普通高中课程标准实验教材

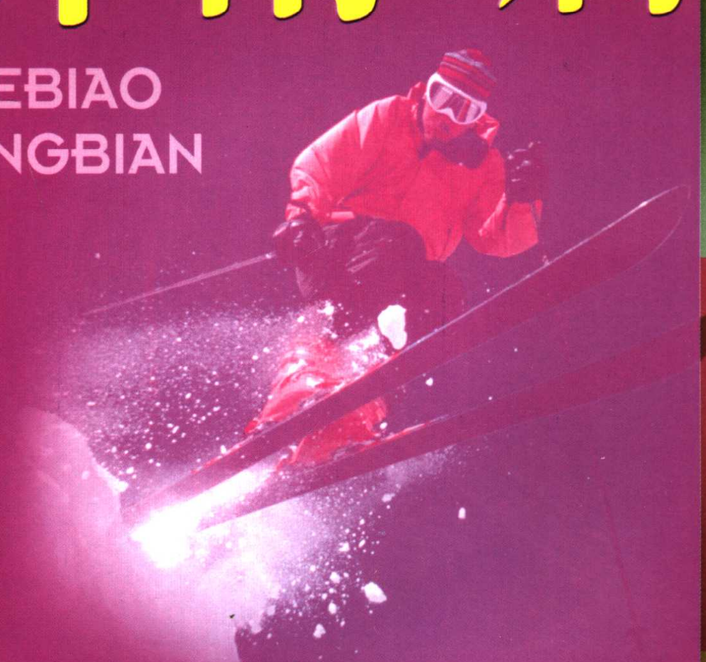
高中数学

必修⑤

GAOZHONG SHUXUE

新课标新精编

XINKEBIAO
XINJINGBIAN



主编 胡建军

配人教A版

浙江教育出版社
ZHEJIANG JIAOYU CHUBANSHE

普通高中课程标准实验教材

高中数学

必修⑤

新课标新精编

顾　问　岑　申　王而冶　金才华　许芬英

主　编　胡建军

编　者　李学军　李超儿　戴三红　冯　斌　金富军

浙江教育出版社

ZHEJIANG JIAOYU CHUBANSHE

图书在版编目(CIP)数据

新课标新精编.数学.5:必修:人教A版/胡建军著.
杭州:浙江教育出版社,2007.1

ISBN 978-7-5338-6818-5

Ⅰ.新… Ⅱ.胡… Ⅲ.数学课-高中-教学参考
资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第163586号

责任编辑 金馥菊　　**装帧设计** 韩 波
责任校对 雷 坚　　**责任印务** 温劲风

普通高中课程标准实验教材

新课标 新精编 高中数学 **必修5**

- 主　　编　胡建军
- 出版发行　浙江教育出版社
  (杭州市天目山路40号 邮编:310013)
- 图文制作　杭州富春电子印务有限公司
- 印　　刷　杭州印校印务有限公司
- 开　　本　880×1230　1/16
- 印　　张　7.25
- 字　　数　225 000
- 印　　数　00 001—10 000
- 版　　次　2007年1月第1版
- 印　　次　2007年1月第1次
- 标准书号　ISBN 978-7-5338-6818-5
- 定　　价　9.50元

联系电话:0571-85170300-80928

e-mail:zjjy@zjcb.com　　网址:www.zjeph.com

前 言

高中课程改革正在全国各地逐步展开。其中，高中数学新课程旨在提高学生的科学素养，改变学生的学习方式，从知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观三个方面培养学生。为了深入贯彻新课程标准的精神，配合人民教育出版社《普通高中课程标准实验教科书·数学》的顺利使用，帮助学生实现高中数学课程的教育目标，我们组织了教学第一线的数学特级教师和优秀中青年教师，在深入研究了《高中数学课程标准》及其各种版本实验教科书的基础上，编写了这套《新课标新精编高中数学》丛书。

本丛书的编写以"讲求循序渐进，重现科学思想与科学方法，强调实践意识与探究精神，渗透情感态度价值观的教育"为原则，与人民教育出版社《普通高中课程标准实验教科书·数学》配套。它具有以下几个鲜明的特点：

