内的两条直线”是指这两条直线不能同在任何一个平面内的意思.画在两个平面内的直线,也有可能同时在另一个平面内,所以这两条直线不一定是异面直线.为了突出异面直线“异面”的特点,画图时要把两条直线画得明显不能共面.教材 p. 11 的图 9-18 指出了异面直线的直观画法.

3. 在讲教材 p. 11 上的定理 1 (空间平行直线传递性定理)时,可先复习“在平面内平行于同一条直线的两条直线一定平行”的定理,然后说明在空间也有类似的结论.这样类比,可以加深学生对这个定理的印象.教材对定理 1 没有加以证明,一方面因为证明较繁,另一方面因为结论的正确性较为明显,所以精简了定理的证明,只举了两个浅显的例子加以直观地说明.这个定理是证明定理 2 (对应边平行且方向相同的两个角相等)的基础,也是今后论证平行问题的主要根据.讲解定理 2 时也可与平面几何中的相应定理进行类比.

4. 讲两条异面直线所成的角时,可先提出平面内两条相交直线可用它们的夹角来表示它们的位置关系.然后指出,空间两条异面直线的位置关系也可用它们所成的角来表示.从而给出两条异面直线所成的角的定义.对此定义,需要着重说明三点:

(1) 在定义中,空间一点 O 是任意选取的,可以取在空

间任意点处,也可取在这两条异面直线中任意一条直线上.根据定理2可知,异面直线所成的角与 O 点的位置无关.为了方便起见,可将 O 点取在任一条异面直线上.

(2) 定义规定了两条异面直线所成的锐角(或直角)作为异面直线所成的角.

(3) 定义中规定的两条异面直线所成的角不是这两条异面直线直接相交形成的角,而是指自空间任意一点所作平行于两条异面直线的两条直线相交所成的角.

在讲两条异面直线 a 、 b 所成的角时,也许学生会提出:“怎样从空间任意一点 O 作直线 $a' \parallel a$, $b' \parallel b$?”它的作法是先过 O 点和直线 a 引平面 α ,过 O 点和直线 b 引平面 β ;再分别在平面 α 、 β 内,过 O 点作 $a' \parallel a$, $b' \parallel b$.

在讲两条异面直线互相垂直的概念时,要提醒学生注意,空间两条垂直的直线,可能是在同一平面内两条互相垂直相交的直线,也可能是不在同一平面内两条互相垂直的异面直线.

两条直线平行或垂直的概念,学生在平面几何里已经学过,但在空间,这两个概念有所引伸,情况也比较复杂,要防止学生简单地用平面上的直线和直线平行、垂直概念来理解空间直线和直线的平行、垂直.教学中要注意进行比较,以帮助学生加深理解.例如,平面内的两条直线若不平行,那末它们一定相交于一点,但空间的两条直线若不平行,那末它们可能相交于一点(共面直线),也有可能不相交(异面直线).又如,平面内过直线上一点,只能作一条直线垂直该直线,但过空间一条直线上一点,可以作无穷多条直线垂直该直线.总之,在

学习空间直线、平面时，要重视与平面上的相应情况进行类比，既比较它们类似的地方，也要比较它们不同的地方。

§ 9-3 直线和平面位置关系

1. 教材通过对长方体的某些线段和平面之间位置关系的观察，使学生了解到空间一条直线可以完全落在一个平面内，它与平面有无数个公共点，也可以与平面没有公共点或只有一个公共点，从而给出直线和平面平行以及直线和平面相交的定义，并在此基础上归纳出一条直线和一个平面有三种位置关系。教材 p. 17 上的图 9-23 和图 9-24 说明了直线平行于平面以及直线和平面相交的直观画法。

2. 在讲直线和平面平行的判定定理时，应注意引导学生把空间直线和平面平行的问题转化为平面内直线与直线平行的问题来考虑。如果要判定一条直线是否和一个平面平行，只须知道这条直线和这个平面内的一条直线平行即可。为了便于记忆，这个判定定理可简单地说成“若线线平行，则线面平行”。讲这个定理时，还可就教室中的事物为例。例如，教室门框的左右两条对边是平行的，当门绕着门框的一边转动时，门框的两条边是平行的，所以门框的另一边始终与门平行。

在讲直线和平面平行的性质定理时，要使学生了解定理的内容，即如果一条直线 a 平行于一个已知平面 α ，那末直线 a 只是平行于过 a 的任一平面 β 与已知平面 α 的交线 b ，而不是平行于平面 β 内的一切直线，因为除了平面 α 与 β 的交线 b 与 a 平行外， β 平面内的任何其它直线与 a 都是异面直

线。为了便于记忆,这个性质定理也可简单地看成“若线面平行,则线线平行”。但需明白这里的“线线”指的是这条直线与过这条直线的任一平面和已知平面的交线。

讨论了直线和平面平行的判定定理和性质定理之后,要向学生说明这两个定理的区别,如果要知道直线和平面是否平行,应该用判定定理;如果已知直线和平面平行,要知道它们具有什么性质,就应该用性质定理。教材 p. 29 习题 9-3 中的第 1 题可给学生思考回答。

在讲解教材 p. 18~p. 19 的例题时,要注意教给学生如何把空间的问题转化为平面的问题来解(详见参考教案)。

3. 在讲直线和平面垂直时,可先观察教室内下垂的日光灯吊线和天花板之间的位置关系,从而给出直线和平面垂直的定义。教材 p. 19 的图 9-29 说明了直线和平面垂直的直观画法。在讲直线和平面垂直的判定定理之前,可先说明要判别一条直线和一个平面是否垂直,如果根据定义,就需知道直线和平面内的任何直线是否都垂直?而要做到这一点是不可能的,因此必须要有判定定理。教学中可先介绍木工利用曲尺判断木柱是否与板面垂直的方法,从中引出判定定理 1。讲解时要突出定理中的“两条相交直线”的条件,并让学生思考回答教材 p. 29 习题 9-3 中的第 4 题。

在讲判定定理 2 时,可与平面几何中的定理“如果两条平行直线中的一条直线垂直于第三条直线,那末另一条直线也垂直于第三条直线”进行类比。同样,在讲性质定理时,也可与平面几何中的定理“如果两条直线垂直于同一条直线,那末这两条直线就平行”进行类比。

讲完判定定理和性质定理之后, 要使学生明白它们的区别, 并能正确运用它们来解题.

