科學圖書大庫

數學研究叢書(一)

近代分析之研究

譯者　劉睦雄　項文潮　詹前哲
校閱　劉世超　賴東昇

徐氏基金會出版

21
1/1

V

科學圖書大庫

數學研究叢書(一)

近代分析之研究

譯者　劉睦雄　項文潮　詹前哲
校閱　劉世超　賴東昇

徐氏基金會出版

我們的工作目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力。在整個社會長期發展上，乃對人類未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，自應各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同將人類的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之收穫，已超越以往多年累積之成果。昔之認爲若幻想者，今多已成爲事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，允爲社會、國家的基本使命。培養人才，起自中學階段，此時學生對基礎科學，如物理、數學、生物、化學，已有接觸。及至大專院校專科教育開始後，則有賴於師資與圖書的指導啓發，始能爲蔚爲大器。而從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啓導後學，旨趣崇高，彌足欽佩！

本基金會係由徐銘信氏捐資創辦；旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利，民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，惜學成返國服務者十不得一。另曾贈送國內數所大學儀器設備，輔助教學，尚有微效；然審情度理，仍嫌未能普及，遂再邀請國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。以主任委員徐銘信氏爲監修人，編譯委員王洪鎧氏爲編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱工作。「科學圖書大庫」首期擬定二千種，凡四億言。門分類別，細大不捐；分爲叢書，合則大庫。爲欲達成此一目標，除編譯委員外，本會另聘從事

翻譯之學者五百餘位，於英、德、法、日文出版物中精選最近出版之基本或實用科技名著，譯成中文，供給各級學校在校學生及社會大衆閱讀，內容嚴求深入淺出，圖文並茂。幸賴各學科之專家學者，於公私兩忙中，慨然撥冗贊助，譯著圖書，感人至深。其旅居國外者，亦有感於為國人譯著，助益青年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬多寡，費時又多，迢迢乎千萬里，書稿郵航交遞，其報國熱忱，思源固本，至足欽仰！

今科學圖書大庫已出版一千餘種，都二億八千餘萬言；尚在排印中者，約數百種，本會自當依照原訂目標，賡續進行，以達成科學報國之宏願。

本會出版之書籍，除質量並重外，並致力於時效之爭取，舉凡國外科學名著，初版發行半年之內，本會即擬參酌國內需要，選擇一部份譯成中文本發行，惟欲實現此目標，端賴各方面之大力贊助，始克有濟。

茲特掬誠呼籲：

自由中國大專院校之教授，研究機構之專家、學者，與從事工業建設之工程師；

旅居海外從事教育與研究之學人、留學生；

大專院校及研究機構退休之教授、專家、學者

主動地精選最新、最佳外文科學名著，或個別參與譯校，或就多年研究成果，分科撰著成書，公之於世。本基金會自當運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。尚祈各界專家學人，共襄盛舉是禱！

徐氏基金會　敬啓

中華民國六十四年九月

原　序

此書之得以問世，爲美國數學協會對於出版事業之一新的嘗試。美國數學協會之數學研討會將帶給其會員以及一般數學社團，關於數學以及數學教學之最近發展；當然，這些可資說明之論說均具相當於學院及研究所之水準。吾人希望此等論說將有助於克服由於最近廿五年來數學之急遽發展所產生各分枝間在聯繫上之阻礙。

吾人希望這些書册之各短篇文章能做爲共同研究、報告以及非正式之討論之基礎，且爲一補充材料以便充實學生以及教授之學識背景。在此處，論題之範圍主要爲適合於大學部之高年級以及剛進入研究所之學生。由於計劃在此等書册中所將刊印之論說均有其不同水準之困難性，因此每一書册之範疇將極爲廣泛。

