普通高等教育“十五”国家级规划教材配套参考书

工科数学分析基础教学辅导书

（上册）

武忠祥　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育"十五"国家级规划教材配套参考书

工科数学分析基础
教学辅导书

（上册）

武忠祥　主编

高等教育出版社

内容提要

本书是"高等教育百门精品课程教材建设计划"(此计划作为整体已列入新闻出版总署"十五"国家重点图书规划)研究成果之一,是与西安交通大学马知恩和王绵森教授主编的普通高等教育"十五"国家级规划教材《工科数学分析基础》(第二版)(上册)相配套的教学辅导书。

本书每章内容分为三个部分:主要内容剖析;教学要求、典型例题与讨论题;习题选解。本书可作为工科学生学习高等数学课程的学习辅导书,并兼顾任课教师的教学需要,同时也可供其他非数学类专业的学生和教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析基础教学辅导书. 上册/武忠祥主编.
—北京:高等教育出版社,2006.9
ISBN 7-04-020052-X

Ⅰ.工... Ⅱ.武... Ⅲ.数学分析-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 091930 号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2006年9月第1版
印　　张	28.75	**印　　次**	2006年9月第1次印刷
字　　数	540 000	**定　　价**	29.90元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　20052-00

郑重声明

策划编辑　马　丽

责任编辑　张耀明

封面设计　张　志

责任绘图　尹文军

版式设计　马静如

责任校对　姜国萍

责任印制　宋克学

前　　言

本书是与马知恩和王绵森教授主编的普通高等教育“十五”国家级规划教材《工科数学分析基础(第二版)》(上册)(本书中均简称《教材》)相配套的教学辅导书,是“高等教育百门精品课程教材建设计划”(此计划作为整体已列入新闻出版总署“十五”国家重点图书规划)研究成果之一,主要面向使用该《教材》的学生,也兼顾教师的教学需要,对于使用其他同类教材学习高等数学的学生和教师也是一本有益的教学参考书。

如何编写一本好的教学辅导书,是值得认真讨论和探索的。我们认为,教学辅导书不仅要分析解题思路、讲解解题方法、提高学生的解题能力,而且要通过对基本概念、基本理论和重要思想方法的深入剖析,加深学生对所学内容的理解,提高学生的能力和素养。教学辅导书既应成为传授知识的载体,又应成为提高能力和培养素质的载体。本书就是按照上述想法所作的初步尝试,按照《教材》中各章内容的顺序,每章均包含以下三部分内容。

一、主要内容剖析

对《教材》中各章的主要概念、主要定理和重要的思想方法以问题的形式进行深入的剖析,以便使读者更好地理解概念的本质和理论的含义,掌握一些常用的数学思想方法,提高分析问题的能力、应用能力和自主学习的能力。对某些内容,我们还作了适当的延伸,其中打 * 号的问题或段落属于要求较高的内容,可供教师和学有余力的学生选读。

二、教学要求、典型例题与讨论题

该部分按照《教材》中的顺序,将每章编写成若干讲,每一讲的内容大体相当于一次习题课或讨论课,并且包含以下四个方面:

1. 教学要求与学习注意点

我们在教育部高教司 1995 年颁布的《高等数学课程教学基本要求》的基础上,结合本《教材》的特点和我校的教学实践,进行了细化和补充,提出了基本要求,并指出学生在学习中应当特别注意和容易忽略、容易发生错误的地方,供学生和教师参考。

2. 典型例题

在《教材》中已有例题和习题的基础上,又精选了一些概念性,启发性和综合性较强的例题,通过“分析”、“解答”和“注释”,分析解题思路,阐述有关的思想方

法，指出常见错误，对问题的类型和解法进行归纳总结，以使读者能够举一反三，提高分析和解决问题的能力，这些例题也可供习题课选用。

3. 讨论题

针对学生在学习中遇到的带有普遍性的疑难问题，包括对某些主要概念的理解，重要定理的条件分析和使用、典型解题思路和方法的总结，以及某些似是而非论证的辨析等编写了一些讨论题，可供习题课或讨论课选用，也可供学生在课后思考和讨论，在书后的附录中对每个讨论题都给出了简要解答或提示。

