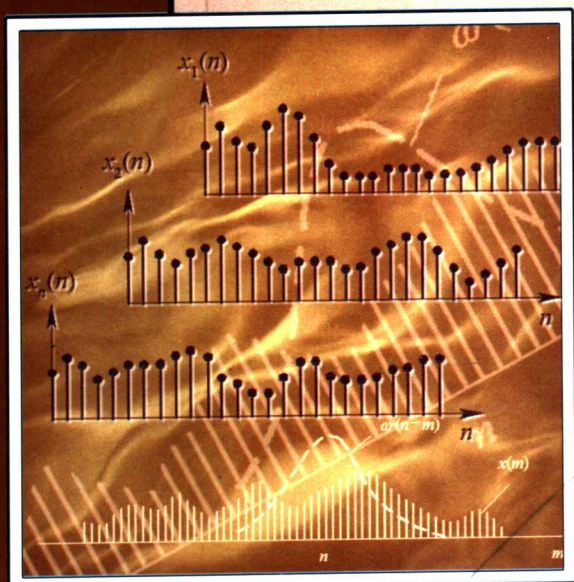




研究生系列教材

数字信号处理

——时域离散随机信号处理



丁玉美
阔永红 编著
高新波

西安电子科技大学出版社
<http://www.xduph.com>

研究生系列教材

TN911.72

150

2002

数字信号处理

——时域离散随机信号处理

丁玉美 阔永红 高新波 编著

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书在本科生学习完确定性数字信号处理的基础上,系统地介绍了时域离散随机信号处理的基本理论与分析方法。全书共分六章。第一章时域离散随机信号的分析是全书的理论基础。第二、三章学习维纳滤波、卡尔曼滤波、自适应滤波等最佳滤波器。第四章学习功率谱分析。第五章学习一种非平稳随机数字信号的分析方法,即时频分析。第六章学习小波分析的基本原理及其应用。本书在阐述基本理论的同时,也介绍了数字信号处理的新的发展内容。

本书作为教材,选材少而精,努力做到深入浅出,说理详细,论述清楚。为帮助读者深入理解书中的基本理论和基本分析方法,书中精选了一定量的例题,各章后附有习题,部分章后还有上机作业。

本书适合作为理工科大学与信号处理有关专业的硕士研究生学位课或选修课的教材或参考书,也适合于教师、博士生和广大科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理——时域离散随机信号处理/丁玉美等编著.

—西安:西安电子科技大学出版社,2002.12

研究生系列教材

ISBN 7-5606-0922-8

I. 数… II. 丁… III. 数字信号——离散信号:随机信号—信号处理—研究生—教材

IV. TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 072885 号

责任编辑 夏大平

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

<http://www.xduph.com> E-mail: xdupfxb@pub.xaonline.com

经 销 新华书店

印刷单位 陕西天意印务有限责任公司

版 次 2002年12月第1版 2006年8月第3次印刷

开 本 787毫米×1092毫米 1/16 印张 16.375

字 数 381千字

印 数 8001~12000册

定 价 22.00元

ISBN 7-5606-0922-8 / TN·0160

XDUP 1193A11-3

*** 如有印装问题可调换 ***

本社图书封面为激光防伪覆膜,谨防盗版。

前 言

本教材系按(原)电子工业部的《1996—2000 全国电子信息类专业教材编审出版规划》，由通信与信息工程专业教材指导委员会编审、推荐出版，属部级重点教材。本教材由西安电子科技大学丁玉美担任主编，清华大学田立生教授主审。

数字信号处理中的离散随机信号处理发展飞速，应用遍及各专业和技术领域，已经突破各应用领域之间的界限，成为普遍的信号处理方法。近几年来，非平稳随机信号分析与处理也发展很快，内容日益丰富。为适应形势发展以及教学要求，作者为硕士研究生进一步学习时域离散随机信号处理的理论与技术而编写了这本研究生教材。

全书共分六章。第一章时域离散随机信号的分析是全书的基础，一些内容和连续随机信号相似，可以用作自学或者复习，重点放在第 3、4、5 节；第二、三章学习最佳滤波，即维纳滤波器、卡尔曼滤波器以及自适应滤波器，其中包括了重要的预测理论，自适应格型数字滤波器，最小二乘法自适应滤波器，自适应滤波应用等；第四章学习功率谱估计，包括经典谱估计和现代谱估计，现代谱估计中重点学习根据模型估计功率谱的基本理论和算法，其中重点是 AR 模型谱估计；第五章学习时频分析，这一章是一种非平稳随机信号的分析处理方法，它内容丰富，且正在发展之中，但限于教材篇幅，只选用了时频分析部分；第六章学习小波变换的基本原理及其应用，这一部分是最近几年迅速发展起来的一个新课题，它能有效地从信号中提取信息，通过伸缩和平移等运算功能对信号进行多尺度分析，而且也为非平稳随机信号处理提供了一种有效的处理工具。限于教材篇幅，本书仅简单介绍基本原理和应用。