對於可資解釋之論說之需要早已爲人所察覺。實際上，美國數學協會樹立早在廿年前首刊於Monthly 所發表有關"What is一？"之有價值文章之先例，三年前，在奧克拉荷馬大學任教之Richard V. Andree 教授想出要將此等論說集於一册之計劃。由於此一構想，很明顯的，爲了適合新之潮流，且同時有許多數學之領域不適合以其原有之珍品問世，因此對於此等論說有重新加以整理之必要，而Andree 教授乃將其視爲其個人之一項挑戰，Andree 教授向許多數學社團成功的提出建議，且設法克服數學家之沉悶研究氣氛，並且蒐集一些顯著的文章，這些文章乃成爲前數册中之核心。吾人希望Andree 教授對於這方面之努力所產生之動量將不致於斷絕，且能維持現今對可資解釋論說之發表之有利氣氛。

美國數學協會
出版委員會主席
R.P. Dilworth（劉睦雄譯）

目　録

第一章　引言

在此書所含之四篇論文，雖未能涵蓋所有的現代分析理論，但却具代表性；每篇之論題，對於純分析或應用分析而言，均具代表性；且無論所探討之數學領域爲何，其亦可能爲每一實踐數學家之經歷中所常遭遇之重要部門。對吾人而言，最重要的是現代數學家之某些特質，能藉此以表達之。

由於現今所討論之分析，其領域之廣泛，使得吾人對分析很難下一簡潔之定義。因代數學及拓撲學能將“函數論”視爲其領域，因此，將分析囿限爲“函數論”之理論，似乎已不太適當。實際上，吾人稱代數學爲同態像之研究，而拓撲學則爲連續映射之研究。在現今之數學發展中，傳統數學分野之瓦解，可能佔最顯著之地位。在分析之領域中，關於結構之理論以及所謂代數分析及拓撲分析，已經有了成長之跡象。

這些趨勢在此書所包含之精選中，顯而易見。於Stone及Goffman之論文中，明白的含有代數的成分。對於一連續函數，吾人常存有將其視爲某一函數族之元素之意識，而此函數族能形成如線性空間或代數之數學實體。由於此，吾人不可忽視，拓撲之概念實存於分析之基本過程之核心中；此乃由McShane所論及，而於Lorch之論文中亦隱含此意。在現代關於偏微分方程之研究論文中，可能涉及“緊緻——開拓撲學”或所謂“强性及弱性拓撲學”之理論；在函數論之論文中，言及緊緻集合可能較正規族爲合理，實際上，亦可討論正則函數所成之代數中閉理想之性質。

傳統分析與其隣支間相互之討論，並未能引起從事者之有理判斷。乍見之下，此改變主要爲關於語義之問題，吾人採用代數學及拓撲學之術語，僅爲便於描述某些時常發生之狀況；但當吾人採用其他之觀點，以及其他之觀察研究，將使吾人有一清晰之想像力，由其他領域中所導入之技巧，使分析學家對於證明不但能簡單化，且能使古典之現象更加生動，在此包含二主要之例子：一爲M. H. Stone 所提之 Weierstrass 近似定理，另一爲包含於Goffman 之論文中，討論在完備距離空間中由可減縮映射而得之某些存在定理。此外倘有一並未包含於此但富說服性之例子，以Green及Stokes 之

古典定理爲始，而以微分形式與上同調學之關係爲終之一連串研究。

此並非代數學及拓撲學在分析上之唯一貢獻。當然，若言及它已於分析上提供新問題，將是陳腐之言，傳統主義者可能同意“由所有函數所成之環中之所有理想爲何？”爲分析上一新問題，但對於其解答則將不表興趣。類似地，吾人敢斷言十五世紀之代數學者，對於一多項式

$$w = P(z) = z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m, \qquad |z| < 1,$$

之値所成集合所具之特性，亦將不屑爲之，因此由新之論點所引入之見解，而導致古典問題之重新被加以重視，且證其實爲從事基本問題研究之始點，此事實可能使得持懷疑論者信服，此卽爲最近關於插入有界解析函數以及保持測度變換之等冪問題之研究。

在現代分析中，另一較著名之論文爲由Lorch所提出關於在線性分析中“抽象”方法所扮演之角色，在特別之線性變換中，採用適當之基爲不容置疑之事實，但實際上吾人將儘可能避免採取此步驟。此項事實，當吾人考慮希伯特空間中之線性運算子時，將更加明顯。因矩陣，指標以及加法之利用將轉爲冗長，使人迷惑，且甚至導吾人偏離正題。此外，每一問題似乎有一其自然之基，以及其坐標之理想集合，而此等在問題並非原有給與者，因此將空間抽象化，能持公正之立場。