1. 同步性。本丛书的例题和练习均以课时为基本单位，根据新课程教学的要求和学生学习的特点进行编写，与教学同步，便于教师的教学和学生的使用。

2. 科学性。本丛书根据新课标学习的需要，设置了"学法指导"、"基础例说·基础训练"、"应用·拓展·综合训练"、"自我评估"、"高考链接"五个栏目。"学法指导"帮助学生深刻理解教材的重点、难点和目标要求。"基础例说·基本训练"分例说和训练两部分，"例说"以典型例题为载体，教给学生思考问题、分析问题和解决问题的策略和方法；"训练"目的在于让学生通过训练，巩固所学知识，发展思维能力。"应用·拓展·综合训练"纵览全章，起到复习、巩固、拓展、加强应用和综合训练的作用。"自我评估"为全章知识的综合评估，分A，B两份试卷，其中A卷为基本要求，B卷为较高要求。"高考链接"选取近三年有代表性的高考真题，让学生试做，以同步了解高考命题的基本特点。

3. 层次性。为了适应不同学习水平的学生的不同要求，以及学生在不同学习阶段的不同要求，本丛书选编的训练题都分为"A组"和"B组"两组，分别反映了课程的基础性目标和发展性目标。使不同层次的学生都能够充分获益，也符合循序渐进的学习原则。

4. 新颖性。本丛书力求体现新课程的理念，突出数学探究、联系实际，注重激发学生学习的兴趣，力求反映近年来高中数学教学和命题研究的最新成果，所选习题无论是在内容上，还是在形式上，都具有一定的新颖性。

由于时间匆促，加上作者对新课程的认识有待进一步提高，本丛书在编写时难免出现一些不足之处，敬请广大师生指正。

浙江教育出版社

2007年1月

目 录

第一章　解三角形

学法指导

本章主要内容是通过对任意三角形边角关系的探究,发现并掌握三角形中的边长与角度之间的数量关系,并运用这些知识解决一些与测量和计算有关的实际问题.

学习目标

1. 通过对任意三角形边长和角度关系的探索,掌握正弦定理、余弦定理,并能解决一些简单的三角形度量问题.

2. 能够运用正弦定理、余弦定理等知识和方法解决一些与测量和计算有关的实际问题.

重点、难点

重点是通过对三角形边角关系的探究,证明正弦定理和余弦定理,以及运用正弦、余弦定理解决一些简单的实际问题.

难点是通过对三角形边角关系的探究,证明正弦定理和余弦定理.

主要概念、定理、公式及规律

在三角形 ABC 中,角 A,B,C 对应的边分别为 a,b,c,记 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

1. 正弦定理:$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

2. 余弦定理:$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$,

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

3. 运用正弦定理、余弦定理可解的三角形类型有:

(1) 已知三角形的三边,解三角形;

(2) 已知三角形某两边和它们的夹角,解三角形;

(3) 已知三角形的任意两个角与一边,求其他两边和另一角;

(4) 已知三角形的两边和其中一边的对角,求另一边的对角,进而求出其他的边、角.

4. 三角形面积公式:

记△ABC 的面积为 $S_{\triangle ABC}$,则有:

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$,

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$,

$S_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

$S_{\triangle ABC}=\frac{abc}{4R}$.

其中 h_a,h_b,h_c 分别是△ABC 的边 a,b,c 上的高,R 为△ABC 外接圆的半径.

学习方法指导

1. 正弦定理、余弦定理与三角形面积公式,既可以由坐标法推导,也可以运用平面向量推导,熟练掌握推导方法既有利于巩固所学知识,也有利于提高数学思维能力.

2. 正弦定理、余弦定理揭示了三角形中边、角之间的内在联系,是沟通三角形边角关系的桥梁,应正确理解正弦定理、余弦定理的内涵,熟悉它们的常见变式,并能灵活运用.正弦定理、余弦定理常见有四类应用问题:距离测量问题、高度测量问题、角度测量问题和几何计算问题.