本书各章后均有习题，部分章末有上机作业，以帮助读者深入掌握基本理论和技术。

本书教学时数预计为 50~60 学时，如果时数不够，建议重点学习第一、二、三、四章，第五、六章只介绍了基本原理和一些重要概念。

全书由丁玉美主编。第一、四章由丁玉美编写，第二章由阔永红编写，第三章由丁玉美、阔永红编写，第五章由丁玉美、高新波编写，第六章由高新波编写，第一、二、三、四章的习题、上机作业由阔永红编写。

田立生教授对本书进行了详细的审阅，提出了许多宝贵的建议以及重要的指正，作者表示深深的感谢。在全书编写过程中还得到了樊来耀教授的大力支持和帮助。另外，谢维信教授、傅丰林教授等都对本书给予了很大的关怀和支持，在此一并表示感谢。

由于作者水平有限，书中不可避免地有不少缺点和错误，恳请读者批评指正，不胜感激。

此书的出版得到了西安电子科技大学研究生教材建设基金的资助。

编著者

2002 年 4 月

目 录

第一章 时域离散随机信号的分析	1
1.1 引言	1
1.2 时域离散随机信号的统计描述	2
1.2.1 时域离散随机信号(随机序列)的概率描述	2
1.2.2 随机序列的数字特征	3
1.2.3 平稳随机序列及其数字特征	4
1.2.4 平稳随机序列的功率密度谱	5
1.2.5 随机序列的各态历经性	7
1.2.6 特定的随机序列	7
1.2.7 随机信号的采样定理	9
1.3 随机序列数字特征的估计	9
1.3.1 估计准则	10
1.3.2 均值的估计	11
1.3.3 方差的估计	12
1.3.4 随机序列自相关函数的估计	13
1.4 平稳随机序列通过线性系统	16
1.4.1 系统响应的均值、自相关函数和平稳性分析	16
1.4.2 输出响应的功率谱密度函数	17
1.4.3 系统的输入、输出互相关函数	18
1.4.4 相关卷积定理	18
1.5 时间序列信号模型	21
1.5.1 三种时间序列模型	21
1.5.2 三种时间序列信号模型的适应性	22
1.5.3 自相关函数、功率谱与时间序列信号模型的关系	24
习题	27
参考文献	28
第二章 维纳滤波和卡尔曼滤波	29
2.1 引言	29
2.2 维纳滤波器的离散形式——时域解	30
2.2.1 维纳滤波器时域求解的方法	30
2.2.2 维纳-霍夫方程	32
2.2.3 估计误差的均方值	33
2.3 离散维纳滤波器的 z 域解	36
2.3.1 非因果维纳滤波器的求解	38

2.3.2 因果维纳滤波器的求解	40
2.4 维纳预测	43
2.4.1 维纳预测的计算	44
2.4.2 纯预测	45
2.4.3 一步线性预测的时域解	47
2.5 卡尔曼(Kalman)滤波	48
2.5.1 卡尔曼滤波的状态方程和量测方程	49
2.5.2 卡尔曼滤波的递推算法	50
2.5.3 应用举例	56
2.5.4 发散问题及其抑制	59
习题	60
上机作业	61
参考文献	61

第三章 自适应数字滤波器

3.1 引言	63
3.2 自适应横向滤波器	63
3.2.1 自适应线性组合器和自适应 FIR 滤波器	64
3.2.2 性能函数表示式及其几何意义	67
3.2.3 最陡下降法	70
3.2.4 最小均方(LMS)算法	73
3.3 自适应格型滤波器	77
3.3.1 前、后向线性预测误差滤波器	78
3.3.2 格型滤波器	81
3.3.3 最小均方误差自适应格型滤波器	84
3.4 最小二乘自适应滤波	86
3.4.1 最小二乘滤波	87
3.4.2 递推最小二乘法(RLS)	92
3.4.3 线性向量空间	94
3.4.4 最小二乘格型算法(LSL)	100
3.4.5 快速横向滤波算法(FTF 算法)	107
3.5 自适应滤波的应用	118
3.5.1 自适应对消	118
3.5.2 自适应陷波器(NF)	123
3.5.3 自适应逆滤波	126
3.5.4 预测及信号分离	128
习题	130
上机作业	133
参考文献	133

第四章 功率谱估计

4.1 引言	134
4.2 经典谱估计	136

4.2.1	BT 法	136
4.2.2	周期图法	137
4.2.3	经典谱估计方法改进	140
4.3	现代谱估计中的参数建模	144
4.3.1	模型选择	145
4.3.2	模型参数和自相关函数之间的关系	145
4.4	AR 模型谱估计的性质	149
4.4.1	AR 模型的线性预测	149
4.4.2	预测误差滤波器的最小相位特性	150
4.4.3	AR 模型隐含自相关函数延拓特性	151
4.5	AR 谱估计的方法	152
4.5.1	自相关法——列文森(Levenson)递推法	152
4.5.2	协方差法与修正协方差法	153
4.5.3	伯格(Burg)递推法	157
4.5.4	关于 AR 模型阶次的选择	158
4.6	最大熵谱估计与最大似然谱估计	160
4.6.1	最大熵谱估计	161
4.6.2	最大似然谱估计——最小方差谱估计	163
4.7	特征分解法谱估计	165
4.7.1	正弦波用退化 AR 模型表示	165
4.7.2	白噪声中正弦波组组合一特殊的 ARMA 模型表示	166
4.7.3	特征分解法谱估计	167
	习题	169
	上机作业	170
	参考文献	170