吾人將依次簡介各篇之內容，首篇爲由McShane所提關於收斂之概念，當然極限及敍列之觀念爲初等微積分之基礎，但在近代分析中，則將討論極限之更爲廣泛之概念，及非距離拓撲空間以及在敍列中未加任何限制之現象。舉例而言，考慮由函數中之“點態收斂”所產生之拓撲，並非爲可測；若爲由滿足

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1$$

且對所有 x，$0 \leq f(x) \leq 2$ 之連續函數 f 所成之函數族；則由Lebesgue收斂定理知函數2雖非 $\mathfrak{F}$ 中任意敍列之極限，但却在 $\mathfrak{F}$ 之閉包內。E.H. Moore 及M. Picone首先注意到此等觀念之重要性；而後由H.L. Smith，H.Cartan 及其他學者藉著“網”“有向系”或“濾過”將其有系統之說明。在此文中Mcshane對於此等觀念有一詳盡之介紹，且應用“方向”之概念爲一整合之原理；並且列舉一些對於函數，敍列，黎曼和以及更爲廣泛對象之收斂問題，僅藉著極限之概念而予以討論之例子。此文適合於修完初等微積分且對極限之概念欲深入探討者研讀。

至於第二篇文章，則取材自“數學雜誌”。此爲一著名且在歷史上將以

常被引證為樂之研究論文。雖然本文將闡釋Stone-Weierstrass 定理之原有形式並無任何價值，但是該定理為首先應用代數方法討論分析問題之重要例子，則為不容置疑之事實。關於古典之Weierstrass 近似定理，文獻中有許多簡潔之證明，然而在此所提之證明，其內涵之深，應用之廣以及結構之複雜，非其他之證明所能比擬。在該文中之主題為一定義於緊緻空間S上之連續實函數所成之函數族 $\mathfrak{F}$；而主要問題為敘述 $\mathfrak{F}$ 之子集 $\mathfrak{F}_0$ 經由某種特別指定之代數運算所產生之均勻極限函數之特性。Stone 依次運用max及min之格子運算，然後加入加法運算，最後則僅運用加法及乘法運算。在每一情況下，其目的均在於敘述 $\mathfrak{F}$ 中適當閉理想之特性。S及 $\mathfrak{F}_0$ 特殊化，Stone 得到一廣泛且有趣之應用，由Tietze-Lebesgue-Urysohn之推廣定理以及Dieudonné 之一無限多變數之近似定理到Peter-Weyl 關於群之表現之定理。更難得的為研討關於 Laguerre 及Hermite多項式在〔0，∞）及（－∞，＋∞）上之近似問題。雖然該文採用對於大學生而言可能較難瞭解之數學論辯，但對於近代數學精神之介紹，則無出其右者。

由Lorch所發表之第三篇文章，作者欲以簡潔之方式說明譜論之歷史發展及其有趣之軼事。該文首以三維空間及一線性變換H著手，作者提出“在空間上是否有一使H之矩陣轉為最簡形式之基存在？”之問題；並且將(1)在希伯特空間上之對稱運算子H之一般問題之使成公式化，(2)H具完全連續性時，其解之特性，以及(3)H僅為連續時，所產生之新現象等問題藉著分析將其歸於前述之問題中。該文最後根據von Neumann 對於非有界（自伴）情況之研究，給與一詳盡之說明，但證明則予以省略。

