普通高等教育“十一五”国家级规划教材

数学物理方程讲义

第三版

姜礼尚 陈亚浙
刘西垣 易法槐 编

高等教育出版社

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

数学物理方程讲义

（第三版）

姜礼尚　陈亚浙
刘西垣　易法槐　编

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材。第一版在第二届全国高等学校优秀教材评选中获国家教委一等奖。第三版保持了原有特色，增加了一些在当前偏微分方程应用中十分有用的材料，其中特别是有关具有非负特征的二阶偏微分方程的 Fichcra 理论的基本内容，此外增加了用镜像法求解热传导方程第三边值问题的内容。根据教学需求把基础内容尽可能交待得透彻一些，把应用部分尽可能多展开一些，把具体推演简化、精练一些，力求做到使教师便于教，学生便于学。

本书适合作为数学类专业的教材，也可供相关研究人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程讲义 / 姜礼尚等编 .—3 版 .—北京：高等教育出版社，2007.4

ISBN 978-7-04-020747-7

Ⅰ.数… Ⅱ.姜… Ⅲ.数学物理方程-高等学校-教材 Ⅳ.O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 024144 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京中科印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
		版　　次	1986年5月第1版
开　　本	850×1168　1/32		2007年4月第3版
印　　张	7.875	印　　次	2007年4月第1次印刷
字　　数	200 000	定　　价	12.20元

物料号 20747-00

第三版序言

在这一次修订中,我们增加了一些在当前偏微分方程应用中十分有用的材料,其中特别是有关具有非负特征的二阶偏微分方程的 Fichera 理论的基本内容(见第五章§2),希望读者由此能对二阶蜕化抛物型方程和二阶蜕化椭圆型方程的定解问题提法有一个正确了解.

此外我们改写了热传导方程的半无界问题(见第三章§1.5),这一节增加了用镜像法求解热传导方程第三边值问题(即边界具热交换条件)的内容.

同时我们删去了在第二版中有关在二个自变量情形二阶线性偏微分方程化标准型的内容.

在这次修订过程中华南师范大学易法槐教授作出了重要贡献.

最后我对高等教育出版社的编辑李蕊同志的支持和关心表示感谢.

姜礼尚

于同济大学

2006 年 9 月 20 日

再版序言

本书第一版问世以来已近10年,在这期间国内很多高校把它作为数学系本科各专业数学物理方程课程的教材.通过实践,肯定了本书的一些长处,同时亦提出了不少希望修改的建议.第一届国家教委理科数学与力学教学指导委员会微分方程教材建设组根据大家的意见,把本书的修改和再版列入了教材建设“八五”规划.在教材建设组各位专家的推动和督促下,我们着手了这项修订工作.

这次修订的指导思想是:保持原书的特色,尽量考虑到教学实践的要求,把基础内容尽可能交待得透彻一些,把应用部分尽可能多展开一些,把具体推演尽可能简化精练一些,把与课程的要求相距较远的材料适当地删掉一些,力求做到使教师便于教,学生便于学,争取成为一本受广大师生欢迎的教材.

在这次修改过程中,比较重要的增补有以下几点:

1. 增加了一阶线性偏微分方程 Cauchy 问题的特征线方法.增加了求解多维波动方程 Cauchy 问题的球面平均法和降维法的内容.

2. 根据广义函数是定义在基本空间上的线性泛函这个概念出发,改写了原书的广义函数这一节,删去了广义函数 Fourier 变换的内容,把基本解的推导直接从“点源”的影响函数这个物理事实出发来进行.

3. 从解的比较原理出发,通过建立上(下)函数,对解的最大模估计作了统一处理.

4. 增加了用分离变量法求解热传导方程轴对称解的内容.

同时我们亦删去了流体力学基本方程组(除连续性方程以

外)和带有障碍的膜平衡方程的推导、一阶线性双曲组、不适定问题的对数凸性法以及 Cauchy-Ковалевская 定理等一些原书带有星号的内容.