第五章 时频分析..... 173

5.1	引言	173
5.2	短时傅里叶变换	174
5.2.1	短时傅里叶变换的定义及其物理解释	174
5.2.2	短时傅里叶变换的性质	176
5.2.3	短时傅里叶变换的时间、频率分辨率	177
5.2.4	短时傅里叶变换的实现	177
5.3	维格纳变换(WD)	182
5.3.1	WD 的定义	183
5.3.2	WD 的性质	183
5.3.3	常用信号的 WD 举例	186
5.3.4	关于二次时频分布中的交叉(干扰)项	188
5.4	时域离散信号的维格纳变换	191
5.4.1	时域离散信号的 WD 定义	192
5.4.2	利用 FFT 计算维格纳分布	192
5.5	时频分布的统一表示式	193
5.5.1	模糊函数及其和 WD 之间的关系	193

5.5.2	Cohen 类时频分布	196
5.5.3	广义双线性时频分布举例	201
5.6	时频分析在编队目标架次检测中的应用	204
5.6.1	编队飞机目标多普勒特性分析	204
5.6.2	编队目标的 Wigner-Ville 分布	205
5.6.3	基于 WVD 图的架次检测方案	206
5.6.4	实验结果及讨论	207
	习题	208
	参考文献	208

第六章	小波分析的基本原理及其应用	210
6.1	引言	210
6.2	连续小波变换	211
6.2.1	从短时傅里叶变换到小波变换	211
6.2.2	连续小波变换	213
6.2.3	连续小波变换的性质	215
6.2.4	小波变换的反演以及对基小波的要求	216
6.2.5	几种常用的基本小波基	218
6.3	离散小波变换	225
6.3.1	框架的概念	226
6.3.2	通过框架对原函数进行重构	227
6.3.3	小波框架	228
6.3.4	多分辨率分析与离散序列的小波变换	230
6.3.5	尺度函数和小波函数的一些重要性质	235
6.4	小波分析的应用	237
6.4.1	小波变换用于表征信号的突变特征	237
6.4.2	小波变换在信号与图像压缩中的应用	239
6.4.3	小波变换在数字信号调制识别中的应用	246
	习题	250
	参考文献	251

第一章 时域离散随机信号的分析

1.1 引言

信号有确定性信号和随机信号之分。所谓确定性信号,就是信号的幅度随时间的变化有一定的规律性,可以用一个明确的数学关系进行描述,是可以再现的。而随机信号随时间的变化没有明确的变化规律,在任何时间的信号大小不能预测,因此不可能用一明确的数学关系进行描述,但是这类信号存在着一定的统计分布规律,它可以用概率密度函数、概率分布函数、数字特征等进行描述。

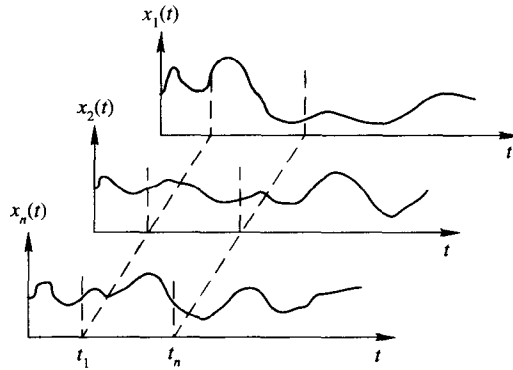
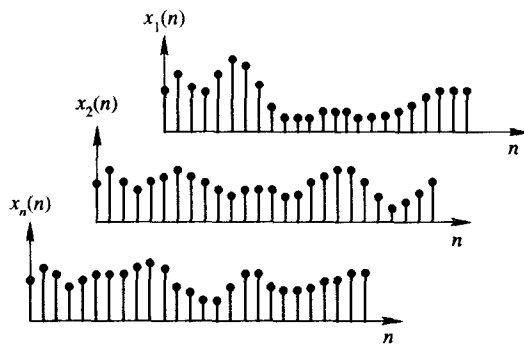
实际中的随机信号常有四种形式:

- (1) 连续随机信号:时间变量和幅度均取连续值的随机信号。
- (2) 时域离散随机信号(简称随机序列):时间变量取离散值,而幅度取连续值的随机信号。
- (3) 幅度离散随机信号:幅度取离散值,而时间变量取连续值的随机信号。例如随机脉冲信号,其取值只有两个电平,不是高电平就是低电平,但高低电平的选取却是随机的。
- (4) 离散随机序列(也称为随机数字信号):幅度和时间变量均取离散值的信号。