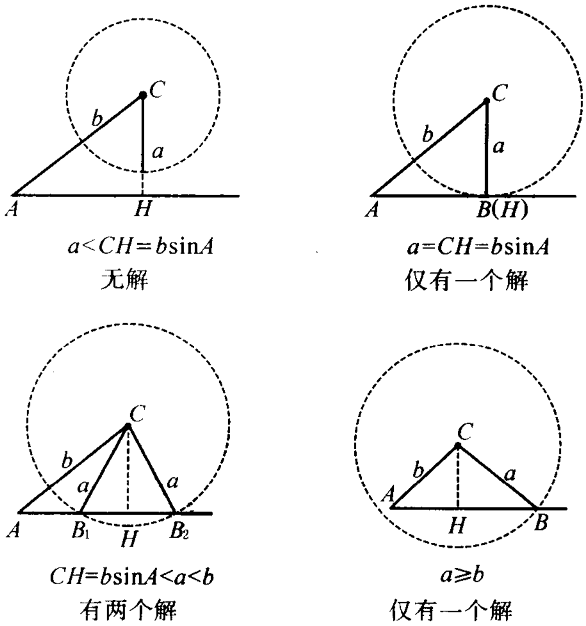
3. 解三角形问题是以三角形为载体,将几何问题转化为代数问题进行求解.

解三角形时,要注意与三角形全等判定条件相联系,已知三角形的两边和其中一边的对角时,三角形形状不确定,因此,会出现无解、一解或两解的情况.

具体情况可归纳如下:

(1) 当 A 为锐角时,如图 1-1 所示,

$$\begin{cases} a<b\sin A,\text{无解;} \\ a=b\sin A,\text{一解(直角三角形);} \\ b\sin A<a<b,\text{两解(一个锐角三角形,一个钝角三角形);} \\ a\geqslant b,\text{一解(锐角三角形).} \end{cases}$$



$a<CH=b\sin A$ 无解

$a=CH=b\sin A$ 仅有一个解

$CH=b\sin A<a<b$ 有两个解

$a\geqslant b$ 仅有一个解

图 1-1

(2) 当 A 为直角或钝角时,$\begin{cases} a\leqslant b,\text{无解;} \\ a>b,\text{一解.} \end{cases}$

基础例说·基本训练

1.1 正弦定理和余弦定理

1.1.1 正弦定理

第 1 课时 正弦定理

例 说

例 1 你能写出正弦定理吗？你能证明正弦定理吗？

解 正弦定理：在任一个三角形中，各边和它所对角的正弦比相等，即$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

证法 1 （向量法）

如图 1－2，过点 A 作单位向量 $\boldsymbol{j}$ 垂直于$\overrightarrow{AC}$.

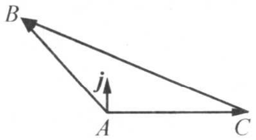


图 1－2

由$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$，

两边同乘单位向量 $\boldsymbol{j}$，得

$\boldsymbol{j}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AB}$，

则 $\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AC}+\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AB}$，

∴ $|\boldsymbol{j}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos90^\circ+|\boldsymbol{j}|\cdot|\overrightarrow{CB}|\cos(90^\circ-C)$
$=|\boldsymbol{j}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos(90^\circ-A)$，

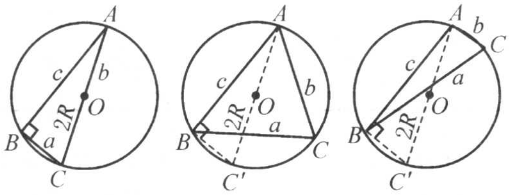
∴ $a\sin C=c\sin A$， ∴ $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$.

同理，过点 C 作 $\boldsymbol{j}$ 垂直于$\overrightarrow{CB}$，得$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$.

∴ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

证法 2 （几何法）

作△ABC 的外接圆，如图 1－3 所示.



△ABC为直角三角形时　△ABC为锐角三角形时　△ABC为钝角三角形时

图 1－3

分下列三种情况：

(1) 当△ABC 为直角三角形时，不妨设圆心 O 在斜边 AC 上，则有 $c=2R\sin C$，$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

(2) 当△ABC 为锐角三角形时，则圆心 O 在△ABC 内，连接 AO 交外接圆于点 C'，则$\angle C=\angle BC'A$，有 $2R\sin C'=2R\sin C=c$，得$\frac{c}{\sin C}=2R$. 同理，可得$\frac{a}{\sin A}=2R$，$\frac{b}{\sin B}=2R$.

∴ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

(3) 当△ABC 为钝角三角形时，同理，

可得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

综上所述，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

注意 (1) 证法 1 中，当 A 为锐角或直角时，$\boldsymbol{j}$ 与$\overrightarrow{AB}$夹角是 $90^\circ-A$；当 A 为钝角时，$\boldsymbol{j}$ 与$\overrightarrow{AB}$夹角是 $A-90^\circ$. 不论哪种情况，都有 $\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AB}=|\boldsymbol{j}||\overrightarrow{AB}|\cos(90^\circ-A)$.