由Goffman 所執筆之第四篇文章，雖然與Lorch所討論之文章有稍微重複，但其却包含近世分析中之主要外沿。函數分析——實際而言，本身為抽象空間之觀念——乃發跡於十九世紀末葉。首先由E.H.Moore 及Volterra 引進此觀念，且由於變分學之研究以及最近所發現之微分及積分方程之激勵，Goffman之文章乃告見世。藉著許多古典分析之結果，吾人主張在函數空間上之某些連續變換T有一固定之點f_0，使得$T(f_0)=f_0$；自然地，吾人將試圖由某一原有函數 g 之敘列$T^n g$，獲致函數f_0。作者首先研討在距離空間之距離——遞減映射，而後探討函數空間中緊緻性之概念。後者對於吾人討論在一適當之函數空間（以Volterra而言，則為曲線空間）之（下半）連續函數之極小問題時，更加顯示其有效性。然後，Goffman轉至巴拿赫及希伯特空間且討論模代數所扮之角色，且特別地證明在模域上之Gelfand定理。最後作者以代數方法證明由Wiener 所提關於富氏級數之絕對收斂定理。

本書中諸文章並無意作爲教材，然而却爲閱讀數學論文之導引，且並無企圖使得讀者因著閱讀此等文章而達於近世研究領域之水準，其目的僅在於使讀者往這方面之方向邁進。由於該等文章非爲專家所執筆，因此可能將爲專家所鑑賞。（劉睦雄譯）

第二章　極限論（項文潮譯）

1.　簡介

努力地去尋求統一及一般化，可以說是廿世紀的數學上的主要特色之一。當兩個或更多的數學理論間，顯出有重大相似點時，一個現在的數學家，便很自然地去設法尋找出一些，能導出這些相似點的理由來。當然這些理由必定為大家所共有的一些特性，否則便不會產生相似的現象。然後以這些找出的理由或性質作為基礎，再去討論在一般的情形下會得到那些結果，這樣就得到了一般性的理論。極限的理論就是一個能說明這種轉變過程的最好例子。19 世紀中，產生了許多定義極限的方法，而它們都導至了相似的定理。在 1922 年，E.H.Moore 及 H.C.Smith 兩人合著了一本討論極限的一般性的書，而將早期的一些理論，都能當作為其書中理論的特性。書中那些在一般性的情形下，所討論出來的種種定理，一經証明後，在以後需要之時，便可反覆的使用，而不必再給予証明。

在本篇文章中，我們所要討論及觀賞的是，一種經過修飾過了的 Moore-Smith 極限論。本人也相信這種修飾，將使讀者易於了解及掌握其概念。

2.　符號

我們將利用一些集合的概念，以及一些集合間的最簡單的關係。事實上，我們所要引用集合論用的符號，主要是下面這些：$A \subset B$（A 包含在 B 中）表示 A 中任何元素必定也屬於 B；$A \cap B$（A 與 B 的交集），表示是由同時屬於 A，也屬於 B 的那些元素所組成的集合；$A \cup B$（A 與 B 的聯集），表示是由 A 中的元素及 B 中的元素以及同時在 A 中又在 B 中的元素，共同所組成的集合。在我們討論過程中，主要的對象是實數値的函數。但是由于無窮大的極限在討論中很有用，以致無法去掉，因此我們在實數系 R 中加入兩個

新元素；即$+\infty$及$-\infty$。並且規定對任何實數a，都有右列的大小關係，$-\infty<a<\infty$。這種新的數系稱爲擴張了的實數系，以R^*表示。今後當然允許我們所討論的函數的函數值，可以在R^*中變動。

設a，b爲R^*中的兩數，且$a<b$，則我們定義所謂開區間(a,b)，表示由所有滿足右式$a<x<b$的R^*中的元素x，所組成的集合。同理，所謂半開區間$(a,b]$及$[a,b)$，便定義是由所有滿足右式$a<x\leq b$或$a\leq x<b$的R^*中的元素x所組成的集合。同樣地，若$a\leq b$，則定義閉集合$[a,b]$，表示由所有滿足右式$a\leq x\leq b$的R^*中的元素x所組成的集合。（端點的括弧如果是方括弧，則表示該端點包含在此集合中，如果是圓括弧則表示該點不在此集合中）

在n度空間R^n上開區間的觀念也是很有用的。所謂集合J是平面R^2上的一個開區間，即表示存有四個實數a，b，c，d，其中$a<b$，$c<d$，而J就是由所有滿足右式$a<x<b$，$c<y<d$的所有R^2中的點(x,y)所組成的集合。很明顯地，可將此定義推廣到高度的空間中。