利用计算机只能处理随机数字信号。本书中针对时域离散随机信号展开分析与讨论。对于随机数字信号,需要增加量化效应的分析,但随着计算机位数的不断增多,量化效应逐渐不明显;为简单起见,本书中有时也将这种信号简称为随机序列。

随机信号 $X(t)$ 是由它所有可能的样本函数集合而成的,样本函数用 $x_i(t)$, $i=1, 2, 3, \dots$ 表示。例如,图 1.1.1 表示的是 n 部接收机的输出噪声电压,图中 $x_n(t)$ 表示第 n 部接收机的输出噪声,称为第 n 条样本曲线。如果对随机信号 $X(t)$ 进行等间隔采样,或者说将 $X(t)$ 进行时域离散化,得到 $X(t_1), X(t_2), X(t_3), \dots$, 所构成的集合称为时域离散随机信号。用序号 n 取代 t_n , 随机序列用 $X(n)$ 表示。换句话说,随机序列是随 n 变化的随机变量序列。图 1.1.2 表示的就是图 1.1.1 随机信号经过时域离散化形成的随机序列。相应的 $x_i(n)$, $i=1, 2, 3, \dots$, 称为样本序列,它们是 n 的确定性函数。样本序列也可以用 x_n 表示。而 $X(t_1), X(t_2), X(t_3), \dots$ 或者 $X(1), X(2), X(3), \dots$ 则都是随机变量。因此随机序列兼有随机变量和函数的特点。这里要注意, $X(n)$ 与 $x_i(n)$ 分别表示不同的含义($n, i=1, 2, 3, \dots$), 大写字母表示随机序列或者随机变量,小写字母表示样本序列。但在本书以后的章节中,为简单起见,也用小写字母 $x(n)$ 或 x_n 表示随机序列,只要概念清楚,会分清楚何时代表随机序列,何时代表样本函数。

随机序列的描述方法和连续随机信号有许多相似的地方,下面针对随机序列进行介绍。

图 1.1.1 n 部接收机的输出噪声图 1.1.2 n 部接收机输出噪声的时域离散化

1.2 时域离散随机信号的统计描述

1.2.1 时域离散随机信号(随机序列)的概率描述

随机序列和连续随机信号一样,可以用概率密度函数和概率分布函数进行描述。

1. 概率分布函数

对于随机变量 X_n , 其概率分布函数用下式描述:

$$F_{X_n}(x_n, n) = P(X_n \leq x_n) \quad (1.2.1)$$

式中 P 表示概率。

2. 概率密度函数

如果 X_n 取连续值, 其概率密度函数用下式描述:

$$p_{X_n}(x_n, n) = \frac{\partial F_{X_n}(x_n, n)}{\partial x_n} \quad (1.2.2)$$

上面(1.2.1)和(1.2.2)式分别称为随机序列的一维概率分布函数和一维概率密度函

数, 它们只描述随机序列在某一 n 的统计特性。而对于随机序列, 不同 n 的随机变量之间并不是孤立的, 为了更加完整地描述随机序列, 需要了解二维及多维统计特性。

二维概率分布函数:

$$F_{X_n, X_m}(x_n, n, x_m, m) = P(X_n \leq x_n, X_m \leq x_m) \quad (1.2.3)$$

对于连续随机变量, 其二维概率密度函数为

$$p_{X_n, X_m}(x_n, n, x_m, m) = \frac{\partial^2 F_{X_n, X_m}(x_n, n, x_m, m)}{\partial x_n \partial x_m} \quad (1.2.4)$$

以此类推, N 维概率分布函数为

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_N}(x_1, 1, x_2, 2, \dots, x_N) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_N \leq x_N) \quad (1.2.5)$$

对于连续随机变量, 其 N 维概率密度函数为

$$p_{X_1, X_2, \dots, X_N}(x_1, 1, x_2, 2, \dots, x_N, N) = \frac{\partial^N F_{X_1, X_2, \dots, X_N}(x_1, 1, x_2, 2, \dots, x_N, N)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_N} \quad (1.2.6)$$

概率分布函数能对随机序列进行完整的描述, 但实际中往往无法得到它。为此, 引入随机序列的数字特征。在实际中, 这些数字特征比较容易进行测量和计算, 知道这些数字特征也足够用了。常用的数字特征有数学期望、方差和相关函数。下面介绍这些数字特征。

1.2.2 随机序列的数字特征

1. 数学期望(统计平均值)

随机序列的数学期望定义为

$$m_r(n) = E[x(n)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(n) p_x(x, n) dx \quad (1.2.7)$$

式中 E 表示求统计平均值。由上式可见, 数学期望是 n 的函数, 如果随机序列是平稳的, 则数学期望是常数, 与 n 无关。

2. 均方值与方差

随机序列均方值定义为

$$E[|X_n|^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 p_x(x, n) dx \quad (1.2.8)$$