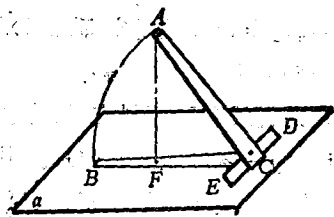
4. 在讲直线和平面斜交时, 先要讲清有关斜线及其在平面内的射影的一系列概念和定理. 其中斜线与它在平面内的射影所成的角是最小角的定理是定义直线和平面所成的角的依据. 这个最小角的定理, 教材是运用三角知识来证明的, 如果学生学过“两个三角形有两边对应相等, 如果第三边不等, 那末它所对的角也不等, 第三边大的所对的角较大”, 那末也可利用它来证明这个定理. 讲完这个定理, 教师还要指出: (1) 只要平面的斜线确定, 那末斜线和它在平面内的射影所成的角也就完全确定; (2) 这个确定的角是斜线和平面内过斜线足的所有直线所成的角中最小的一个角.

5. 在讲斜线和平面相交时, 与平面上两条相交直线或空间两条异面直线一样, 也需要考虑它们之间所成的角的大小. 但过斜线足在平面内可以作很多直线, 斜线与它们中的每一条直线所成的角一般是不相等的. 为确定起见, 取这些角中的最小角, 也就是取斜线和它在平面内射影所成的角作为该斜线和平面所成的角. 由定义可知, 直线和平面斜交, 所成的角为锐角. 教材还规定: 直线和平面垂直, 所成的角为直角; 直线和平面平行(或直线在平面内), 所成的角为 0° 的角. 教材最后还把“斜线和平面所成的角”及“直线和平面成直角和 0° 的角”统称为“直线和平面所成的角”.

6. 三垂线定理及其逆定理在实际应用中较为广泛. 讲解时可先用直观教具进行观察分析. 例如, 把丁字尺放在水平平面 α 内 CDE 的位置(图 9-1), 然后固定 DE , 把 BO 绕



(1)



(2)

图 9-1

DE 转到 AO 的位置, 则 FO 就是 AO 在平面 α 内的射影.

显然, 如果 DE 和 AO 垂直, 那末 DE 也就和 AO 在平面 α 内的射影 FO 垂直, 反之亦然.

在三垂线定理的证明中, 教材 p. 27 图 9-39 列出了直线 DE 在平面内的三种位置: (1) DE 与 BC 交于 O 点; (2) DE 与 BC 相交于 BC 的外部(延长线上); (3) DE 与 BC 相交于 BC 的内部. 教学时可就第(1)种情形证明, 第(2)、(3)两种可让学生自证.

讲完三垂线定理, 教师可结合教材 p. 27 图 9-39 说明, 对于平面内直线 DE 来说, 三条直线 AB 、 BC 、 AO 都和它垂直, 以加深学生对定理的理解. 关于三垂线定理的逆定理, 教材在习题 9-3 中留给学生自己证明.

三垂线定理及其逆定理是平面的一条斜线和平面内一条直线垂直的判定定理和性质定理. 要使学生对这两个定理能区别清楚. 三垂线定理的条件是“垂直射影”, 结论是“垂直斜线”; 而其逆定理则相反, 条件是“垂直斜线”, 结论是“垂直射影”. 要使学生掌握定理中的逻辑推理, 并能应用定理来解题.

§ 9-4 平面和平面的位置关系

1. 教材通过对长方体的某些平面与平面的位置关系的观察, 使学生了解到空间两个平面可以相交于一条直线, 也可以不相交, 从而给出两个平面互相平行的定义, 并归纳出空间两个不重合的平面只有平行和相交两种位置关系. 教材 p. 32 上的图 9-43 和图 9-44 说明了两个平行平面以及两个相交平面的直观画法.

2. 在讲解平面和平面平行的判定定理及其推论 1 时, 要突出已知条件中的“两条相交直线”. 如果这两条直线不是相交直线, 则结论“两个平面平行”就不一定成立. 如图 9-2 所示, 如果平面 α 内直线 $a \parallel b$, 且 a, b 都平行于平面 β , 可以看出平面 α 和 β 不一定平行; 如果平面 α 内直线 $a \parallel b$, 平面 β 内直线 $c \parallel d$, 且 $a \parallel c, b \parallel d$, 可以看出平面 α 和 β 也不一定平行. 教材 p. 46 习题 9-4 中的第 2 题可让学生回答, 以加深学生对判定定理的理解.

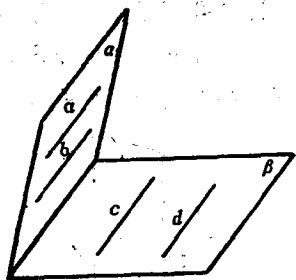


图 9-2

教材(p. 33)采用反证法来证明判定定理. 因为学生对反证法已有所了解, 所以讲解时可让学生回答以下问题:

(1) 在假设平面 α 与平面 β 相交于直线 q 的前提下, 为什么由 $a \parallel \beta, b \parallel \beta$ 可分别推得 $a \parallel q, b \parallel q$? 它们的理论依据是什么?