4. 练习题

这部分练习题可供学生在习题课内或课后练习之用，每道题均在书后的附录中给出了答案或提示。

三、习题选解

对原《教材》中初学者感到比较困难或比较典型的部分习题（约占所配习题的三分之一）给出了解答或提示，供参考，对这些解答，希望读者按照“先做后看”的原则，坚持独立完成，只有这样，才能取得好的效果，现在市场上流行一种关于我们编写的《教材》中习题的全解，是未经过我们的授权编写的，不符合我们的意愿，对于其中的错误和问题应由其编者负责！

为了便于学生在期中和期末进行自我检查和复习，本书中编写了两套自我检测题，并在附录中给出了答案或提示。

参加本书编写的有马知恩、王绵森、武忠祥、高安喜和张娟，由武忠祥任主编。其中第一部分（主要内容剖析）由马知恩和王绵森编写，第二部分（教学要求、典型例题与讨论题）由武忠祥和高安喜编写，第三部分（习题选解）由张娟编写。在编写过程中，我们得到了高等教育出版社的资助和大力支持，在此表示衷心的感谢。

由于我们缺乏编写这类教学辅导书的经验，加之成书时间仓促，作者水平有限，不妥和错误之处在所难免，恳请同行与读者不吝赐教，批评指正。

编 者

2005 年 12 月于西安交通大学

目 录

第一部分 主要内容剖析

第二部分 教学要求、典型例题与讨论题

第三部分　习题选解

第一部分　主要内容剖析

第一章　函数、极限、连续

1. 从函数到映射

(1) 函数概念发展的历史概要

为了深刻理解函数的概念，我们简要地介绍一点关于函数概念发展的历史知识.

从 17 世纪 70 年代微积分的创立，大约经历了一个半世纪，人们才弄清楚函数的概念. 17 世纪欧洲工业革命的兴起，不但推动了社会生产力的发展，而且也加深了人类对自然界的认识. 客观世界的事物都处于运动变化之中，为了描述运动，就需要引入变量；为了研究运动变化的规律，就需要研究变量间相互联系相互依赖的关系，促成了函数概念的产生. 例如，天文学家 Galileo 首先用公式 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 表示自由落体通过的路程与时间的关系；Descartes 与 Fermat 创立了解析几何，使运动可以通过曲线来表示(例如用抛物线表示弹道等)；Newton 用“流量”来表示随时间变化的量等. 最早提出“函数”这个词的是 Leibniz，他用函数表示任何随曲线上点变动而变动的量(例如点的纵坐标、切线和法线的长度等). 1714 年他在《历史》一书中，用函数表示依赖于一个变量的量. J. Gregory 在 1667 年说过：“函数是这样一个量：它是从其他的量经过一系列代数运算而得到的，或者是经过任何其他可以想像的运算而得到的.”直到 1734 年 Euler 才在他的著作《引论》中首次用符号 $f(x)$来表示函数. 18 世纪初，微积分已得到迅速发展，但函数概念仍停留在变量间的依赖关系或由运算(甚至代数运算)得到的量这样含糊不清的表述中.

1750 年左右，由于没有精确的函数概念，引发了一场对 D'Alembert 所研究的弦振动问题的争论. 作为这场争论的一个结果，使得多数数学家对一个函数必须处处具有相同的解析表达式的看法受到了挑战，Euler 和 Largrange 允许函数在不同区域上具有不同的表达式. Fourier 关于热传导问题的研究进一步拓广了人们对函数概念的认识. 他一方面主张函数不必表示为任何解析表达式，另一方面，在某种程度上又同意函数的解析表达式可以是一个 Fourier 级数的观点. 从而动摇了 18 世纪初认为所有函数都应是代数函数推广的信念.

函数概念的更精确的描述是由 Cauchy 和 Dirichlet 给出的. 1821 年，Cauchy 在他的分析教科书中对函数概念给出了比较明确的表述：“当变量之间

这样联系起来的时候，即给定了这些变量中一个的值，就可以决定所有其他变量的值的时候，人们通常想像这些量是用其中的一个来表达的，这时这个量就取名为自变量，而由这个自变量表示的其他量就叫做这个自变量的函数."Cauchy 也清楚无穷级数是规定函数的一种方法，但是对函数来说不一定要有一个解析表达式. 1837 年，Dirichlet 在一篇名为《用正弦和余弦级数来表示完全任意的函数》论文中，给出了与现在的表述非常接近的函数定义：如果对于给定区间上的每一个 x 的值有唯一的一个 y 的值同它对应，那么 y 就是 x 的一个函数. 接着他还指出，至于在整个区间上 y 是否按照一种或多种规律依赖于 x，或者 y 依赖于 x 是否可用数学运算来表达，那都是无关紧要的. 事实上，他于 1829 年还给出了现在称为 Dirichlet 函数的著名例子(见《教材》第一章例 1.9)，说明他对函数概念的内涵已经认识得很清楚了.