随机序列的方差定义为

$$\sigma_r^2(n) = E[|X_n - m_r(n)|^2] \quad (1.2.9)$$

可以证明, 上式也可以写成下式:

$$\sigma_r^2(n) = E[|X_n|^2] - m_r^2(n) \quad (1.2.10)$$

一般均方值和方差都是 n 的函数, 但对于平稳随机序列, 它们与 n 无关, 是常数。如果随机变量 X_n 代表电压或电流, 其均方值表示在 n 时刻消耗在 1Ω 电阻上的集合平均功率, 方差则表示消耗在 1Ω 电阻上的交变功率的集合平均。有时将 σ_r 称为标准方差。

3. 随机序列的相关函数和协方差函数

我们知道, 在随机序列不同时刻的状态之间, 存在着关联性, 或者说不同时刻的状态

之间互相有影响,包括随机序列本身或者不同随机序列之间。这一特性常用自相关函数和互相关函数进行描述。

自相关函数定义为

$$r_{xx}(n, m) = E[X_n^* X_m] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_n^* x_m p_{X_n, X_m}(x_n, n, x_m, m) dx_n dx_m \quad (1.2.11)$$

自协方差函数定义为

$$\text{cov}(X_n, X_m) = E[(X_n - m_{X_n})^* (X_m - m_{X_m})] \quad (1.2.12)$$

式中的“*”表示复共轭。上式也可以写成

$$\text{cov}(X_n, X_m) = r_{xx}(n, m) - m_{X_n}^* m_{X_m} \quad (1.2.13)$$

对于零均值随机序列, $m_{X_n} = m_{X_m} = 0$, 则

$$\text{cov}(X_n, X_m) = r_{xx}(n, m)$$

这种情况下,自相关函数和自协方差函数没有什么区别。

对于两个不同的随机序列之间的关联性,我们用互相关函数和互协方差函数描述。

互相关函数的定义为

$$r_{xy}(n, m) = E[X_n^* Y_m] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_n^* y_m p_{X_n, Y_m}(x_n, n, y_m, m) dx_n dy_m \quad (1.2.14)$$

式中 $p_{X_n, Y_m}(x_n, n, y_m, m)$ 表示 X_n 和 Y_m 的联合概率密度。

互协方差函数定义为

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_n, Y_m) &= E[(X_n - m_{X_n})^* (Y_m - m_{Y_m})] \\ &= r_{xy}(n, m) - m_{X_n}^* m_{Y_m} \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

同样,当 $m_{X_n} = m_{Y_m} = 0$ 时,

$$\text{cov}(X_n, Y_m) = r_{xy}(n, m)$$

1.2.3 平稳随机序列及其数字特征

在信息处理与传输中,经常遇到一类称为平稳随机序列的重要信号。所谓平稳随机序列,是指它的 N 维概率分布函数或 N 维概率密度函数与时间 n 的起始位置无关。换句话说,平稳随机序列的统计特性不随时间的平移而发生变化。如果将随机序列在时间上平移 k , 其统计特性满足下式:

$$\begin{aligned} F_{X_{1-k}, X_{2-k}, \dots, X_{N+k}}(x_{1-k}, 1+k, x_{2-k}, 2+k, \dots, x_{N+k}, N+k) \\ = F_{X_1, X_2, \dots, X_N}(x_1, 1, x_2, 2, \dots, x_N, N) \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

这类随机序列就称为平稳随机序列。经常将上面这类随机序列称为狭义(严)平稳随机序列,这一严平稳的条件在实际情况下很难满足。许多随机序列不是平稳随机序列,但是它们的均值和均方差却不随时间而改变,其相关函数仅是时间差的函数。一般将这一类随机序列称为广义(宽)平稳随机序列。下面我们重点分析研究这类平稳随机序列。为简单起见,将广义平稳随机序列简称为平稳随机序列。

平稳随机序列的一维概率密度函数与时间无关,因此均值、方差和均方值均与时间无关,它们可分别用下式表示:

$$m_x = E[x(n)] = E[x(n+m)] \quad (1.2.17)$$

$$E[|X_n|^2] = E[|X_{n+m}|^2] \quad (1.2.18)$$

$$\sigma_x^2 = E[|x_n - m_x|^2] = E[|x_{n+m} - m_x|^2] \quad (1.2.19)$$

二维概率密度函数仅决定于时间差,与起始时间无关;自相关函数与自协方差函数是时间差的函数。自相关函数 $r_{xx}(m)$ 与自协方差函数 $\text{cov}_{xx}(m)$ 分别用下式表示:

$$r_{xx}(m) = E[X_n^* X_{n+m}] \quad (1.2.20)$$

$$\text{cov}_{xx}(m) = E[(X_n - m_x)^*(X_{n+m} - m_x)] \quad (1.2.21)$$

对于两个各自平稳且联合平稳的随机序列,其互相关函数为

$$r_{xy}(m) = r_{xy}(n, n+m) = E[X_n^* Y_{n+m}] \quad (1.2.22)$$

显然,对于自相关函数和互相关函数,下面公式成立:

$$r_{xx}^*(m) = r_{xx}(-m) \quad (1.2.23)$$

$$r_{xy}^*(m) = r_{yx}(-m) \quad (1.2.24)$$

如果对于所有的 m , 满足公式: $r_{xy}(m) = 0$, 则称两个随机序列互为正交。如果对于所有的 m , 满足公式: $r_{xy}(m) = m_x m_y$, $\text{cov}_{xy}(m) = 0$, 则称两个随机序列互不相关。

