高等院校数学教材同步辅导及考研复习用书

Spark®星火书业

经济应用数学基础（二）

线性代数
辅导及习题精解

（与人大第三版教材配套）

张天德 主编

联系考研，渗透精讲历年考研真题

- 知识图表 清晰梳理考点重点难点
- 典型例题 深入讲解思路方法技巧
- 习题答案 权威提供详尽准确解析
- 同步自测 快速升华应用应试能力

新华出版社

高等院校数学教材同步辅导及考研复习用书

Spark® 星火书业

经济应用数学基础（二）

线性代数
辅导及习题精解

（与人大第三版教材配套）

主　编　张天德　王　玮

副主编　李乐学　王　强

新　华　出　版　社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数辅导及习题精解/张天德主编. —北京:新华出版社.2006.8
ISBN 7-5011-7614-0

Ⅰ.线... Ⅱ.张... Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第095029号

线性代数辅导及习题精解

责任编辑:白 玉
装帧设计:星火视觉设计中心
出版发行:新华出版社
地 址:北京石景山区京源路8号
网 址:http://www.xinhuapub.com
邮 编:100043
经 销:新华书店
印 刷:济南华盛印务有限公司
开 本:880mm×1230mm 1/32
印 张:14
字 数:350千字
版 次:2006年8月第一版
印 次:2006年8月第一次印刷
书 号:ISBN 7-5011-7614-0
定 价:15.80元

本社购书热线:(010)63077122 **中国新闻书店电话:**(010)63072012
图书如有印装问题,请与印刷厂联系调换 电话:(0531)85986618

前 言

线性代数是高等院校理工科专业和部分文科专业一门重要的基础课程，也是历年硕士研究生入学考试的重点科目。

中国人民大学赵树嫄编写的《线性代数》(第三版)是一套深受广大教师和学生欢迎的、被全国很多高校普遍采用的优秀教材。经过历次修订后的第三版，更是结构严谨、逻辑清晰、层次分明、行文流畅，在讲授基础知识的同时又注意提炼和渗透数学思想方法，质量、体例臻于炉火纯青。

为了帮助广大高校在校生和正在准备考研的学子学好、复习好线性代数这门课程，我们本着“选好教材、做好辅导”的宗旨，以上述的中国人民大学赵树嫄编写的《线性代数》(第三版)为针对教材，编写了这本与之章节、内容完全同步的《线性代数辅导及习题精解》配套辅导用书，给您系统梳理教材知识结构、清晰提炼教材重点考点、深入讲解题型例题方法、权威提供课后习题答案，让您学深、吃透教材知识，打好基础，同时，又注意紧密联系考研、精讲历年真题，设计同步自测、提供高效练习，让读者在学好教材的同时积极备考硕士研究生入学考试。

全书内容章、节设置基本上与教材完全同步，共分五章，每一章又分为若干节，循着教材顺序对每一章每一节内容清晰梳理、深入讲解，每一章内容讲完后，再对整章内容重点做一回顾和加深，然后给出该章教材上的习题答案详解，提供该章同步自测题。五章教材内容辅导完毕以后，书的最后附上了 2006 年考研数学真题，供您演练自测。

每一章中每节内容讲解 由两块组成：内容简析、该节题型例题方法。

一、内容简析 包括两部分：知识结构图表、重点考点提炼

1. 知识结构图表 这一部分用直观、形象的图表形式，将该节知识结构、相互联系、逻辑关系清晰地展示给读者，让读者对本节内容了然于胸。

2. 重点考点提炼 这一部分将该节重要的知识点、考点清晰、准确地提炼出来，并用简洁的语言对学习这些重点、考点时需要注意的问题一一点明，让读者抓住重点、有针对性地进行复习。

二、题型例题方法 这一部分是每一节讲解中的核心内容，也是全书的核心内容。作者基于多年的教学经验和研究生入学考试试题研究经验，将每一节教材内容中学生需要掌握的、考研中经常考到的重点、难点、考点，归纳为一个一个的在考试中可能出现的基本题型，然后针对每一个基

本题型，举出大量的精选例题、考研真题，举一反三、深入讲解，务必使读者对每一个考查点扎实掌握、悟透吃透，并能熟练运用在具体解题中，可谓基础知识梳理、重点考点深讲、联系考试解题三重互动、一举突破，获得实际应用应试能力的全面提升。