(2) 函数概念的内涵

从函数概念发展的简要历史中可以看到，它是在人类对客观世界认识的不断深化中逐步完善和精确化的. 现在的教科书中对函数概念的数学定义都写得更加精练、更加广泛而严谨了，读者应当透过定义理解它的丰富内涵. 主要有以下几点：

1° 现实世界的各种事物在运动变化过程中不是孤立的、互不相关的，而是相依相随的，因此，描写事物变化的各个变量在变化过程中也是相互联系、相互依赖的. 函数就是刻画在变化过程中变量相互联系相互依赖的数量关系的一个重要的数学概念.

2° 函数定义中包含三个要素：定义域，即自变量的取值范围；自变量与因变量之间的对应法则；值域，即对于自变量在定义域内取得的每个值按照对应法则所得到的因变量对应值的全体. 由于值域是由定义域和对应法则确定的，因此，定义域与对应法则是函数定义中的两个基本要素.

3° 对应法则是因变量与自变量之间函数关系的具体表现，是函数定义中的本质要素. 对应法则必须是明确的，能由自变量的给定值唯一确定一个因变量的值. 至于对应法则是用什么方式表示的，是否能用一个数学公式来表达，都是无关紧要的.《教材》中介绍了表示对应法则的三种常用的方法(列表法、图示法和公式法)，其中公式法是在理论研究中最常用的. 由于这种表示法形式甚多，在《教材》中随着内容的逐步展开，也会出现许多与常见的基本初等函数不同的函数表达形式，读者应当特别注意理解它们的含义. 在函数的定义域上，可以用一个公式来表示对应法则，也可以在定义域的不同子集上用不同的公式来表示对应法则，例如像 Dirichlet 函数那样分段表示的函数；分段表示的函数既可以仅用有限个公式来表示，也可以将定义域分为无限多段来表示，如取整函数等；函数的表达式既可以是显式形式 $y=f(x)$，也可以是隐式形式，即由满足一定条件

的方程 $F(x,y)=0$ 来确定，还可以用参数方程 $x=x(t)$，$y=y(t)$（$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$）来表示（见《教材》第二章）.《教材》的第三章中，将用变上限的积分或反常积分（如 Γ 函数）来表示一个函数，第四章中用无穷级数（幂级数或 Fourier 级数）表示函数，第六章中还用含参变量的反常积分来表示函数等.

(3) 函数概念的发展——映射

把函数 f 的定义域 $D(f)$ 与值域 $R(f)$ 从实数集推广到一般的集合上，便得到映射的概念（《教材》第一章定义 1.3）. 映射是函数概念的重要发展，它比函数概念广泛得多. 不但包含了一元实变函数（即从实数集 $A\subseteq\mathbf{R}$ 到实数集 $\mathbf{R}$ 的映射 $f:A\subseteq\mathbf{R}\to\mathbf{R}$）、$n$ 元实变函数（即从集合 $A\subseteq\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射 $f:A\subseteq\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$），而且包含了 n 元向量值函数，即从 $A\subseteq\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的映射 $\boldsymbol{f}:A\subseteq\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$. 例如，空间曲线的参数方程

$$x=x(t),y=y(t),z=z(t)\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

就可以表示为一元向量值函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$（$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$），空间曲线就是在映射 $\boldsymbol{r}$ 下区间 $[\alpha,\beta]\subseteq\mathbf{R}$ 到三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中的像；曲面的参数方程

$$x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v),(u,v)\in D\subseteq\mathbf{R}^2$$

可以表示为二元向量值函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$（$(u,v)\in D\subseteq\mathbf{R}^2$），曲面可以看成在映射 $\boldsymbol{r}$ 下从平面区域 D 到三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中的像（见《教材》第五章）. 如果 $D(f)=A$ 与 $R(f)=B$ 都是复平面 $\mathbf{C}$ 上的复数集，那么映射 $f:A\to B$ 就称为**复变函数**，它是复变函数这一数学学科研究的对象.