实平稳随机序列的相关函数、协方差函数具有以下重要性质:

(1) 自相关函数和自协方差函数是 m 的偶函数,用下式表示:

$$r_{xx}(m) = r_{xx}(-m), \text{cov}_{xx}(m) = \text{cov}_{xx}(-m) \quad (1.2.25)$$

$$r_{xy}(m) = r_{yx}(-m), \text{cov}_{xy}(m) = \text{cov}_{yx}(-m) \quad (1.2.26)$$

$$(2) \quad r_{xx}(0) = E[X_n^2] \quad (1.2.27)$$

$r_{xx}(0)$ 数值上等于随机序列的平均功率。

$$(3) \quad r_{xx}(0) \geq |r_{xx}(m)| \quad (1.2.28)$$

$$(4) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} r_{xx}(m) = m_x^2 \quad (1.2.29)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_{xy}(m) = m_x m_y \quad (1.2.30)$$

上式说明大多数平稳随机序列内部的相关性随着时间差的变大,愈来愈弱。

$$(5) \quad \text{cov}_{xx}(m) = r_{xx}(m) - m_x^2, \quad \text{cov}_{xx}(0) = \sigma_x^2 \quad (1.2.31)$$

注释:关于平稳随机序列相关函数的三种定义:

$$\textcircled{1} \quad r_{xx}(m) = E[x(n)x^*(n+m)], \quad r_{xy}(m) = E[x(n)y^*(n+m)]$$

$$\textcircled{2} \quad r'_{xx}(m) = E[x(n)x^*(n-m)], \quad r'_{xy}(m) = E[x(n)y^*(n-m)]$$

$$\textcircled{3} \quad r''_{xx}(m) = E[x^*(n)x(n+m)], \quad r''_{xy}(m) = E[x^*(n)y(n+m)]$$

三种定义之间的关系为

$$r_{xx}(m) = r'_{xx}(-m) = r''_{xx}(-m), \quad r_{xy}(m) = r'_{xy}(-m) = r''_{yx}(-m)$$

对于实平稳随机序列,三种定义的自相关函数是一样的,自相关函数与互相关函数如下式:

$$r_{xx}(m) = r'_{xx}(m) = r''_{xx}(m), \quad r_{xy}(m) = r'_{yx}(m) = r''_{xy}(m)$$

本书采用第三种定义方法。

1.2.4 平稳随机序列的功率密度谱

我们知道,平稳随机序列是非周期函数,且是能量无限信号,无法直接利用傅里叶变换进行分析。但自相关函数也是非周期序列,却随着时间差 m 的增大,而趋近于随机序列

的均值。如果随机序列的均值为 0, 即 $m_x=0$, $r_{xx}(m)$ 是收敛序列, 其 Z 变换用 $P_{xx}(z)$ 表示如下:

$$P_{xx}(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(m) z^{-m} \quad (1.2.32)$$

且
$$r_{xx}(m) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c P_{xx}(z) z^{m-1} dz \quad (1.2.33)$$

将(1.2.33)式进行 Z 变换, 得到:

$$P_{xx}(z) = P_{xx}^* \left(\frac{1}{z^*} \right) \quad (1.2.34)$$

如果 z_1 是其极点, $1/z_1^*$ 也是极点。如果 z_1 在单位圆内, $(z_1^{-1})^*$ 必须在单位圆外, 收敛域一定包含单位圆, $P_{xx}(z)$ 的收敛域有以下形式:

$$R_u < |z| < R_u^{-1} \quad 0 \leq R_u \leq 1$$

类似地, 互相关函数的 Z 变换用 $P_{xy}(z)$ 表示, 有

$$P_{xy}(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} r_{xy}(m) z^{-m} \quad (1.2.35)$$

$$P_{xy}(z) = P_{yx}^* \left(\frac{1}{z^*} \right) \quad (1.2.36)$$

由于 $P_{xx}(z)$ 的收敛域包含单位圆, 因此 $r_{xx}(m)$ 的傅里叶变换存在。令 $z = \exp(j\omega)$, 代入(1.2.32)式, 有

$$P_{xx}(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(m) e^{-j\omega m} \quad (1.2.37)$$

$$r_{xx}(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(e^{j\omega}) e^{j\omega m} d\omega \quad (1.2.38)$$