对于本书的修订和再版,王元明、王传芳等教授提出了很多宝贵意见,以伍卓群教授为首的微分方程教材建设组的全体专家对本书修订的指导思想提出了很多建设性意见,高等教育出版社郭思旭同志自始至终关心和支持本书的再版工作,苏州大学王翼勋同志为争取再版本早日问世,用 LATEX 结合天元数学排版系统,突击排出了本书,对此我们表示由衷的感谢.

姜礼尚

于苏州大学

1995 年 12 月 20 日

目　录

第一章 方程的导出和定解条件

任何物质的运动都受到一定的自然规律(如物理定律)的制约.我们常见的一些数学物理方程,它们作为描写这些物质运动的数学模型,是从数量形式上刻画了由相应的物理定律所确立的某些物理量之间的制约关系.

与建立数学物理方程关系最密切的物理定律大致可以归结为两大类:1. 守恒律;2. 变分原理.当然,为了使方程(组)成为封闭的,往往还需要其他实验定律,如 Fourier 热传导定律,状态方程等,但前面所述的两大类是最基本的.

在这一章内,我们将通过弦振动、热传导、流体运动以及膜平衡、极小曲面等物理和几何的例子,说明如何从守恒律和变分原理出发导出我们常见的一些数学物理方程.它们将作为本书讨论的对象.

§1 守 恒 律

质量守恒、动量守恒和能量守恒是自然界一切运动都必须遵循的基本规律.对于自然界的某一个特定问题,如果把相应的守恒律数量化,就导出刻画这个问题的微分方程.因此,从这个意义上说,微分方程实质上就是自然界守恒律的数量形式.

1.1 动量守恒与弦振动方程

物理模型

一根长为 l 的均匀细弦,拉紧之后让它离开平衡位置,在垂直于弦线的外力作用下作微小横振动,求在不同时刻弦线的形状.

我们这里所说的“弦”是指所讨论的对象充分柔软，它只抗伸长，不抗弯曲，也就是当它变形时，反抗弯曲所产生的力矩可以忽略不计；所谓“均匀”是指弦的线密度（即单位长度的质量）为常数；所谓“细”是指弦的长度远远大于它的直径，使得在数学上可以把弦作为一根（直的或弯曲的）线段来处理；所谓“横振动”是指弦的运动发生在同一平面内，且弦上各点的位移与平衡位置垂直．所谓“微小”的意义将在下文中说明．

弦的往返运动的主要原因是张力的影响．弦在运动过程中，各点的位移、加速度、张力等都在不断变化，但它们遵循动量守恒律．

动量守恒律

物体在某一时段（即时间间隔）内的动量的增量等于作用在该物体上所有外力在这一时段内产生的冲量．

$$\boxed{\begin{matrix}\text{动量}\\ t=t_2\end{matrix}} - \boxed{\begin{matrix}\text{动量}\\ t=t_1\end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix}\text{外力产生的冲量}\\ t_1\leqslant t\leqslant t_2\end{matrix}}$$

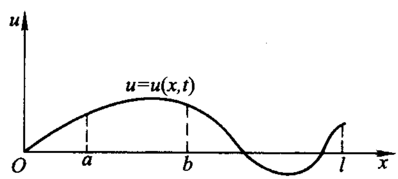

图 1.1

我们应用这个定律建立弦上各点的位移所满足的微分方程．

首先建立坐标系，取弦的平衡位置为 x 轴．在弦线运动的平面内，垂直于弦线的平衡位置且通过弦线的一个端点的直线为 u 轴．这样，在任意时刻 t，弦线上各点的位移为

$$u=u(x,t).$$

在弦上任意截取一段 $[a,b]$，考虑它在任意时段 $[t_1,t_2]$ 动量的变化．

设 ρ 为弦的线密度(kg/m),f_0 为作用在弦线上且垂直于平衡位置的强迫外力密度(N/m),从而在任意时刻 t,弦段$[a,b]$的动量为

$$\int_a^b\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)\mathrm{d}x.$$

在时段$[t_1,t_2]$内动量的变化为

$$\int_a^b\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=t_2}\mathrm{d}x-\int_a^b\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=t_1}\mathrm{d}x. \tag{1.1}$$

