



Classical
Authoritative

Magical

红魔数学



MAGICAL MATHEMATICS

主编 易小平 邓璐娥

紧跟新教材.紧扣新课标.紧盯新考标
适合使用各种版本教材的学生

数学

Basic knowledge of Mathematics

基础知识必备

★高中★

国防科技大学出版社

有知识的地方
就有红魔

初中数学基础知识必备

Basic knowledge of Mathematics



定价: 19.80元

高中数学基础知识必备

Basic knowledge of Mathematics



定价: 19.80元



www.redmagical.com



www.wj100.com



封面设计: 周纯

前言

任何学科都有自己的规律,学习的基本途径就是要掌握这些规律。数学是研究空间形式和数量关系的科学,是刻画自然规律和社会规律的科学语言和有效工具。“数学的全部力量就在于直觉和严格性巧妙地结合在一起。受控制的精神和富有灵感的逻辑正是数学的魅力所在,也是数学教育者努力的方向。”

为了帮助同学们更好的学习数学,我们特组织部分资深的专家和教学一线的骨干教师编写了《红魔数学·高中数学基础知识必备》(以下简称《必备》)。本书力求将目标、知识、方法与应用融为一体,使学生通过“课标—知识网络—基本概念—典型例题—思想方法—解题规律”的学习过程,实现由知识向能力的转化。《必备》内容全面、系统、深入、实用,能有效弥补新教材的不足,避免了重复、枯燥的习题训练,传输给学生更多的策略与方法。它如同餐后的甜点,虽不能替代教材这道主菜,却能以其独特的口味、多样的风格,让更多的孩子在神奇的数学王国里流连忘返,而不是在题海里挣扎沉浮。

本书将努力体现以下特色:

1.通用性 本书以《课标》、《考纲》为指导,以现行人教版最新教材(A)版为依据,按教材编排顺序逐章展开,兼顾并插入其他版本教材内容。编写中努力渗透教师集体智慧和教学经验,结合近年来全国及各地中、高考考情,从教学改革的实际出发,因而具有普遍性和实用性。

2.新颖性 本书注重思想方法的点拨,力求正确处理好课标、教材和学生的关系,着眼于学生的长远发展。力求更新对数学基础知识和基本技能的认识,侧重从实例中培养学生的理性认识和创新精神,提高学生发现和提出、探索和解决问题的能力。

3.基础性 本书在编写中,注意结合新课标,从学生同步复习的实际出发,夯实基础。以生动的形式、充实的内容,精选例题,全方位、多角度地讲解知识点,帮助读者用最短时间,学会最基本、最实用的知识,进而迅速全面地掌握本阶段学习的基本内容,全面提高学生学习



数学的兴趣和解题能力。

4. 高效性 本书着重突出知识整合,在条分缕析的知识阐述基础上努力进行总结和归纳,精心构建知识网络。通过清晰的条理、分明的层次,切实让学生看到零散知识和试题背后的知识网络,帮助学生把书读薄,掌握知识体系的内在脉络,大幅度提高综合能力。

本书的栏目设置如下:

明确课标要求 以章为单位,分解并简说新课标提出的基本要求。

构建知识网络 以章为单位,归纳要点,理清脉络,连知识网络。

感知基本概念 以节为单位,展示本节的基本知识,明确基本概念。

解析典型例题 从方法论的高度整合本节内容,提炼隐含于问题中的通性通法,分条陈述,并用经典的、新颖的、能反映中、高考数学命题改革方向的例题予以说明。

点拨思想方法 对例题和仿真练习考查的要点、重点给予归纳,使考查目的明确化。对各个问题的切入方法、突破技巧,从数学思想和解题策略的高度,给予启发式的引导,使之豁然开朗、茅塞顿开。

提炼解题规律 对本章的知识、解题以及在高考中的规律进行归纳总结,通过新颖、精彩的点评,使读者形成正确的解题思路,把握解题技巧,快速提升数学思维思想和解题能力。

亲爱的读者朋友们,《必备》内容充实厚重,不仅是学生学习的工具,还可作为教师的教学参考书。在这里,你定能找到新课标设置的坐标,领悟到数学学习的真谛。为体现内容的典型性,书中部分例题引自他人著作,在此表示衷心的感谢。由于我们水平有限,书中若有不尽如意的地方,敬请广大读者指点斧正。