每一例题讲解中穿插出现的“思路探索”、“方法点击”，更是巧妙点拨、处处呵护，让读者举一反三、触类旁通。

每一章后教材习题答案 这一部分对该章教材上的全部习题给出详细、准确的答案解析，解答中同时给出思路探索、方法点击，让读者做好习题的同时，回顾、巩固、深化前面的内容讲解。

每一章后同步自测题 这一部分是作者基于自己多年的教学经验并结合历年考研数学试题特点科学设计的，目的是给读者提供更多的练习机会，让读者进一步消化知识、夯实考点、提高能力。本部分设有自测题答案详解。

2006年考研数学试题解析 书的最后，附上2006年考研数学试题及解析，是为了让那些将来准备或正在准备考研的读者感受最新考研试题，提高自我检测能力水平，找出差距、调整复习。

全书内容编写系统、新颖、清晰、独到，充分体现了如下三大特色：

一、知识梳理清晰、简洁 直观、形象的图表总结，精炼、准确的考点提炼，权威、独到的题型归纳，将教材内容三下五除二、简明扼要地梳理的一清二白，便于读者快速复习、高效掌握、形成稳固、扎实的知识结构，达到提高解题能力和数学思维水平的基础。

二、能力提升迅速、互动 所有重点、难点、考点，统统归纳为一个一个的在考试中可能出现的基本题型，然后针对每一个基本题型，举出大量的精选例题、考研真题，举一反三、深入讲解，真正将知识掌握和解题能力高效结合、浑然一体，一举完成。

三、联系考研密切、实用 本书是一本教材同步辅导，也是一本考研复习用书，书中处处联系考研，例题中有考研试题，同步自测中也有考研试题，最后还附上了2006年考研数学试题及解析，更不用说讲解中处处渗透考研经常考到的考点、重点等，为的就是让同学们同步完成考研备考，达到考研要求的能力。

本书注意博采众家之长，参考了多本同类书籍，吸取了不少养分，在此向这些书籍的编著者表示感谢。同时，由于作者水平所限，不足之处，在所难免，诚恳希望读者提出宝贵意见，以便再版时改进、修正。

目 录

前 言 …………………………………………………………………… (1)

第一章 行列式 …………………………………………………………… (1)

第一节 二阶、三阶行列式 ……………………………………………… (1)

第二节 n阶行列式 ……………………………………………………… (3)

第三节 行列式的性质 ………………………………………………… (10)

第四节 行列式按行(列)展开 ………………………………………… (18)

第五节 克莱姆法则 …………………………………………………… (29)

本章知识结构及内容小结 ……………………………………………… (35)

本章教材习题全解 ……………………………………………………… (37)

同步自测题及参考答案 ………………………………………………… (62)

第二章 矩 阵 …………………………………………………………… (71)

第一节 矩阵的概念 …………………………………………………… (71)

第二节 矩阵的运算 …………………………………………………… (72)

第三节 几种特殊的矩阵 ……………………………………………… (86)

第四节 分块矩阵 ……………………………………………………… (90)

第五节 逆矩阵 ………………………………………………………… (97)

第六节 矩阵的初等变换 ……………………………………………… (119)

第七节 矩阵的秩 ……………………………………………………… (129)

本章知识结构及内容小结 ……………………………………………… (140)

本章教材习题全解 ……………………………………………………… (142)

同步自测题及参考答案 ………………………………………………… (174)

第三章 线性方程组 ……………………………………………………… (181)

第一节 线性方程组的消元解法 ……………………………………… (181)

第二节 n维向量空间 …………………………………………………… (194)

第三节 向量间的线性关系 …………………………………………… (196)

第四节 线性方程组解的结构 ………………………………………… (224)

第五节 投入产出数学模型 …………………………………………… (254)

本章知识结构及内容小结 ……………………………………………… (260)

本章教材习题全解 ……………………………………………………… (263)

同步自测题及参考答案 ………………………………………………… (290)

第四章 矩阵的特征值 …………………………………………………… (300)

第一节 矩阵的特征值与特征向量 …………………………………… (300)

第二节 相似矩阵 ……………………………………………………… (311)