所謂n度空間R^n中某一點P的鄰域，即定義爲包含P的開區間。此定義包含了特殊情形，也就是R，但却不適合R^*。因爲此時找不到包含$+\infty$及$-\infty$的開區間，因此，在R^*中，我們定義一個集合V爲b的鄰域的條件是(1)b在V中，以及(2)V爲一個開區間，或者爲一個半域；即爲$(c,+\infty]$或$[-\infty,c)$，或者V爲整個擴張實數系$R^*=[-\infty,\infty]$本身。

3. 極限的定義

讓我們來觀察兩個相似的定義：

(1)若f定義在所有的實數上，a爲實數而且k在R^*，則

$$\lim_{x\to a} f(x)=k$$

表示在任意k的鄰域U，必能相對地找到一個a的鄰域，使得當x在V中且$x\neq a$時，$f(x)$便在U中。

(2)若f定義在平面上的一個方塊S上，並設點$p(x_0,y_0)$在S中，而且k在R^*中，則

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=k$$

表示對任意k的鄰域U，必相對地存有一個點P的鄰域V，使得當(x,y)爲$S\cap V$中的點，而且又與點P相異時，則$f(x,y)$必在U中。

事實上，我們很輕易地便能將上述兩個定義弄得很相像。首先，令D代表f的定義域，則在(1)中，D便是實數系R，而在(2)中，D便是方塊S。其次，D中任何一個元素都用一個簡單的符號來代表；例如以P來代表。在(1)中，我們曾提到一組集合，其中每一個集合都是由a的某一個鄰域V中的元素所組成，但此時點a除外。我們以符號$V-\{a\}$代表示。（這種集合通常都稱爲是a的去心鄰域）。我們以字母$\mathfrak{U}$來表示這組集合。在(2)中，我們用到由同在集合S與V中，但却異於點P的所有點所組成的集合，其中V爲P的任一鄰域。對這個例子來說，我們以$\mathfrak{U}$代表包含所集合$V\cap S-\{P\}$的一個大群，其中V爲P的任一鄰域。則在上述兩定義中，都具有下列相同的形式：

(3) $\lim f(p)=k$，表示對任意k的鄰域U，則必對應地存在一個$\mathfrak{u}$中的集合A，使得對所有A中的點p，則$f(p)$必在U中。

一個數列$b_1, b_2, b_3\cdots\cdots$的極限的標準定義爲下列所述：

(4)實數數列$b_1, b_2, b_3\cdots\cdots$以$k$（在$R^*$中）爲極限的充要條件是，對任意$k$的鄰域$U$，則除了有限個整數$n$外，所有$b_n$都在$U$中。

此定義看來似乎與定義(3)有些不同。但是，如果我們令D代表所有正整數所組成的集合，又對任意正整數P，規定以$f(p)$代表a_p，再規定以$\mathfrak{U}$代表一群由正整數所組成的集合A，而且其中每一集合A，需要包含無窮個正整數，並且只充許有限個正整數不包含在A中。如此，則定義(4)也與定義(3)相同。

當然我們能再找一些其他的例子。但現在我們已有足夠例子作參考，來下一個最一般化的極限定義，如下所述：

(5)設f的函數值在擴張實數系中，且其定義域爲D_f。又設$\mathfrak{U}$爲一組包含於D_f中的集合。k設爲R^*中的元素。則所謂$f(x)$以k爲其極限（此時係對$\mathfrak{U}$這組集合而言），即表示對任意k的鄰域U，必存有一個$\mathfrak{U}$中的集合A，使得對任意A中的元素x，則必定使$f(x)$在k的鄰域U中。

我們現在的問題是，上述的定義定的太一般化了，使得我們無法利用它去証明一些有趣的定理。所以我們準備在$\mathfrak{U}$上加一些限制，使它能夠用來証明一些定理。當然在$\mathfrak{U}$上所加的限制是愈少愈好。在此要請大家注意的是，在定義(5)中，我們將設$\mathfrak{U}$具有下列性質：