目 录

第一章	集合与简易逻辑	1
1.1	集 合	2
1.2	子集 全集 补集	5
1.3	交集 并集	8
1.4	含绝对值的不等式的解法	10
1.5	一元二次不等式的解法	12
1.6	逻辑联结词	14
1.7	四种命题	16
1.8	充分条件与必要条件	18
第二章	函 数	20
2.1	函 数	21
2.2	函数的表示法	25
2.3	函数的单调性	29
2.4	反函数	33
2.5	指 数	35
2.6	指数函数	38
2.7	对 数	42
2.8	对数函数	45
2.9	函数的应用举例	49
第三章	数 列	52
3.1	数 列	53
3.2	等差数列	57
3.3	等比数列	62
第四章	三角函数	67
4.1	角的概念的推广	68

4.2	弧度制	71
4.3	任意角的三角函数	75
4.4	同角三角函数的基本关系	79
4.5	正弦、余弦的诱导公式	82
4.6	两角和与差的正弦、余弦、正切	86
4.7	二倍角的正弦、余弦、正切	90
4.8	正弦函数、余弦函数的图像和性质	94
4.9	函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像	98
4.10	正切函数的图像和性质	102
4.11	已知三角函数值求角	105
第五章	平面向量	108
5.1	向 量	109
5.2	向量的加法与减法	112
5.3	实数与向量的积	115
5.4	平面向量的坐标表示	118
5.5	线段的定比分点	120
5.6	平面向量的数量积及运算律	124
5.7	平面向量数量积的坐标表示	127
5.8	平 移	130
5.9	正弦定理 余弦定理	133
5.10	解斜三角形应用举例	136
5.11	研究性学习问题:向量在物理中的应用	138
第六章	不等式	141
6.1	不等式的性质	142
6.2	算术平均数与几何平均数	146
6.3	不等式的证明	152
6.4	不等式的解法	159
6.5	含绝对值的不等式	166
第七章	直线和圆的方程	169

7.1	直线的方程	170
7.2	两条直线的位置关系	175
7.3	简单的线性规划	181
7.4	曲线和方程	185
7.5	圆的方程	189
第八章	圆锥曲线方程	195
8.1	椭圆	196
8.2	双曲线	204
8.3	抛物线	209
第九章	直线 平面 简单几何体	216
9.1	平面	218
9.2	空间直线	222
9.3	直线与平面平行的判定和性质	225
9.4	直线与平面垂直的判定和性质	228
9.5	两个平面平行的判定和性质	232
9.6	两个平面垂直的判定和性质	234
9.7	棱柱	239
9.8	棱锥	243
9.9	欧拉公式 球	248
9.10	空间向量	252
第十章	排列、组合和二项式定理	260
10.1	分类计数原理与分步计数原理	260
10.2	排列	263
10.3	组合	267
10.4	二项式定理	271
第十一章	概率与数理统计	275
11.1	随机事件的概率	276
11.2	互斥事件有一个发生的概率	279
11.3	相互独立事件同时发生的概率	282

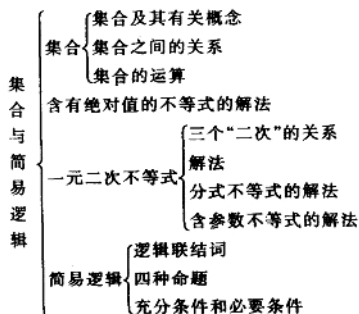
11.4	离散型随机变量的分布列	286
11.5	离散型随机变量的期望和方差	290
11.6	统计	296
第十二章	极 限	308
12.1	数学归纳法	309
12.2	数列的极限及运算法则	315
12.3	函数的极限及运算法则	323
12.4	函数的连续性	329
第十三章	导 数	335
13.1	导数的概念	336
13.2	导数的运算(文科)	340
13.3	导数的运算(理科)	342
13.4	导数的应用	345
第十四章	复 数	350
14.1	复数的概念及运算	351
14.2	复数的向量表示	358
第十五章	数学建模	363
15.1	数学建模的基本概念及要求	364
15.2	数学建模的分类	369

第一章 集合与简易逻辑

明确课标要求

1. 理解集合、子集、补集、交集、并集的概念;了解属于、包含、相等关系的意义.
2. 掌握有关的术语和符号,并会用它们正确表示一些简单的集合.
3. 理解逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义;理解四种命题及其相互关系.
4. 学会运用数形结合、分类讨论的思想方法分析和解决有关集合的问题,形成良好的思维习惯.