第三节　实对称矩阵的特征值和特征向量 …… (328)
第四节　矩阵级数的收敛性 …… (346)
本章知识结构及内容小结 …… (349)
本章教材习题全解 …… (352)
同步自测题及参考答案 …… (367)
第五章　二次型 …… (376)
第一节　二次型与对称矩阵 …… (376)
第二节　二次型与对称矩阵的标准形 …… (383)
第三节　二次型与对称矩阵的有定性 …… (396)
第四节　正定和负定性的一个应用 …… (409)
本章知识结构及内容小结 …… (410)
本章教材习题全解 …… (411)
同步自测题及参考答案 …… (424)
2006 年考研数学真题及参考答案 …… (432)

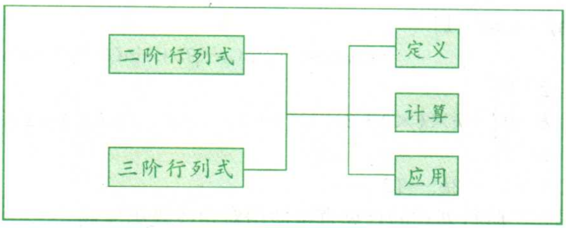
第一章 行列式

行列式是整个线性代数的基础，它要求我们在概念上要清晰，运用时要灵活，对知识的衔接与内在联系要把握好.在复习时，一方面我们应掌握行列式的各种计算方法，熟练进行行列式的计算；另一方面，我们还应注意它与其他数学知识的结合.

第一节 二阶、三阶行列式

一、内容简析

【知识结构】



【重要知识点和考点分析】

1. 二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

2. 三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$

$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$

3. 本节重点是三阶行列式的计算，在三阶行列式的展开过程中应特别注意各项的正负号.

二、题型、例题、方法

基本题型Ⅰ：二阶行列式的计算

例 1 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} a & b^2 \\ b & a^2 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ 1 & x^2-x+1 \end{vmatrix}$.

解：(1) $\begin{vmatrix} a & b^2 \\ b & a^2 \end{vmatrix}=a^2\cdot a-b^2\cdot b=a^3-b^3$；

(2) $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ 1 & x^2-x+1 \end{vmatrix}=(x+1)(x^2-x+1)-x=x^3-x+1.$

【方法点击】 计算二阶行列式使用其定义即可完成.

基本题型Ⅱ:三阶行列式的计算

例 2 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 7 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix} k & 2 & 0 \\ 2 & k & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.

解:(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 7 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}=1\times4\times3+2\times(-2)\times0+2\times7\times(-1)-0\times4\times(-1)$

$-2\times2\times3-7\times(-2)\times1=0$

(2) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha-\sin\gamma\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$

$-\sin\alpha\cos\gamma=\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)$

(3) $\begin{vmatrix} k & 2 & 0 \\ 2 & k & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}=k\times k\times3+2\times5\times0+2\times0\times4-0\times k\times4-2\times2\times3-0\times5\times k$

$=3k^2-12$

【方法点击】 三阶行列式的计算直接使用对角线规则完成.

基本题型Ⅲ:二阶、三阶行列式的应用

例 3 行列式 $D=\begin{vmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$,则 a,b 应满足( ).

(A) $a=b$ 或 $a=-b$　　(B) $a=0$ 且 $b=0$

(C) $a=-b$ 且 $a=b$　　(D) $a=0$ 或 $b=0$

解:直接把三阶行列式展开计算

$$D=\begin{vmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=a^2+b^2=0$$

则必有 $a=b=0$.

故应选(B).

例 4 设 $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}=0$,求 x 的值.

解: $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}=x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)=0$

解方程可得：$x=1$ 或 $x=-2$.

【方法点击】 本题先通过行列式计算将等式化成一元三次方程形式，然后解方程即可求得 x 的值.

例 5 函数 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & 1 & -1 \\ -x & -x & x \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数为______.

解：行列式展开后只有主对角线上三元素的乘积才出现 x^3 项，其系数为

$2\times(-1)\times 1=-2$.

故应填 -2.

【方法点击】 此类型题目不需把行列式的值计算出来，而只考虑行列式的不同行不同列乘积中出现 x^n 的项，然后将它们的系数相加即可.

例 6 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+x & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+x \end{vmatrix}=$______.