* 实际上，正如函数是经典数学（特别是微积分）的研究对象一样，映射是现代数学（特别是现代分析）的研究对象. 当 $D(f)=A$ 与 $R(f)=B$ 是具有某种性质的函数集合时，映射 $f:A\to B$ 就包含了许多更为复杂的研究对象. 例如，设 $C[a,b]$ 表示闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数全体构成的集合，$C^{(1)}[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上一阶连续可微函数的集合，则对函数 $\varphi\in C^{(1)}[a,b]$ 的求导运算 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x)=\varphi'(x)$ 就定义了一个从 $C^{(1)}[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的映射 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}:C^{(1)}[a,b]\to C[a,b]$，称它为一个**算子**；若用 $\mathscr{R}[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上 Riemann 可积函数全体构成的集合，则对函数 $\varphi\in\mathscr{R}[a,b]$ 在 $[a,b]$ 上求定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 定义了一个从 $\mathscr{R}[a,b]$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射 $\int_a^b\cdot\,\mathrm{d}x:\mathscr{R}[a,b]\to\mathbf{R}$，称它为一个**泛函**. 数学的很多领域中所研究的对象（例如，Laplace 变换、Fourier 变换、各种微分方程等）都可以看成是定义在一类函数集合上的映射（算子或泛函），它们是现代分析研究的对象（《教材》第八章）.《教材》中采用从映射的观点讲解函数，不但可以加深对函数概念的理解，还可以为读者进一步学习现代数学知识打下基础.

2. 关于实数的完备性

我们知道,一元函数微积分是研究一元函数变化的局部性质和整体性质的.一元函数是从实数集 $\mathbf{R}$ 的子集 A 到 $\mathbf{R}$ 的映射 $f: A\subseteq\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,为了研究一元函数 f 的变化性质,就需要在实数集上对函数 f 作极限运算.因此,实数集是极限理论乃至一元函数微积分的基础.

实数是有理数与无理数的总称.从几何上看,有理数在数轴上是稠密的,任何两个有理点之间存在着无穷多个有理点.但有理点不能充满数轴,就是说,有理点在数轴上不是连续分布的.而实数与数轴上的点是一一对应的,它们在数轴上是连续分布的,数轴上不存在不是实数的点.这个性质称为实数的**连续性**或**完备性**.然而,直到 19 世纪中叶,人们对实数的理解大体上仍停留在这样的直观阶段.究竟什么是无理数,无理数与有理数有什么关系,怎样精确地刻画实数的完备性,当时的数学家还没有认真地考虑过.不少人也认为无需考虑,满足于在这样的基础上进行运算.美国著名的应用数学家和数学教育家 M. Kline 教授在他的著作《古今数学思想》的第 41 章一开始就感叹道:"数学史上最使人惊奇的事实之一,是实数系的逻辑基础竟迟至十九世纪后半叶才建立起来."距微积分的创立有二百年之久!

随着数学分析严密化进程的不断加速,不少数学家认识到极限理论、微积分理论、无穷级数理论中出现的许多含糊不清甚至错误的问题都是因为对实数系的结构缺乏足够的理解.如果不能建立严密的实数系理论,极限理论乃至整个微积分大厦仍将建立在松软的地基之上! 1872 年前后,以 Dedekind、Cantor、Heine和 Weiestrass 为代表的一批著名的数学家从不同角度以不同形式完成了建立实数理论的这一历史使命.他们都以建立无理数理论这个难点为突破口,用有理数集来定义实数,其核心是刻画实数的完备性.这里不可能详细介绍他们的理论,仅简要地说明从极限运算封闭性的需要将有理数集扩充为实数集的思路和方法,揭示实数完备性的思想内涵.

为了便于理解,我们从数系的扩充说起.众所周知,人类在认识和改造客观世界的过程中,对数的认识是从正整数开始的.正整数集 $\mathbf{N}_+$ 关于加法和乘法运算是封闭的,对减法运算却不封闭.为了使减法运算封闭,必须引入负整数和数 0,这样,正整数集就扩充为整数集 $\mathbf{Z}$.然而,整数集对除法运算仍不封闭.为了使除法运算封闭,又必须引入分数,将整数集扩充为有理数集 $\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\mid p\in\mathbf{Z}, q\in\mathbf{N}_+, |p| 与 q 互质\right\}$.有理数集对于有理运算(即加、减、乘、除)都是封闭的,并且每个有理数都可以统一用分数 $\frac{p}{q}$ 来表示.当 p 能被 q 整除时,它就表示整数;不能整除时,它就是有限小数或无限循环小数.所以,从 $\mathbf{Z}$ 扩