为了写出作用在弦段$[a,b]$上所有垂直于弦线的外力产生的冲量,注意到作用于弦段$[a,b]$上的外力有两类:外加强迫力和周围弦线通过端点 $x=a$ 和 $x=b$ 作用于弦段$[a,b]$的张力.强迫力在时段$[t_1,t_2]$内所产生的冲量是

$$\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\int_a^b f_0\mathrm{d}x. \tag{1.2}$$

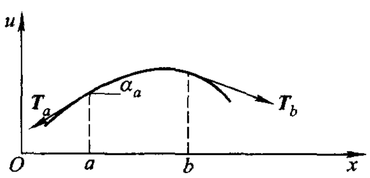

图 1.2

作用在端点 $x=a$ 和 $x=b$ 点的张力为 $\boldsymbol{T}_a$、$\boldsymbol{T}_b$,它们的方向如图 1.2.它们在 u 轴方向的分量为

$$\boldsymbol{T}_a\cdot\boldsymbol{i}_u=|\boldsymbol{T}_a|\cos(\boldsymbol{T}_a,\boldsymbol{i}_u)=-|\boldsymbol{T}_a|\sin\alpha_a,$$

$$\boldsymbol{T}_b\cdot\boldsymbol{i}_u=|\boldsymbol{T}_b|\cos(\boldsymbol{T}_b,\boldsymbol{i}_u)=|\boldsymbol{T}_b|\sin\alpha_b,$$

这里 $\boldsymbol{i}_u$ 表示 u 轴上的单位向量,α_a、α_b 分别为弦线在 a、b 点处的切线与 x 轴正方向的夹角.

由于我们假设弦线是均匀的,弦作微小横振动,故可以认为:

$$|\alpha_a|,|\alpha_b|<<1,\ \sin\alpha_a\sim\tan\alpha_a,\ \sin\alpha_b\sim\tan\alpha_b,$$

以及

$$|\boldsymbol{T}_a| = |\boldsymbol{T}_b| = T_0 (\text{常数}).$$

因此张力 $\boldsymbol{T}_a, \boldsymbol{T}_b$ 的垂直于弦线的分量在时段$[t_1, t_2]$内产生的冲量（忽略高阶小量）是

$$\int_{t_1}^{t_2} T_0 \tan \alpha_b \mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} T_0 \tan \alpha_a \mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(T_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=b} - \left(T_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=a} \right] \mathrm{d}t. \tag{1.3}$$

考虑到表达式(1.1)、(1.2)、(1.3)，从而由动量守恒定律得到弦线作微小横振动所满足的方程（忽略高阶小量）：

$$\int_a^b \left[\left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=t_2} - \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=t_1} \right] \mathrm{d}x$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(T_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=b} - \left(T_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=a} \right] \mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_a^b f_0 \mathrm{d}x, \tag{1.4}$$

其中$[a,b]$是包含在弦线$[0,l]$内的任意弦段，$[t_1,t_2]$是包含在振动期间$[0,\infty)$内的任意时段.

如果假设在区域$(0,l) \times (0,\infty)$内，u 存在二阶连续微商$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$和$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$，那么由熟知的 Green 公式，表达式(1.4)可改写为

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(T_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] \mathrm{d}x$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_a^b f_0 \mathrm{d}x.$$

由(a,b)，(t_1,t_2)的任意性以及被积函数的连续性，即得 u 适合的微分方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(T_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f_0 \quad (0 < x < l, t > 0).$$

由于弦是均匀的，故 ρ = 常数，因此方程亦可改写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \quad (0 < x < l, t > 0), \tag{1.5}$$

其中

$$a^2=\frac{T_0}{\rho},\quad f(x,t)=\frac{f_0(x,t)}{\rho}.$$

方程(1.5)刻画了均匀弦的微小横振动的一般规律,人们称它为**弦振动方程**.