解：记行列式为 $D_3(x)$，则 $D_3(x)$ 可表示为

$$D_3(x)=(a_{11}+x)(a_{22}+x)(a_{33}+x)+\varphi(x)$$

其中 $\varphi(x)$ 为一个一次多项式

$$\frac{\mathrm{d}D_3(x)}{\mathrm{d}x}=(a_{22}+x)(a_{33}+x)+(a_{11}+x)(a_{33}+x)+(a_{11}+x)(a_{22}+x)+\varphi'(x)$$

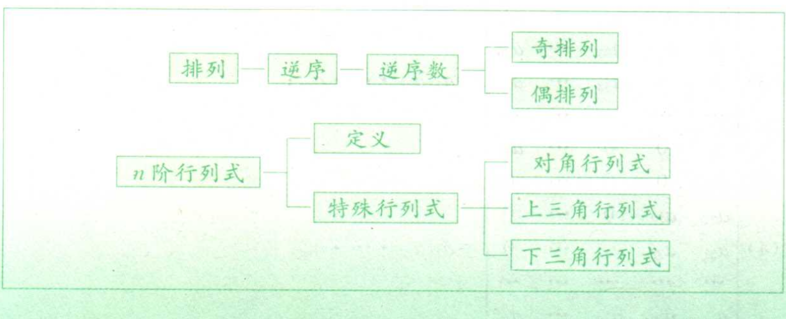
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2D_3(x)}{\mathrm{d}x^2}&=(a_{33}+x)+(a_{22}+x)+(a_{33}+x)+(a_{11}+x)\\&\quad+(a_{11}+x)+(a_{22}+x)+\varphi''(x)\\&=2(a_{11}+a_{22}+a_{33})+6x\end{aligned}$$

故应填 $2(a_{11}+a_{22}+a_{33})+6x$.

第二节 n 阶行列式

一、内容简析

【知识结构】



【重要知识点和考点分析】

1. 排列　由 n 个不同数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 称为一个 n 级排列.

2. 逆序与逆序数　在一个 n 级排列 $i_1,i_2\cdots,i_n$ 中，如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 前面 $(i_s<i_t)$，则称 i_t 与 i_s 构成一个逆序. 一个 n 级排列中逆序的总数，称为它的逆序数，记为 $N(i_1,i_2,\cdots,i_n)$. 若逆序数为奇数，则称排列为奇排列；若逆序数为偶数，则称排列为偶排列.

3. 对换　在排列中，将任两元素对调，其余不动，称为对换. 对换改变排列的奇偶性. 奇排列变成标准排列的对换次数为奇数，偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.

4. n 阶行列式的定义　由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排列成的一个 n 行 n 列的记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，它是 $n!$ 项的代数和，即　$D=\sum(-1)^N a_{1j_1}a_{2j_2}\cdot\cdots\cdot a_{nj_n}$

其中每项是取自 D 中不同行和不同列的 n 个数的乘积，$j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，N 是排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

5. 几种特殊行列式的结果

(1) $$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdot\cdots\cdot a_{nn};$$

(2) $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdot\cdots\cdot a_{n-1,2}a_{n1}$$

(3) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdot\cdots\cdot a_{nn};$$

(4) $$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdot\cdots\cdot a_{nn}.$$

6. 本节的重点是掌握 n 阶行列式的定义，这是考研中对本节考查的主要目标. 同时，我们还应熟记几种特殊行列式的结果，以备今后计算行列式时使用.

二、题型、例题、方法

基本题型Ⅰ 逆序数的求法

例1 求下列排列的逆序数

(1)134782695； (2)127986354； (3)987654321.

解：(1)$N(134782695)=\overset{5}{4}+\overset{9}{0}+\overset{6}{2}+\overset{2}{4}+\overset{8}{0}+\overset{7}{0}+\overset{4}{0}+\overset{3}{0}=10$；

(2)$N(127986354)=\overset{4}{5}+\overset{5}{4}+\overset{3}{4}+\overset{6}{3}+\overset{8}{1}+\overset{9}{0}+\overset{7}{0}+\overset{2}{0}=17$；

(3)$N(987654321)=\overset{1}{8}+\overset{2}{7}+\overset{3}{6}+\overset{4}{5}+\overset{5}{4}+\overset{6}{3}+\overset{7}{2}+\overset{8}{1}=36$.