将 $m=0$ 代入上式, 得到

$$r_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(e^{j\omega}) d\omega \quad (1.2.39)$$

按照(1.2.27)式, $r_{xx}(0)$ 就等于随机序列的平均功率, 因此将 $P_{xx}(e^{j\omega})$ 称为功率谱密度, 或者简称为功率谱。(1.2.37)、(1.2.38)式表示的一对傅里叶变换式称为维纳—辛钦定理。

对于实、平稳随机序列功率谱, 有以下性质:

(1) 功率谱是 ω 的偶函数:

$$P_{xx}(\omega) = P_{xx}(-\omega) \quad (1.2.40)$$

功率谱是 ω 的偶函数这一结果, 可直接由自相关函数是时间差的偶函数证明。由于功率谱和自相关函数都是实、偶函数, 它们还可以表示为

$$P_{xx}(e^{j\omega}) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} r_{xx}(m) \cos(\omega m) \quad (1.2.41)$$

$$r_{xx}(m) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} P_{xx}(e^{j\omega}) \cos(\omega m) d\omega \quad (1.2.42)$$

(2) 功率谱是实的非负函数, 即

$$P_{xx}(\omega) \geq 0$$

性质(2)的证明见下节。类似地, 对于互功率谱, 有

$$P_{xy}(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xy}(m)e^{-j\omega m} \quad (1.2.43)$$

$$r_{xy}(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{xy}(\omega)e^{j\omega m} d\omega \quad (1.2.44)$$

$$P_{xy}(\omega) = P_{yx}(-\omega) \quad (1.2.45)$$

1.2.5 随机序列的各态历经性

我们知道集合平均要求对大量的样本进行平均, 实际中这种做法是不现实的。在很多情况下, 可以用一条样本曲线描述随机序列, 因此可以用样本曲线进行测量和分析。

设 $x(n)$ 是平稳随机序列 $X(n)$ 的一条样本曲线, 其时间平均值为

$$\langle x(n) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n) \quad (1.2.46)$$

类似地, 其时间自相关函数为

$$\langle x^*(n)x(n+m) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x^*(n)x(n+m) \quad (1.2.47)$$

式中 $\langle \cdot \rangle$ 表示时间平均算子。如果平稳随机序列的集合平均值与集合自相关函数值依概率趋于平稳随机序列样本函数的时间平均值与时间自相关函数, 即满足下面两式:

$$\langle x(n) \rangle = m_x = E[X(n)] \quad (1.2.48)$$

$$\langle x^*(n)x(n+m) \rangle = r_{xx}(m) = E[X^*(n)X(n+m)] \quad (1.2.49)$$

则称该平稳随机序列具有各态历经性。平稳随机序列虽有各态历经性的和非各态历经性的两种, 但在实际中遇到的平稳随机序列, 一般都是各态历经性的。这样我们用研究平稳随机序列的一条样本曲线代替研究其集合, 用时间平均代替集合平均, 这给研究平稳随机序列带来很大的方便。

1.2.6 特定的随机序列

在研究与分析中经常会遇到三种特定的随机序列, 下面分别进行介绍。

1. 正态(高斯)随机序列

正态随机序列 $x(n)$ 的 N 维联合概率密度函数用下式表示:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} |\text{var}\mathbf{X}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{X} - \mathbf{M})^T (\text{var}\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{M})\right] \quad (1.2.50)$$

式中

$$\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$$

$$\mathbf{M} = [m_1, m_2, \dots, m_N]^T$$

$$\text{var}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1 x_2} & \cdots & \sigma_{x_1 x_N} \\ \sigma_{x_2 x_1} & \sigma_{x_2}^2 & \cdots & \sigma_{x_2 x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{x_N x_1} & \sigma_{x_N x_2} & \cdots & \sigma_{x_N}^2 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{x_n}^2 = E[(x_n - m_{x_n})^2]$$

$$\sigma_{x_n x_m} = \text{cov}(x_n, x_m) = E[(x_n - m_{x_n})^*(x_m - m_{x_m})]$$

上面公式表明, 正态(高斯)随机序列仅决定于其均值矢量 \mathbf{M} 以及方差阵 $\text{var}\mathbf{X}$ 。具有指数型自相关函数的平稳高斯过程称为高斯-马尔可夫过程。这种信号的自相关函数和谱密度函数为

$$R_X(m) = \sigma^2 e^{-\beta|m|} \quad (1.2.51)$$

$$P_{xx}(e^{j\omega}) = \frac{2\sigma^2\beta}{\omega^2 + \beta^2} \quad (1.2.52)$$

高斯-马尔可夫也是一种常见的随机信号, 适合于大多数物理过程, 具有较好的精确性, 数学描述简单。因为当 $m \rightarrow \infty$ 时, 自相关函数趋近于 0, 所以均值为 0, 过程的自相关函数特性完全描述了过程的特性。