(2) 由证法 2 可知，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，其中 R 是△ABC 的外接圆半径，故正弦定理可以分解成三个等式，即可表示为：$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$.

例 2 在△ABC 中，已知 $a=2\sqrt{3}$，$B=45^\circ$，$C=75^\circ$，求 c.

解 $A=180^\circ-45^\circ-75^\circ=60^\circ$，

由正弦定理得 $c=\frac{2\sqrt{3}\sin75^\circ}{\sin60^\circ}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

例 3 如图 1－4，在 Rt△ABC 中，已知$\angle B=60^\circ$，$BC=1$，等边三角形 DEF 的三个顶点 D，E，F 分别在边 AB，BC，CA 上. 设$\angle FEC=\alpha$. 当 $\sin\alpha$ 为何值时，△DEF 的边长最短？并求出最短边的长.

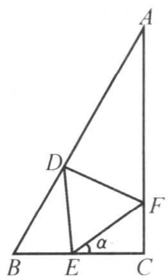


图 1－4

分析 需要求最短边的长，故考虑先建立等边三角形 DEF 的边长关于角 α 的目标函数.

解 设△DEF 的边长为 y.

∵ $\angle DEC=\angle DEF+\alpha=\angle EDB+\angle B$， ∴ $\angle EDB=\alpha$.

在△BDE 中，

由正弦定理得$\frac{y}{\sin60^\circ}=\frac{BE}{\sin\alpha}$，

得 $BE=\frac{2\sqrt{3}y\sin\alpha}{3}$.

在 Rt△ECF 中，可得 $EC=y\cos\alpha$.

∵ $BE+EC=BC=1$，

∴ $y\cos\alpha+\frac{2\sqrt{3}y\sin\alpha}{3}=1$，

∴ $y=\frac{1}{\cos\alpha+\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}\sin(\alpha+\varphi)}$$\left(其中 \tan\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

当 $\alpha+\varphi=90^\circ$，即 $\alpha=90^\circ-\varphi$ 时，$y_{\min}=\frac{\sqrt{21}}{7}$，此时 $\sin\alpha=\cos\varphi=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

注意 求最值问题可以考虑先建立目标函数，即得

到函数的解析式，根据函数解析式来确定求最值的方法.

函数解析式是一个等量关系，是联系条件与变量及函数值的等式，本例抓住等式 $1=BC=BE+EC$，借助两个三角形，把条件、变量和函数值联系起来.

训 练

A 组

1. 在△ABC 中，已知 $a=1, A=30°, B=135°$，则 b 等于(　　).

(A) 1　　(B) $\sqrt{2}$　　(C) $\sqrt{3}$　　(D) 2

2. 在△ABC 中，已知角 A,B,C 分别为 $45°,45°,90°$，则 $a:b:c$ 等于(　　).

(A) $1:1:\sqrt{2}$　　(B) $\sqrt{2}:\sqrt{2}:1$
(C) $2:2:1$　　(D) $1:1:1$

3. 在△ABC 中，已知 $\frac{a}{1}=\frac{b}{\sqrt{3}}=\frac{c}{2}$，则 A,B,C 分别等于(　　).

(A) $60°,30°,90°$　　(B) $30°,60°,90°$
(C) $45°,60°,75°$　　(D) $90°,30°,60°$

4. 在△ABC 中，已知 $A=60°, a=\sqrt{6}, b=4$，那么满足条件的△ABC(　　).

(A) 有一个解　　(B) 有两个解
(C) 无解　　(D) 不能确定

5. 在△ABC 中，一定成立的是(　　).

(A) $a\sin A=b\sin B$　　(B) $a\cos A=b\cos B$
(C) $a\sin B=b\sin A$　　(D) $a\cos B=b\cos A$

6. 在△ABC 中，已知 $A=45°, B=60°, b=6$，则 $a=$________.

7. 在△ABC 中，如果 $\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{2}{3}$，那么 $\frac{a+b}{b}=$________.

8. 在△ABC 中，$\frac{2a}{\sin A}-\frac{b}{\sin B}-\frac{c}{\sin C}=$________.