【方法点击】 求逆序一般可由上面给出的公式依次计算，即从最后一个数字开始，每个数字与前面数字逐个比较，从而得到每个数字的逆序数，然后加起来. 对初学者来说，可按本例给出的虚线对应，以免出错.

例2 求下列排列的逆序数，并确定它们的奇偶性.

(1) $n(n-1)\cdots 3\ 2\ 1$； (2) $1\ 3\cdots(2n-1)2\ 4\cdots(2n)$；

(3) $1\ 3\ 5\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 4\ 2$.

解：(1)$N(n(n-1)\cdots 3\ 2\ 1)=n-1+n-2+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

对$\dfrac{n(n-1)}{2}$奇偶性判断，应分以下情况讨论：

> 请注意：为什么要分四种情况而不是两种情况讨论

1)当 $n=4k$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}=2k(4k-1)$为偶数；

2)当 $n=4k+1$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}=2k(4k+1)$为偶数；

3)当 $n=4k+2$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+1)$为奇数；

4)当 $n=4k+3$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+3)$为奇数.

(2)排列中前 n 个数 $1,3,5,\cdots,(2n-1)$之间不构成逆序，后 n 个数 $2,4,6,\cdots,(2n)$之间也不构成逆序，只有前 n 个数与后 n 个数之间才构成逆序. 因此

$N(1\ 3\ 5\cdots(2n-1)2\ 4\ 6\cdots(2n))=0+1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

其奇偶性讨论同(1).

(3)因为前 n 个数的逆序数为 0，后 n 个数的逆序数分别为 $0,2,4,\cdots,(2n-2)$.

故 $N(1\ 3\ 5\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 4\ 2)=0+2+4+\cdots+(2n-2)=n(n-1)$.

无论 n 取何值，则 $n(n-1)$一定为偶数，故排列为偶排列.

【方法点击】 对含字母的排列求逆序数，一定要对字母进行讨论来确定其与前后

数的大小关系及其奇偶性.

例3 已知排列 $1r46s97t3$ 为奇排列,则 $r=$ ________, $s=$ ________, $t=$ ________.

解:由于排列为9级排列,所以可供 r,s,t 选择的元素有2,5,8.

不妨令 $r=2,s=5,t=8$,则 $N(124659783)=9$(奇数).

由于对换改变排列的奇偶性,所以有

$r=2,s=5,t=8$ 或 $r=5,s=8,t=2$ 或 $r=8,s=2,t=5$.

故应填2,5,8或5,8,2或8,2,5.

例4 设 $N(i_1i_2\cdots i_{n-1}i_n)=k$,则 $N(i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1)=$ ________.

解:在 n 个元素 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中,任选两个元素 i_s,i_t,则 i_s 与 i_t 必然在排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 和排列 $i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1$ 中的一个排列中构成一个逆序,于是

$$N(i_1i_2\cdots i_{n-1}i_n)+N(i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1)=C_n^2=\frac{n(n-1)}{2},$$

由 $N(i_1i_2\cdots i_{n-1}i_n)=k$ 得 $N(i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1)=\dfrac{n(n-1)}{2}-k.$

故应填 $\dfrac{n(n-1)}{2}-k$.

基本题型Ⅱ 利用行列式的定义及对换的性质求行列式中的项

例5 若 $a_{1i}a_{23}a_{35}a_{5j}a_{44}$ 是五阶行列式中带有正号的一项,则 i,j 之值应为( ).

(A) $i=1,j=3$ (B) $i=2,j=3$ (C) $i=1,j=2$ (D) $i=2,j=1$

解:由于五阶行列式的每一项是取自不同行不同列的5个元素之积,所以 i,j 只能取1,2,从而选项(A)、(B)错误.当 $i=1,j=2$ 时,所讨论项为

$$a_{11}a_{23}a_{35}a_{52}a_{44}=a_{11}a_{23}a_{35}a_{44}a_{52}$$

其逆序数 $N(13542)=3+1=4$ 为偶数,根据行列式的定义,此时该项带有正号,所以选项(C)正确.由于对换改变排列的奇偶性,所以选项(D)错误.

故应选(C).

例6 写出四阶行列式中所有带负号且包含 a_{23} 的项.