(6) 1. $\mathfrak{U}$爲一非空的集合，它至少包含一個元素A。

2. 每一個在群$\mathfrak{U}$中的集合A都是非空集合；即表示A中至少含有D_f中的一點。

3.若A_1及A_2爲屬於群$\mathfrak{U}$的兩個集合，則必能在群$\mathfrak{U}$中找到一個集合A_3，且A_3能同時被包含在A_1及A_2中：

$$A_3 \subset A_1 \cap A_2$$

在我們上述的三個例子裏，很容易証出它們都具有這些性質。事實上，在那些例子中的群$\mathfrak{U}$都含有無窮個元素，而且每個$\mathfrak{U}$中的元素都是一個含有無限個元素的集合。此外，當A_1及A_2在$\mathfrak{U}$中時，它們的交集$A_1 \cap A_2$也在$\mathfrak{U}$中。由此可知，上述假設$\mathfrak{U}$具有性質(6)並不算是過份的要求。而事實上，所有古典的例子都具有這些性質。並且在最後的幾節中，我們將証明，爲了避免產生一些希奇古怪的，我們不想要的例子，則性質(6)中的條件，一個都不能少。在另一方面來說，性質(6)足以証明過去傳統上種種有關極限運算的定理。

由於以後我們要反覆地利用到這具有性質1，2，3的群$\mathfrak{U}$。爲了方便起見，因此給它取個名字叫做指標。換句話說，一群具有性質1，2，3的集合便稱爲一個指標，又若在這群中的每一個集合都包含在集合D中，則$\mathfrak{U}$稱爲D上的指標。所謂一個定向函數，是由兩部份所組成；(a)一個函數f，(b)在此函數中的定義域中存有一個指標。最後再規定一個新名詞，在指標$\mathfrak{U}$中的任何一個集合A，都稱爲一個上進集合。

利用上述的種種新名詞及概念，我們便能將極限重新地定義如下：

(7)設f爲一個函數値在擴張實數系中變動的函數。再令$\mathfrak{U}$爲一在f的定義域中的指標，且k在R^*中。則所謂定向函數($f, \mathfrak{U}$)有一極限値R（用符號表示爲，$\lim\limits_{x,\mathfrak{U}} f(x)=k$），即定義爲，對任意一個$k$的鄰域$U$，則必能相應地在$\mathfrak{U}$中找到一個集合$A$，使得對所有$A$中的$x$來說，$f(x)$都在$U$中。

一些基本定理。下面我們最先所要証明的三個定理中，都沒有利用到數系的性質。

(8)設f及g的定義域爲D_f及D_g，並設f及g的函數値在R^*中。再令$\mathfrak{U}$是由一群同時包含在D_f及D_g中的集合所組成的指標。並令k爲R^*中的値且$\lim\limits_{x,\mathfrak{U}} f(x)=k$。最後，若能在$\mathfrak{U}$中找到一個集合$A$，使得$g(x)=f(x)$；其中$x$在$A$中。則

$$\lim_{x,\mathfrak{U}} g(x)=k$$

証明：設U是k的任一鄰域。由(7)知，在$\mathfrak{U}$中必存有一個集合A，使得對$A \cap A_1$中的任一元素x，$f(x)$必在U中。再由(6)式中的性質1，知道在$\mathfrak{U}$中能

找到一個集合 A_2 ，使得 A_2 能同時被 A_1 及 A 所包含。因此對任意 A_2 中的元素 x 來說，$f(x)$ 在 U 中而且 $g(x)=f(x)$。此即表示，對 A_2 任一元素 x，$g(x)$ 必在 U 中。

下面，我們準備証明極限的唯一性。換句話說，任何一個定向函數，決不能有兩個極限值。

(9)設 $(f,\mathfrak{U})$ 爲一定向函數，其中 f 的函數値在 R^* 中變化。又設 h，k 爲 R^* 中的函數且 $h \neq k$。此時若 $(f,\mathfrak{U})$ 以 k 爲極限時，則不能在以 h 爲其極限。