一根弦线的特定的振动状况,还依赖于初始时刻弦线的状态和通过弦线的两端所受到的外界的影响.因此为了确定一个具体的弦振动,除了列出它满足的方程以外还必须写出它适合的初始条件和边界条件.

初始条件 即必须给出弦上各点在初始时刻 $t=0$ 的位移和速度:

$$u(x,0)=\varphi(x)\quad(0\leqslant x\leqslant l),$$
$$u_t(x,0)=\psi(x)\quad(0\leqslant x\leqslant l),\tag{1.6}$$

这里 $\varphi(x),\psi(x)$ 为已知函数.

边界条件 一般说来有三种.

1. 已知端点的位移变化,即

$$u(0,t)=g_1(t),\quad u(l,t)=g_2(t)\quad(t\geqslant0),\tag{1.7}$$

特别当 $g_1(t)=g_2(t)=0$ 时,称弦线具有**固定端**.

2. 已知在端点所受的垂直于弦线的外力的作用,即

$$-T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}=g_1(t),$$
$$T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=g_2(t)\quad(t\geqslant0),\tag{1.8}$$

特别当 $g_1(t)=g_2(t)=0$ 时,称弦线具有**自由端**.

3. 已知端点的位移与所受外力的作用的一个线性组合

$$-T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}+\alpha_1u(0,t)=g_1(t),$$
$$T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}+\alpha_2u(l,t)=g_2(t)\quad(t\geqslant0),\tag{1.9}$$

$\alpha_i>0,i=1,2$,特别当 $g_1(t)=g_2(t)=0$ 时,表示弦的两端固定在

弹性支承上，$\alpha_i(i=1,2)$分别表示支承的弹性系数. 事实上(以左端点为例)，根据作用力与反作用力的关系，弦对弹性支承的力为 $T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}$，而弹性支承的伸长为 $u(0,t)$，由胡克(Hooke)定律知 $T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\alpha_1 u(0,t)$，此即(1.9)中的第一表达式.

通常我们把初始条件和边界条件统称为**定解条件**. 一个偏微分方程连同与它相应的定解条件(初始条件和边界条件)组成一个**定解问题**. 因此为了寻求在特定条件下弦的振动规律，我们需要去求解一个相应的定解问题.

在区域$\{0\leqslant x\leqslant l,t\geqslant 0\}$上由方程(1.5)、初始条件(1.6)以及边界条件(1.7)—(1.9)中间的任意一个组成的定解问题称为**弦振动方程的混合问题**(两个端点的边界条件也可以分别是(1.7)—(1.9)中不同的两种).

如果对于弦上的某一段，在所考虑的时间内，弦线端点(边界)的影响可以忽略不计，那么我们可以认为弦长是无穷的，这样就不必考虑边界条件，我们把在区域$\{-\infty<x<\infty,t\geqslant 0\}$上，由方程(1.5)和初始条件(1.6)组成的定解问题称为**弦振动方程的初值问题(或 Cauchy 问题)**.

类似地我们可以给出关于弦振动方程半无界问题的定义.

附注 1 方程(1.5)虽然一般称为弦振动方程，但决不只用来表述弦的横振动. 事实上在工程和物理中，还有很多其他的实际问题同样可以用方程(1.5)来刻画. 例如杆的纵振动(即一均匀细杆在外力作用下沿杆长方向作微小振动)，如果取杆长方向为 x 轴，$u(x,t)$表示 x 处的截面在 t 时刻沿着杆长方向的位移，那么由动量守恒定律和胡克定律

$$\frac{N}{S}=E\varepsilon$$

(其中 N 为端面受力，S 为端面面积，N/S 为应力，E 为杨氏模量，ε

为相对伸长)可推出 $u(x,t)$ 适合方程(1.5),其中 $a^2=\frac{E}{\rho}$,ρ 为体密度.