9. 在△ABC 中，已知 $c=10, A=45°, C=30°$，求 a,b 和 B.

10. 在△ABC 中，已知 $A=17°48', C=51°8', a=287$，求 c(精确到1).

B 组

11. 已知 R 为△ABC 外接圆半径，若 $\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=k$，则 k 为(　　).

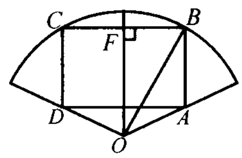
(A) $2R$　　(B) R　　(C) $4R$　　(D) $\frac{1}{2}R$

12. 在△ABC 中，已知 $A:B:C=3:4:5$，则 $a:b:c=$________.

13. 在△ABC 中，已知 $AB=10, C=50°$. 当 $B=$________时，BC 边长取得最大值.

14. 在△ABC 中，已知 $b=\sqrt{3}, B=60°, c=1$，求 a 和 A, C.

15. 如图，扇形的半径为 R，中心角 $\angle AOD=2\alpha\ \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$，内接矩形 $ABCD$ 的顶点 B,C 在圆弧上，$OF\perp BC$，垂足为点 F. 设 $\angle BOF=x$，内接矩形 $ABCD$ 的面积为 y，试写出 y 关于 x 的函数关系式.



(第15题)

课时　正弦定理(二)

例 说

例4 (1) 在△ABC 中，已知 $a=\sqrt{3}, b=3, A=30°$，求 B；

(2) 在△ABC 中，已知 $a=3, b=\sqrt{3}, A=60°$，求 B；

(3) 在△ABC 中，已知 $a=3, b=\sqrt{3}, A=120°$，求 B.

解 (1) 由正弦定理得　$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because$ $b>a$，$\therefore$ $180°>B>A=30°$，

$\therefore$ $B=60°$，或 $B=120°$.

(2) 由正弦定理得　$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{1}{2}$.

$\because$ $a>b$，$\therefore$ $60°=A>B$，$\therefore$ $B=30°$.

(3) 由正弦定理得　$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{1}{2}$.

$\because$ $a>b$，且 A 为钝角，$\therefore$ $B=30°$.

(1) 本例各小题均为已知三角形两边一对角的情况，这类问题可以运用正弦定理来求解，但通过正

弦定理得出一个对角的正弦值后，需比较边的大小得出角的大小，由此确定所求角的个数与值.

(2) 正弦定理可解三角形下列两个类型：

①已知三角形的任意两个角与一边，求其他两边和另一角；

②已知三角形的两边和其中一边的对角，求另一边的对角，进而求出其他的边、角.

例5 在$\triangle ABC$中，求证：$\dfrac{2\sin A+3\sin B}{4\sin C}=\dfrac{2a+3b}{4c}$.

分析 等式左边是角，等式右边是边，可利用正弦定理求解.

证法1 由$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，

得 $\sin A=\dfrac{a\sin C}{c}$，$\sin B=\dfrac{b\sin C}{c}$.

$\because$ 左边 $=\dfrac{2\sin A+3\sin B}{4\sin C}=\dfrac{\frac{1}{c}(2a\sin C+3b\sin C)}{4\sin C}$

$=\dfrac{2a+3b}{4c}=$右边，

所以等式成立.

证法2 由$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，

得 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$，

$\therefore$ $\dfrac{2a+3b}{4c}=\dfrac{4R\sin A+6R\sin B}{4(2R\sin C)}=\dfrac{2\sin A+3\sin B}{4\sin C}$.

利用正弦定理可以建立三角形中边角元素之间的联系，实现边角元素的互换.

例6 在$\triangle ABC$中，如果 $\lg a-\lg c=\lg\sin B=-\lg\sqrt{2}$，且$B$为锐角，试判断此三角形的形状.

解 由条件得 $\lg\dfrac{a}{c}=\lg\sin B=\lg\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore$ $\dfrac{a}{c}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且 $\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\because$ B为锐角，$\therefore$ $B=45°$. $\therefore$ $A+C=135°$.

把$A=135°-C$代入$\dfrac{a}{c}=\dfrac{\sin A}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

得$\sqrt{2}\sin C=2\sin(135°-C)$.

$\therefore$ $\sin C=\sin C-\cos C$，$\therefore$ $\cos C=0$，

$\therefore$ $C=90°$，且$A=B=45°$.