解:把带负号且包含 a_{23} 的项设为 $a_{1i}a_{23}a_{3j}a_{4k}$.要使该项带负号,当且仅当其列标所构成的排列 $i3jk$ 为奇排列.而 i,j,k 只能取1,2,4三个数.不妨设 $i=1,j=2,k=4$,则由 $N(1324)=1$ 知它是一个奇排列.由于对换改变排列的奇偶性,所以可得4312,2341(3在第二个位置不动)也是奇排列.而且,再也没有满足条件的别的奇排列(3在第二个位置不动).因此,所求的项是

$$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44},a_{14}a_{23}a_{31}a_{42},a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}.$$

基本题型Ⅲ:利用定义计算 n 阶行列式

例7 用 n 阶行列式的定义直接计算

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}$$（其中 $a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n$）.

解：由于该行列式中每一行及每一列只有一个非零元素，由 n 阶行列式定义知，D_n 只含一项 $a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_{n-1}a_n$；其中元素的下标正好是它们所在行的下标，恰好是一个标准排列，而它们所在列的下标构成的排列为 $(n-1)(n-2)\cdots 21n$，这个排列的逆序数为 $N=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

所以，$D_n=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_{n-1}a_n$.

【方法点击】 本题每行只有一个非零元素，所以只需找出行列式的非零项即可.

例8 $D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}=$________.

解：$D=\sum(-1)^N a_{1j_1}a_{2j_2}\cdot\cdots\cdot a_{5j_5}$

因为 $a_{11}=a_{14}=a_{15}=0$，所以非零元素中 j_1 只能取 2,3；

因为 $a_{41}=a_{44}=a_{45}=0$，所以非零元素中 j_4 只能取 2,3；

同样，j_5 也只能取 2,3.

又因 j_1,j_4,j_5 各不相同，故 $a_{1j_1},a_{4j_4},a_{5j_5}$ 中至少有一个要取为零.

于是有 $D=0$.

故应填 0.

例9 设 $D=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$，则 D 的展开式中 x^3 的系数为________.

解：根据行列式的定义，仅当 $a_{12},a_{21},a_{33},a_{44}$ 四个元素相乘时才能出现 x^3 项，而该项排列的逆序数为 1，所以含 x^3 项的系数为 -1.

故应填 -1

例10 计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix} x_1 & 0 & y_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & y_2 \\ y_3 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & y_4 & 0 & x_4 \end{vmatrix}$.

解：设 $D_4=|a_{ij}|_{4\times 4}$，则 D_4 中第 1 行的非零元素为 $a_{11}=x_1,a_{13}=y_1$，故 $j_1=1,3$；同理由第 2,3,4 行可求得 $j_2=2,4$；$j_3=1,3$；$j_4=2,4$. 因此 j_1,j_2,j_3,j_4 能组成

四个4级排列：1234，1432，3214，3412. 从而

$$\begin{aligned}D_4&=x_1x_2x_3x_4-x_1y_2x_3y_4-y_1x_2y_3x_4+y_1y_2y_3y_4\\&=(x_1x_3-y_1y_3)(x_2x_4-y_2y_4).\end{aligned}$$

【方法点击】 本题中行列式含零元素较多，所以根据行列式定义是找出非零项再求和即可.

例 11 计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix}1&1&2&3\\1&2-x^2&2&3\\2&3&1&5\\2&3&1&9-x^2\end{vmatrix}$.

解：当 $x=\pm1$ 时，第一、二行对应元素相同，所以 $D_4=0$. 可见 D_4 中含有因子 $(x-1)(x+1)$；当 $x=\pm2$ 时，第三、四行对应元素相同，所以 $D_4=0$，故 D_4 中应含有因子 $(x-2)(x+2)$. 由于 D 中关于 x 的最高次数为4，所以

$$D_4=A(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) \qquad ①$$

D_4 中含 x^4 的项为

$$1\cdot(2-x^2)\cdot1\cdot(9-x^2)-2(2-x^2)\cdot2\cdot(9-x^2) \qquad ②$$

比较①，②中 x^4 的系数，得 $A=-3$.

故 $D_4=-3(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

例 12 证明 $\begin{vmatrix}0&\cdots&0&a_{1n}\\0&\cdots&a_{2,n-1}&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n,n-1}&a_{nn}\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdot\cdots\cdot a_{n1}$.