不论是弦的横振动还是杆的纵振动,它们都有一个共同的特征,即由物体的振动产生了波的传播. 因此方程(1.5)一般亦称为**一维波动方程**.

附注 2 如果我们考虑的是膜的振动或者声波在空气中的传播,用来描述这些二维和三维波动现象的微分方程仍然具有和方程(1.5)相似的形式:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\Delta u=f, \tag{1.10}$$

这里 $\Delta u=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ 是 Laplace 算子,n 是维数. 通常我们把方程(1.10)称为**波动方程**.

附注 3 对于方程(1.10)我们同样可以提混合问题和初值问题.

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 空间中的有界开域,Q 是 $\mathbb{R}^n\times[0,\infty)$ 中的一个柱体:$Q=\Omega\times(0,\infty)$,Σ 是柱体的侧表面,$\Sigma=\partial\Omega\times(0,\infty)$($\partial\Omega$ 表示 Ω 的边界). 所谓**混合问题**就是在 $\overline{Q}$ 上定义一个函数 u,使它在柱体 Q 内适合方程(1.10),在柱体的下底适合初始条件

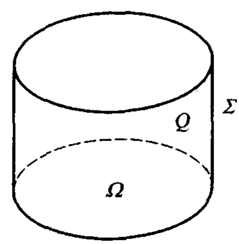

图 1.3

$$u|_{t=0}=\varphi(x_1,\cdots,x_n),$$
$$u_t|_{t=0}=\psi(x_1,\cdots,x_n),\ (x_1,\cdots,x_n)\in\Omega. \tag{1.11}$$

在柱体的侧表面 Σ 上适合下面三个边界条件中的任意一个:

$$u|_{\Sigma}=g(x_1,\cdots,x_n,t), \tag{1.12}$$

或

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\Sigma}=g(x_1,\cdots,x_n,t), \tag{1.13}$$

或

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}+\alpha u\right)\right|_{\Sigma}=g(x_1,\cdots,x_n,t), \tag{1.14}$$

这里 $\boldsymbol{n}$ 是 Ω 的单位外法向量,$\alpha>0$.

所谓**初值问题(Cauchy 问题)**即在$\mathbb{R}^n\times[0,\infty)$上定义一个函数 u,使它在$\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$内适合方程(1.10),而在 $t=0$ 上适合初始条件(1.11)(这里$(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$).

附注 4 考虑膜在外力作用下处于平衡状态时的形状.这时惯性力 $\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$,从而我们得到膜上各点位移满足的微分方程

$$-a^2\Delta u=f(x_1,x_2). \tag{1.15}$$

从物理上讲,为了具体确定一张特定的薄膜的形状,除了方程(1.15)以外,还需要考虑膜的边界所处的条件,即它还要适合边界条件(1.12)—(1.14)中的任意一个(这时右端的已知函数是$g(x_1,x_2)$).方程(1.15)称为 Poisson 方程.如果$f\equiv0$,则(1.15)称为 Laplace 方程.边界条件(1.12)、(1.13)、(1.14)依次称为第一、第二、第三边界条件.方程(1.15)和边界条件(1.12)、(1.13)、(1.14)中的任意一个组成的定解问题称为**边值问题**.根据所带有的边界条件的类别,依次称这些定解问题为第一、第二、第三边值问题;人们经常把第一和第二边值问题分别称为方程(1.15)的 Dirichlet 问题和 Neumann 问题.关于膜的平衡方程(1.15),我们将在本章§2 中通过变分原理重新导出.

附注 5 所谓弦和膜,它们都具有一个共同特点,就是充分柔软的,只抗伸长,不抗弯曲.也就是当它们变形时,反抗弯曲所产生的力矩都是可以忽略不计的.假如不然,在力学上把它们改称为梁和板,这时它们的振动方程和平衡方程都必须作相应的变化.一般说来,这些方程中将出现未知函数的四阶微商.