証明：設 c 爲在 h 及 k 之間的數。則 k 屬于集合 $[-\infty, c)$ 中或屬于集合 $(c, \infty]$ 中。令 U_1 代表 k 所屬的那個集合，則 U_1 能爲 k 的一個鄰域。另一個 k 所不屬的那個集合以 U_2 表示，則 U_2 成爲 h 的鄰域。假設 $(f,\mathfrak{U})$ 同時具有極限 h 及 k。則由定義知，對應於 k 的鄰域 U_1，必在 $\mathfrak{U}$ 中存有一集合 A_1，使得 f 在 A_1 上每一點 x 的函數値 $f(x)$ 都在 U_1。同理，對應於 h 的鄰域 U_2，也必存有一 $\mathfrak{U}$ 中的集合 A_2，使得對 A_2 中任一點 x 來說，$f(x)$ 都在 U_2 中。再利用(6)中的性質 3，知必存有一個 $\mathfrak{U}$ 中的集 A_3，且 A_3 同時包含於 A_1 及 A_2。再由(6)中的性質 2，知 A_3 必含有一點 x^*。簡言之 x^* 必同時在 A_1 及 A_2 中，所以 $f(x^*)$ 也同時在 U_1 及 U_2 中。但由 U_1 及 U_2 的定義知，U_1 及 U_2 間沒有共同點。因此導至矛盾。

(10)若 (f,u) 爲一定向函數，k 爲 R^* 中的數而且 f 的函數値恒等於 k。換言之，$f(x)=k$，其中 x 爲 f 定義域中的點，則

$$\lim_{x,\mathfrak{U}} f(x)=k$$

証明：設 U 爲任一 k 的鄰域。再令 A_1 爲 $\mathfrak{U}$ 中的任意集合。（由(6)知此集合 A_1 必定存在）因對 A_1 中任意一點 x，$f(x)=k$。此即表示，對 A_1 中任一點 x，$f(x)$ 都在 U 中。

4. 一些有用的語言工具

藉着一項由 Halmos 所想出來的文字表達法，我們可用一些特別的語句來敍述定義及定理。然後再利用這些語句在日常生活中原所具有的意義，使我們的思考不會發生偏差。設集合 D 上有一方向 $\mathfrak{U}$。又設 $\mathrm{P}(x)$ 爲一定義在 D 上的敍述，我們稱 $\mathrm{P}(x)$ 爲終極的（或稱 $\mathrm{P}(x)$ 爲終極正確的），即表示在方向 $\mathfrak{U}$ 中存有一集合 A，使得對 A 中的任一點 x，$\mathrm{P}(x)$ 都是正確的敍述。（在沒有說明方向 $\mathfrak{U}$ 到底是甚麼前，所謂終極一字是毫無意義可言）。上

述提到的終極一字，與平常口頭上所說到的終極或終歸的意思祇少有之點相同的地方。第一，若對D中任何一點x，P(x)都是正確的。那我們當然可以說終歸是正確的。這在上述終極的定義下也是如此。因爲由(6)式的性質1知，在方向$\mathfrak{U}$中必存有一個集合A。由於對D中任一點x，P(x)都是正確的。那對A中任一點x，P(x)自然也是正確的。換言之，我們得到了$P(x)$是終極正確的結果。第二，我們知道當我們說一件事終歸是正確的，卽表示該事不會常錯，遲早總有對的時候。這種說法與我們上述的新定義完全符合。因爲由定義知道在$\mathfrak{U}$中存有集合A，使得$P(x)$在A上都是正確的。再由(6)式中的性質2得知A中至少含有一個元素，所以可說此事終歸會成立。第三，設$P(x)$及$Q(x)$是兩件事。如果$P(x)$終歸會成立，而且$Q(x)$也是終歸會成立的話。我們自然可以說$P(x)$與$Q(x)$終歸同時都會成立。這也與上述定義相合。因爲由定義知道，在$\mathfrak{U}$中存有一集合A_1，使得$P(x)$在A_1上是正確的。同理，在$\mathfrak{U}$中也存有一集合A_2，使得$Q(x)$在A_2上成立。最後利用(6)式中的性質3知，在群$\mathfrak{U}$中必存有一集合A_3能同時被A_1及A_2所包含。所以對A_3中的任一元素x，$P(x)$及$Q(x)$必定同時成立。這是因爲A_3中的點x，必同時在A_1及A_2中的緣故。