证明：根据行列式的定义，行列式中项的一般形式为

$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdot\cdots\cdot a_{nj_n}$，

行列式的第1行只有 a_{1n} 为非零元素，第2行除 $a_{2,n-1}$ 和 a_{2n} 外全为零，…，则行列式只有 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdot\cdots\cdot a_{n1}$ 这一项为非零项，而这一项的列下标所成的排列的逆序数为 $N(n,n-1,\cdots,2,1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$，

于是 $\begin{vmatrix}0&\cdots&0&a_{1n}\\0&\cdots&a_{2,n-1}&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n,n-1}&a_{nn}\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdot\cdots\cdot a_{n1}$.

【方法点击】 本题的证明实际上就是计算等式左边的行列式，而行列式含零较多，从而只需计算非零项即可.

例 13 证明 (1) $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\0&0&0&a_{34}&a_{35}\\0&0&0&a_{44}&a_{45}\\0&0&0&a_{54}&a_{55}\end{vmatrix}=0$;

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$.

证明:(1) 由行列式定义知,

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1j_2j_3j_4j_5)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$$

若 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}\neq 0$,由题设知 j_3,j_4,j_5 只能等于 4 或 5,从而 j_3,j_4,j_5 中至少有两个相等,这与 $j_1j_2j_3j_4j_5$ 是 1,2,3,4,5 的一个全排列矛盾,故 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}=0$,于是 $D=0$.

(2) $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1j_2j_3j_4)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$

由题设,要使 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}\neq 0$,必须 j_1,j_2 取 1 或 2,而 $j_1j_2j_3j_4$ 是 1,2,3,4 的一个全排列,故 j_3,j_4 取 3 或 4,于是

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{N(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+(-1)^{N(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} \\ &\quad +(-1)^{N(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}+(-1)^{N(2143)}a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}+a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}. \end{aligned}$$

而 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})(a_{33}a_{44}-a_{43}a_{34})$

$= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}+a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$

所以等式成立.

【方法点击】 利用行列式定义展开后,行列式的项中有一元素为零时,该项值为零,便可简化结果.

例 14　任意 n 元排列 $x_1x_2,\cdots,x_n$,一定可以经过不超过 n 次的对换变为 n 元排列 $12\cdots n$.

证明:对 n 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时,结论显然成立. 假设对 $n-1$ 元排列结论成立,考虑 n 元排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$. 若 $x_n=n$,则 $x_1x_2\cdots x_{n-1}$ 是 $1,2,\cdots,n-1$ 的一个 $n-1$ 元排列,由归纳假设,经不多于 $n-1$ 次对换,$x_1x_2\cdots x_{n-1}$ 变为 $12\cdots(n-1)$,从而,经不多于 n 次(实际是不多于 $n-1$ 次)对换,$x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 变为 $12\cdots(n-1)n$. 结论成立. 若 $x_n\neq n$,设 $x_i=n(i<n)$,则可先对 $x_1\cdots x_i\cdots x_{n-1}x_n$ 进行对换 (x_i,x_n),得到 $x_1\cdots x_n\cdots x_{n-1}x_i$,化为已证的情况. 结论也成立. 根据数学归纳法原理,结论得证.

【方法点击】 对于n元排列的证明问题，我们通常是把原排列经过一次对换，看得到什么结果，然后再通过数学归纳法证明.

第三节 行列式的性质

一、内容简析

【知识结构】

行列式的性质 —— 行列式的计算

【重要知识点和考点分析】

1. 行列式经转置后其值不变，即$D^T=D$.

2. 行列式中任意两行(列)互换后，该行列式的值改变符号.

推论 如果行列式中两行(列)的对应元素完全相同，则该行列式的值等于零.

3. 用数k乘行列式某一行(列)中所有元素，等于用k去乘此行列式，即

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=kD$$

推论 如果行列式某行(列)的所有元素有公因子，则此公因子可以提到行列式外面.

4. 如果行列式有两行(列)的对应元素成比例，则此行列式的值等于零.

5. 如果行列式的某行(列)的元素都是两个数的和，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+a_{i1}' & a_{i2}+a_{i2}' & \cdots & a_{in}+a_{in}' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\ (i\text{ 行})$$

则此行列式可以写成两个行列式的和，即

$$D=D_1+D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}' & a_{i2}' & \cdots & a_{in}' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 如果行列式某一行(列)的元素都是$m(\geqslant 2)$个数的和，则此行列式可以写成m个行列式的和.