构建知识网络





1.1 集合



感知基本概念

◆ 元素与集合的关系

某些特定的对象集在一起就成为一个集合(简称集),特定的对象就是集合的元素.

如果 a 是集合 A 的元素,记作 $a \in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,记作 $a \notin A$.

$a \in A$ 与 $a \notin A$ 这两种情况有且只有一种成立.

◆ 集合的特征

(1)确定性:任何一个对象都能确定它是否是某一给定集合的元素,如: $4 \in \mathbf{R}$; $3.5 \notin \mathbf{Z}$.

另外,一个集合的元素必须具有确定的意义,不能模棱两可.如“中国的高山”、“世界上的大河”,都不能构成集合.

(2)互异性:一个给定集合所含的任意两个元素都是不同的,相同的元素是同一集合的元素时,都看作是同一个.如:方程 $(x-1)^2=0$ 的解集只能为 $\{1\}$,而不是 $\{1,1\}$.

(3)无序性:在一个集合里不考虑元素之间的顺序.如 $\{5,7,10\}=\{7,5,10\}=\{10,5,7\}$.

◆ 集合的表示法

(1)列举法:把集合中的元素一一列举出来,写在大括号内加以表示的方法.

其特点是元素表示完整、清楚.如:方程 $(x-2)(x-3)=0$ 的解集为 $\{2,3\}$.但并不是任何集合都可以用这种方法表示.

(2)描述法:把集合中的公共属性描述出来,写在大括号内来表示集合的方法,即用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合,一般格式为: $\{x \in A \mid p(x)\}$, x 表示集合的元素, A 表示 x 的取值范围, $p(x)$ 表示元素应满足的关系.如方程 $x^2-1=0$ 的解,可表示为 $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2-1=0\}$.如果 x 的取值范围 A 是明确的,可把 A 省去,如上述集合又可写成 $\{x \mid x^2-1=0, x \in \mathbf{R}\}$ 或 $\{x \mid x^2-1=0, x \in \mathbf{R}\}$,有时也可写成 $\{x \mid x^2-1=0\}$ 或 $\{x \mid x^2-1=0\}$.

(3)韦恩图:用一条封闭的曲线来表示集合.

◆ 集合的分类

根据集合中元素的多少,集合可分为:有限集、无限集和空集.元素的个数有限,称为有限集;元素的个数无限,称为无限集;一个集合不含任何元素,称为空集.

◆ 常见数集的表示法

$\mathbf{N}$:非负整数集(或自然数集); $\mathbf{N}^+$:正整数集; $\mathbf{Q}$:有理数集; $\mathbf{R}$:实数集.



解析典型例题

例 ▶ 判断下列说法是否正确,并说明理由.

- (1)某中学高一(1)班高个子的学生组成一个集合;
- (2)集合 $\{1, \frac{3}{2}, 2, 2.5, 1.5\}$ 含有 5 个元素;
- (3)某中学高一(2)班身高大于 1.60 米的学生组成集合;
- (4) $\{1, 2, 3\} \neq \{2, 3, 1\}$.

分析 此题是关于集合的概念和性质的典型题,从集合的三个特征入手.

- 解 (1)错.因为集合中的每个对象都是确定的,而“高个子”是一个模糊的不确定的标准,因此(1)是错误的.
- (2)错.对于一个给定的集合,它的元素必须是互异的,即集合中的任何两个元素都应该是不同的,所以这不是正确的表示集合的方法.
- (3)对.完全符合集合的特征.
- (4)错.集合具有无序性,即集合中的元素是不排序的.