$\therefore$ $\triangle ABC$为等腰直角三角形.

本例运用正弦定理把条件中的边角元素统一到了角元素，从而解决问题.

训练

A 组

16. 在$\triangle ABC$中，已知$a=2\sqrt{3}$，$b=2\sqrt{2}$，$B=45°$，则A等于(　　).

(A) 60°或120°　　(B) 60°

(C) 30°或150°　　(D) 30°

17. 在$\triangle ABC$中，已知$a=2\sqrt{2}$，$b=2\sqrt{2}$，$B=60°$，则A等于(　　).

(A) 60°或120°　　(B) 60°

(C) 30°或150°　　(D) 30°

18. 在$\triangle ABC$中，已知$a=2\sqrt{6}$，$b=\sqrt{6}$，$B=30°$，则A等于(　　).

(A) 60°或120°　　(B) 90°

(C) 60°　　(D) 30°

19. 在$\triangle ABC$中，若$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$，则$\triangle ABC$的形状是(　　).

(A) 直角三角形　　(B) 等腰直角三角形

(C) 等边三角形　　(D) 等腰三角形

20. 在$\triangle ABC$中，已知$a=4$，$A=30°$，$B=45°$，则b等于(　　).

(A) $\sqrt{2}$　(B) $\sqrt{6}$　(C) $2\sqrt{6}$　(D) $4\sqrt{2}$

21. 在$\triangle ABC$中，若$\sqrt{3}a=2b\sin A$，则B等于(　　).

(A) $\dfrac{\pi}{3}$　　(B) $\dfrac{\pi}{6}$

(C) $\dfrac{\pi}{3}$或$\dfrac{2\pi}{3}$　　(D) $\dfrac{\pi}{6}$或$\dfrac{5\pi}{6}$

22. 在$\triangle ABC$中，若$a^2\tan B=b^2\tan A$，试判断该三角形的形状.

23. 在$\triangle ABC$中，已知$a=x$，$b=2$，$B=45°$. 若这个三角形有两解，求x的取值范围.

24. 在$\triangle ABC$中，已知$AB=10\sqrt{2}$，$A=45°$. 在边BC的长分别为20，$\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$，5的情况下，求相应的C.

25. 在$\triangle ABC$中，已知$c=\sqrt{6}$，$A=45°$，$a=2$，求b和B，C.

B　组

26. 在△ABC中,已知$A>B$,那么一定有(　　).

(A) $\tan A>\tan B$　　(B) $\cos A>\cos B$

(C) $\sin A>\sin B$　　(D) $\frac{1}{\tan A}>\frac{1}{\tan B}$

27. 有一长为 1 km 的斜坡,它的倾斜角为 20°. 现要将倾斜角改为 10°,则坡底要伸长(　　).

(A) 1 km　　(B) $\sin 10°$ km

(C) $\cos 10°$ km　　(D) $\cos 20°$ km

28. 在△ABC中,已知$BC=3,AB=2$,且$\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{2}{5}(\sqrt{6}+1)$,则$AC=$________.

29. 在△ABC中,求证:$\frac{\cos 2A}{a^2}-\frac{\cos 2B}{b^2}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}$.

30. 在△ABC中,已知$\frac{\tan B}{\tan C}=\frac{2a-c}{c}$,求$B$.

31. 在△ABC中,A,B,C的对边分别为a,b,c,求证:对于任意实数θ,恒有$a\cos(\theta-B)+b\cos(\theta+A)=c\cos\theta$.

1.1.2　余弦定理

[redacted]时　余弦定理

例说

例 1　(1) 在△ABC中,已知$a=\sqrt{3},b=3,c=\sqrt{2}$,求$\cos C$;

(2) 在△ABC中,已知$a=\sqrt{3},b=3,C=150°$,求c.

解　(1) 由余弦定理得$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$=\frac{3+9-2}{2\times3\times\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$.

(2) 由余弦定理得$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$=3+9-2\times3\times\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=21$,

∴　$c=\sqrt{21}$.

[redacted]　本例第(1)、(2)小题的已知条件分别属于下列类型:

(1) 已知三角形的三边,解三角形;

(2) 已知三角形某两边和它们的夹角,解三角形.