利用這些概念及語句，我們的極限定義可敍述如下：

(11)若$(f,\mathfrak{U})$爲一定向函數，且其函數值在R^*中取值。又k爲R^*中的值。則

$$\lim_{x,\mathfrak{U}} f(x)=k$$

所表示對任意k的鄰域U，$f(x)$必定終極地在U中。

利用這個新定義。許多定理的証明能夠加以簡化。例如在(9)式的証明中。在定義了U_1及U_2後，我們便能用如下的新法去証明：由於U_1是極限k的鄰域，所以$f(x)$終極地必在U_1。同理，$f(x)$必終極地在U_2中。所以$f(x)$在U_1及$f(x)$在U_2這兩件事，最後終歸會同時成立。也就是說，$f(x)$在U_1而且$f(x)$在U_2」這一件事終歸會成立。但此事是不可能的。因此導出矛盾。

5. 極限的一些計算

到目前爲止，我們尙未定義$+\infty$及$-\infty$的加法及乘法的運算。現在我們給予加法及乘法（這兩種運算都是可交換的）的定義如下：

若$a>-\infty$，則$a+(+\infty)=a-(-\infty)=+\infty$。

若$a<+\infty$，則$a+(-\infty)=a-(+\infty)=-\infty$

若$a>0$，　則$a(+\infty)=+\infty$，且$a(-\infty)=-\infty$

若$a<0$，　則$a(+\infty)=-\infty$，且$a(-\infty)=+\infty$

$$1/(+\infty)=0,\quad 1/(-\infty)=0。$$

與通常的定義相同，a/b定義爲$a\cdot(1/b)$，當然此時我們要求後者是一個有意義的乘積。（請大家注意的是，$\infty+(-\infty)$，$0\cdot\infty$以及∞/∞都是無意義的）

當我們考慮定向函數的和時，便得到下面的定理：

(12)設$(f,\mathfrak{U})$及$(g,\mathfrak{U})$具有相同的定義D，而且它們的函數值在R^*中。再令h及k爲R^*中的值，且

$$\lim_{x,\mathfrak{U}} f(x)=h,\qquad \lim_{x,\mathfrak{U}} g(x)=k。$$

倘若函數和$f(x)+g(x)$（其中x在D中）以及$h+k$都有定義。則定向函數$(f+g,u)$有極限存在，且

$$\lim_{x,\mathfrak{U}}[f(x)+g(x)]=h+k$$

証明：我們先假設h及k都是有限數（卽h及k都在R中），設U爲$(h+k)$的任一鄰域。若e爲任一足夠小的正數，則開區間$(h+k-2e,h+k+2e)$可包含於U。此外$(h-e,h+e)$爲h的鄰域，所以$f(x)$終極地在$(h-e,h+e)$中。同理，$g(x)$也是終極地在$(k-e,k+e)$中。因此，終極地，下列兩式同時成立

$$h-e<f(x)<h+e \text{ 及 } k-e<g(x)<k+e。$$

由上述不等式得

$$h+k-2e<f(x)+g(x)<h+k+2e$$

此卽表示$f(x)+g(x)$在U中。因此，對任一$h+k$的鄰域U　$f(x)+g(x)$必終極地在U中。所以$f(x)+g(x)$具有極限$h+k$。

現在再來討論當h與k中有一個是無窮大$+\infty$的情形。我們可設$h=+\infty$。則由于$h+k$有定義，所以k決不是$-\infty$，因此$h+k=+\infty$。令U爲$h+k$的任一鄰域，並設c爲U中任意有限數，則可知$(c,\infty]$是包含在U中。再設b爲任一小於k的數，則$(b,+\infty]$昨k的鄰域。因爲$f(x)$能終極地在$(c-b,+\infty]$中，而且$g(x)$也是終極地在$(b,+\infty]$中。所以下式終歸能成立

$$f(x)>c-b \text{ 及 } g(x)>b,$$