点评 判断某组对象是否为集合,必须同时满足三个特征,缺一不可.

例 ▶ 分别用列举法和描述法表示下列集合.

- (1)方程 $x^2-1=0$ 的解集;
- (2)所有内角和大于 180° 的三角形组成的集合;
- (3)大于 10 的自然数组成的集合.

分析 准确地把握集合的表示方法是初学者的难点,因此学习中要掌握好其要点,列举法就是将集合中的元素不重复、不记次序、不遗漏的列出来;用描述法表示一个集合,关键是找准集合元素的公共属性,既要为每一个元素共有,又要不为集合外元素所具有.

- 解 (1)列举法表示 $\{1, -1\}$;描述法表示 $\{x | x^2-1=0\}$.
- (2)列举法表示 $\emptyset$;描述法表示 $\{\text{内角和大于 } 180^\circ \text{ 的三角形}\}$.
- (3)列举法表示 $\{11, 12, 13, \dots\}$;描述法表示 $\{x | x > 10 \text{ 且 } x \in \mathbb{N}\}$.

点评 数学语言的转换是数学解题的重要方法之一,数学中的符号语言、文字语言以及图形语言的相互转换,值得重视.描述法表示集合时,语言要准确、元素的范围要确定、联结词的运用要恰当.

例 ▶ 下列命题中真命题是()

- ① $0 \in \emptyset$ ② $\emptyset \in \{\emptyset\}$ ③ $0 \in \{0\}$ ④ $\emptyset \in [a]$



高中数学基础知识必备

分析 理解元素与集合的关系.

解答 ①错, 因为 $\emptyset$ 中不包含任何元素.

②正确, 因为 $\{\emptyset\}$ 是由空集作为元素组成的一个集合.

③正确, 与②同理.

④不正确, 因为 $\in$ 是表示元素与集合之间的关系.

点评 要判断一个元素是否在某个集合中, 关键在于弄清这个集合是由哪些元素所组成的.

例 已知集合 $A = \{x | ax^2 + 2x + 1 = 0, a \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}\}$

(1) 若 A 中只有一个元素, 求 a 的值, 并求这个集合;

(2) 若 A 中至多具有一个元素, 求 a 的取值范围.

分析 A 表示的是方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 的解集, 方程根的个数须对方程中的待定系数 a 进行讨论.

解答 (1) 当 $a = 0$ 时, 方程 $2x + 1 = 0$ 只有一根 $x = -\frac{1}{2}$;

当 $a \neq 0$ 且 $4 - 4a = 0$ 时, 即 $a = 1$, 此时 $x_1 = x_2 = 1$.

所以, 当 $a = 0$ 或 $a = 1$ 时, A 中只有一个元素分别为 $-\frac{1}{2}$ 或 1 .

(2) A 中至多有一元素的情况包含两类: A 中有一个元素和 A 是空集.

当 A 是空集时, 有 $\begin{cases} a \neq 0, \\ \Delta = 4 - 4a < 0. \end{cases}$ 解得 $a > 1$.

综合(1)知, 当 $a = 0$ 或 $a \geq 1$ 时, A 中至多有一个元素.

点评 不要忽视“ $a = 0$ ”的情况. $a = 0$, 原方程是一元一次方程; $a \neq 0$, 原方程是一元二次方程. 分类讨论的标准要明确.

例 a, b 是实数, 集合 $A = \left\{a, \frac{b}{a}, 1\right\}$, $B = \{a^2, a + b, 0\}$, 若 $A = B$, 求 $a^{2004} + b^{2005}$.

分析 此题为常见的“年号题”, 考查集合的互异性.

解答 已知 $A = B$, 由 A 中元素知 $a \neq 0$ 且 $a \neq 1$,

$$\therefore \frac{b}{a} = 0, a^2 = 1. \therefore b = 0, a = -1.$$

$$\therefore a^{2004} + b^{2005} = 1.$$

点评 本题考查集合相等的定义和集合元素的三要素. 从集合元素 0 入手是解题的关键, 如果不注意特殊元素 0 , 需转化为方程组求解, 比较繁琐.