2. 白噪声序列

如果随机序列 $x(n)$, 其随机变量是两两不相关的, 即

$$\text{cov}(x_n, x_m) = \sigma_x^2 \delta_{mn} \quad (1.2.53)$$

式中

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

则称该序列为白噪声序列; 如果白噪声序列是平稳的, 则

$$\text{cov}(x_n, x_m) = \sigma^2 \delta_{mn} \quad (1.2.54)$$

式中, σ^2 是常数。设均值 $m_{x_n} = m = 0$, 其功率谱 $P_{xx}(e^{j\omega}) = \sigma^2$, 在整个频带上功率谱是一个常数。如果白噪声序列服从正态分布, 序列中随机变量的两两不相关性就是相互独立性, 称为正态白噪声序列。显然, 白噪声是随机性最强的随机序列, 实际中不存在, 是一种理想白噪声, 一般只要信号的带宽大于系统的带宽, 且在系统的带宽中信号的频谱基本恒定, 便可以把信号看作白噪声。注意: 正态和白色是两种不同的概念, 前者是指信号取值的规律服从正态分布, 后者指信号不同时刻取值的关联性。

3. 谐波过程

谐波过程用下式描述:

$$x(n) = \sum_{i=1}^N A_i \cos(\omega_i n + \theta_i) \quad (1.2.55)$$

式中, A_i 和 $\omega_i (i=1, 2, 3, \dots, N)$ 是常数, $\theta_i (i=1, 2, 3, \dots, N)$ 是服从均匀分布的独立随机变量, 其概率密度用下式表示:

$$p(\theta_i) = \frac{1}{2\pi} \quad -\pi < \theta_i \leq \pi \quad (1.2.56)$$

也可以将(1.2.55)式写成下式:

$$x(n) = \sum_{i=1}^N (A'_i \cos(\omega_i n) + B'_i \sin(\omega_i n)) \quad (1.2.57)$$

式中

$$A'_i = A_i \cos\theta_i, \quad B'_i = A_i \sin\theta_i \quad (1.2.58)$$

可以证明, 这种谐波信号模型是平稳的, 设 $N=1$, 计算它的统计平均值和自相关函数:

$$x(n) = A \cos(\omega n + \theta) \quad (1.2.59)$$

$$E[x(n)] = \frac{A}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega n + \theta) d\theta = 0 \quad (1.2.60)$$

$$\begin{aligned} r_{xx}(n, n+m) &= E[x(n)x(n+m)] \\ &= \frac{A^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega n + \theta) \cos(\omega(n+m) + \theta) d\theta \\ &= \frac{A^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{\cos[(2\omega n + \omega m) + 2\theta] + \cos(\omega m)\} d\theta \end{aligned}$$

上式中第一项积分为 0, 因此

$$r_{xx}(n, n+m) = \frac{1}{2} A^2 \cos(\omega m) \quad (1.2.61)$$

由于谐波过程的统计平均值与时间 n 无关, 自相关函数仅与时间差 m 有关, 谐波过程是平稳的。

当 N 大于 1 时, 也有同样的结论, 可以证明:

$$\left. \begin{aligned} E[x(n)] &= 0 \\ r_{xx}(m) &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} A_i^2 \cos(\omega_i m) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.62)$$

1.2.7 随机信号的采样定理

我们已经学习了确定性信号的采样定理, 为了不丢失信息, 换句话说, 能够由时域离散信号准确地恢复原模拟信号, 要求采样频率必须大于等于信号最高频率的两倍以上。对于平稳随机信号的采样也有类似的结果。

对于平稳随机信号, 如果其功率谱严格限制在某一有限频带内, 该随机信号称为带限随机信号。如果平稳随机信号 $X(t)$ 的功率谱 $P_{xx}(\Omega)$ 满足下式:

$$P_{xx}(\Omega) = 0 \quad |\Omega| \geq \Omega_c$$

则称 $X(t)$ 为低通性带限随机信号, 式中 Ω_c 表示功率谱的最高截止频率。

设以采样间隔 T 对平稳随机信号 $X(t)$ 进行采样, 采样后随机序列为 $X(n)$, 只要采样频率 f_s 满足:

$$\Omega_s = 2\pi f_s \geq 2\Omega_c \quad \text{或者} \quad T \leq \frac{1}{2f_c} = \frac{\pi}{\Omega_c} \quad (1.2.63)$$

则有以下采样插值公式:

$$\hat{X}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT) \frac{\sin \Omega_c(t - nT)}{\Omega_c(t - nT)} \quad (1.2.64)$$

可以证明, 在均方意义上, $X(t)$ 等于 $\hat{X}(t)[1]$, 即

$$E[|X(t) - \hat{X}(t)|^2] = 0 \quad (1.2.65)$$

1.3 随机序列数字特征的估计

这一节讨论如何根据实际取得的一组样本数据来估计随机序列的均值、方差和自相关函数。随机序列的功率谱密度估计专门用一章进行分析研究。下面先叙述估计准则。