1.2 子集 全集 补集



感知基本概念

◆ 子集的概念

一般地,对于两个集合 A 与 B ,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,我们就说集合 A 是集合 B 的子集,也就是说,如果由任一元素 $x \in A$,可以推出 $x \in B$,那么集合 A 就是集合 B 的子集,记作 $A \subseteq B$.

若 $A \subseteq B$,而集合 B 中至少有一个元素不在集合 A 中,我们则说集合 A 是集合 B 的真子集,记作 $A \subsetneq B$.用图形表示,如图 1-1.

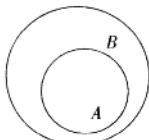


图 1-1

◆ 集合的包含、相等关系的意义

对于集合 A, B ,集合 A 是集合 B 的一部分,我们就说集合 B 包含集合 A (或集合 A 包含于集合 B),记作 $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$).

对于集合 A, B ,如果有 $A \subseteq B$,同时有 $B \subseteq A$,我们就说集合 A 等于集合 B ,记作 $A = B$.

◆ 补集、全集的概念

在研究集合之间的关系时,常常取定一个集合,使得所讨论的集合都是这个集合的子集,这个集合叫全集,用符号 U 来表示.

给定全集 U ,设 A 是 U 的子集,由 U 中不属于 A 的所有元素组成的集合叫做 A 在 U 中的补集,记作 $C_U A = \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$,读作 A 补,如图 1-2 所示,阴影部分表示 A 在 U 中的补集.

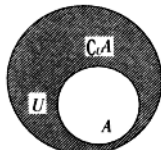


图 1-2

◆ 几个重要结论

- (1) 空集是任何集合的子集;
- (2) 任何一个集合是它本身的子集;
- (3) 空集是任何非空集合的真子集;
- (4) 如果 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 那么 $A \subseteq C$;
- (5) 如果 $A \subsetneq B, B \subsetneq C$, 那么 $A \subsetneq C$;
- (6) 若某集合有 n 个元素, 那它的所有子集个数是 2^n 个, 真子集的个数是 $2^n - 1$ 个.



解析典型例题

例 ▶ $\{a, b\} \subseteq A \subseteq \{a, b, c, d, e\}$, 求所有满足条件的集合 A .

分析 从子集、真子集的概念入手解答, 按顺序写, 做到不重复不遗漏.

解答 $\because \{a, b\} \subseteq A, \therefore A$ 中必有元素 a, b .

又 $\because A \subseteq \{a, b, c, d, e\}, \therefore A$ 中元素也可以含有 c, d, e 中的部分元素.

具体为: $\{a, b\}; \{a, b, c\}; \{a, b, d\}; \{a, b, e\}; \{a, b, c, d\}; \{a, b, c, e\}; \{a, b, d, e\}$, 共七个.

点评 正确地把集合语言表述的问题“翻译”成普通数学语言.

例 ▶ 设集合 $A = \{2, x, y\}, B = \{2x, y^2, 2\}$, 且 $A = B$, 求 x, y 的值.

分析 由集合相等的含义及集合元素的互异性着手解答.

解答 $\because A = B$,

$$\therefore \begin{cases} x=2x, \\ y=y^2; \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=y^2, \\ y=2x. \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x=0, \\ y=0; \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=0, \\ y=1; \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=\frac{1}{4}, \\ y=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

分别代入集合 A, B 中检验.

当 $\begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}$ 时, $A = \{2, 0, 0\}$ 与集合的元素互异性矛盾;

当 $\begin{cases} x=0, \\ y=1. \end{cases}$ 时, $A = B = \{2, 0, 1\}$ 满足条件;

当 $\begin{cases} x=\frac{1}{4}, \\ y=\frac{1}{2}. \end{cases}$ 时, $A = B = \left\{2, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\}$ 满足条件.

$$\text{综上所述 } \begin{cases} x=0, \\ y=1; \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=\frac{1}{4}, \\ y=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

点评 在确定集合中的待定字母时, 容易产生与集合性质相矛盾的增根.

例 ▶ 已知全集 $U = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}, A = \{b, 2\}, C_A = \{5\}$, 求实数 a, b 的值.

分析 根据补集、全集定义来解答, 由补集入手, 知 5 不属于集合 A , 但属于集合 U , 同时 A 中的元素还必须都属于全集 U , 由此能得到关于实数 a, b 的方程组, 从而解出 a, b 的值.

解答 $\because C_U A = \{5\}$, $\therefore 5 \in U$ 且 $5 \notin A$, 又 $\because b \in A$, $\therefore b \in U$.

由此得 $\begin{cases} a^2 + 2a - 3 = 5, & ① \\ b = 3. & ② \end{cases}$ 解①得 $a = -4$, 或 $a = 2$.

$\therefore a = -4, b = 3$ 或 $a = 2, b = 3$.

点评 注意检验是否符合题意. 在已知补集 $C_U A$ 求全集 U 中的未知数时, 一定既要考虑集合元素的互异性, 又要考虑到 $C_U A$ 中元素. 一般来说, 求出集合中某元素的值后要代入原集合中, 判断这时集合中的元素是否满足元素的互异性.

例 已知 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 = 0\}$, $B = \{x | ax - 1 = 0\}$, 当 $B \subsetneq A$ 时, 求 a 的取值集合.

分析 利用 $B \subsetneq A$, 列出一个关于 a 的方程, 从而求出 a 的取值范围, 注意不要忽视 $B = \emptyset$.

解答 易得 $A = \{3, -1\}$, B 是关于 x 的方程 $ax - 1 = 0$ 的解集.

若 $B = \emptyset$, 则 $a = 0$;

若 $B = \{3\}$, 则 $3a - 1 = 0$, $\therefore a = \frac{1}{3}$;

若 $B = \{-1\}$, 则 $-a - 1 = 0$, $\therefore a = -1$.

综上所述, a 的取值集合为 $\{0, \frac{1}{3}, -1\}$.

点评 考虑 B 可取 $\emptyset, \{3\}, \{-1\}$ 这三种情况.

例 设 $A = \{x | 1 < x < 2\}$, $B = \{x | x - a < 0\}$, 若 $A \subsetneq B$, 求 a 的取值范围.

分析 利用数轴“搭棚子”, 把形如 $A \subsetneq B$ 的问题, 转化为不等式问题, 这类问题要特别注意端点是否属于所求的范围.

解答 如图 1-3 所示.

$\therefore A \subsetneq B$, $\therefore a \geq 2$.

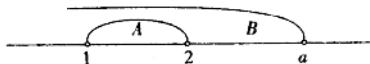


图 1-3

点评 集合问题解题时要尽可能借助数轴、直角坐标系或韦恩图, 将抽象问题直观化、形象化, 利用数形结合的思想方法使问题得到直观简明的解决.



1.3 交集 并集



感知基本概念

概念

	交集	并集
语言	由所有属于 A 且属于 B 的元素组成的集合	由所有属于 A 或属于 B 的元素所组成的集合
式子	$A \cap B = \{x x \in A \text{ 且 } x \in B\}$	$A \cup B = \{x x \in A \text{ 或 } x \in B\}$
图形		

运算性质

$$A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset, A \cap B = B \cap A.$$

$$A \cup A = A, A \cup \emptyset = A, A \cup B = B \cup A.$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

重要结论

$$(1) A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B; A \cup B = A \Leftrightarrow A \supseteq B.$$

$$(2) A \cup (\complement_U A) = U; A \cap (\complement_U A) = \emptyset.$$

$$(3) \complement_U (A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B); \complement_U (A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B).$$



解析典型例题

例 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, A, B 为 U 的子集, 且 $A \cap B = \{2\}$, $\complement_U A \cap \complement_U B = \{1, 9\}$, $\complement_U A \cap B = \{4, 6, 8\}$, 求 A, B .

分析 利用韦恩图求解.

解答 如图 1-4, 全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, 集合 A, B 如图所示, 则 $A \cap B, \complement_U A \cap B$ 及 $\complement_U A \cap \complement_U B$ 的

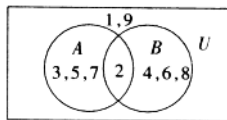


图 1-4