例 2　(1) 在△ABC中,已知$a=\sqrt{3},b=3,A=30°$,求B;

(2) 在△ABC中,已知$a=3,b=\sqrt{3},A=60°$,求B;

(3) 在△ABC中,已知$a=3,b=\sqrt{3},A=120°$,求B.

分析　若用正弦定理求解,需根据条件进行讨论,从而确定解的个数与元素的值. 下面试用余弦定理求解,看看有何特点? 选择解第(1)小题.

解　由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

得$3=9+c^2-2\times3c\cos 30°$,

即$c^2-3\sqrt{3}c+6=0$,解得$c=2\sqrt{3}$,或$c=\sqrt{3}$.

当$c=2\sqrt{3}$时,由余弦定理解得$B=60°$;

当$c=\sqrt{3}$时,同理可解得$B=120°$.

请试用余弦定理解第(2),(3)小题.

[redacted]　利用余弦定理求解虽然计算量略大些,但可避免对解的讨论,可由一元二次方程解得.

例 3　设$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\theta$ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$,求证:$x_1x_2+y_1y_2=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$.

证明　如图 1-5,设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$起点在平面直角坐标的原点$O$时,终点分别为$A,B$,则$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

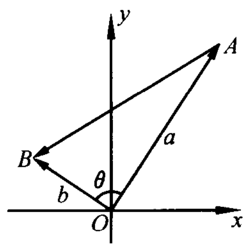


图 1-5

在△ABO中,由余弦定理得

$|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$.

∵　$|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2$

$=|(x_2-x_1,y_2-y_1)|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$,

$|\boldsymbol{a}|^2=x_1^2+y_1^2$,$|\boldsymbol{b}|^2=x_2^2+y_2^2$,

∴　$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$

$=x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$.

∴　$x_1x_2+y_1y_2=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$,

即$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$.

[redacted]　本例运用余弦定理推证向量数量积两种运算的等价关系.

训练

A　组

1. 在△ABC中,已知$a=3,b=1,C=60°$,则c等于(　　).

(A) $\sqrt{7}$　　(B) $\sqrt{13}$　　(C) 7　　(D) 13

2. 在$\triangle ABC$中，已知$a=b=\sqrt{3}$，$c=3$，则C等于(　　).
(A) 150°　(B) 120°　(C) 60°　(D) 30°

3. 在$\triangle ABC$中，已知$AB=2$，$BC=3$，$AC=\sqrt{7}$，则B等于(　　).
(A) 60°　(B) 120°　(C) 30°　(D) 150°

4. 在$\triangle ABC$中，已知$a=2x+1$，$b=3x+1$，$c=\sqrt{7x^2+5x+1}$，则C等于(　　).
(A) 30°　(B) 45°　(C) 60°　(D) 75°

5. 在$\triangle ABC$中，已知$B=120°$，则下列式子等于0的是(　　).
(A) $a^2-b^2+c^2-ac$　(B) $a^2-b^2+c^2+ac$
(C) $a^2-b^2+c^2-\sqrt{3}ac$　(D) $a^2-b^2+c^2+\sqrt{3}ac$

6. 在$\triangle ABC$中，如果$a^2>b^2+c^2$，那么$\triangle ABC$必是(　　).
(A) 直角三角形　(B) 等腰直角三角形
(C) 钝角三角形　(D) 锐角三角形

7. 在$\triangle ABC$中，已知$a=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，$b=2\sqrt{3}$，$c=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，则$B=$________.

8. 在▱$ABCD$中，已知$AB=6$，$AC=\sqrt{3}$，$\angle CAB=30°$，则$AD=$________.

9. 在$\triangle ABC$中，已知$(a+b+c)(b+c-a)=3bc$，求A.

10. 在$\triangle ABC$中，已知$a=48$，$c=63$，$B=60°$，求b，A及C(角度精确到1′)

B　组

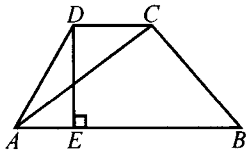
11. 边长为5，7，8的三角形的最大角与最小角之和为(　　).
(A) 90°　(B) 120°　(C) 135°　(D) 150°

12. 在$\triangle ABC$中，已知$a=7$，$b=8$，$\cos C=\frac{13}{14}$，则$\cos B=$________.

13. 已知$|\boldsymbol{a}|=7$，$|\boldsymbol{b}|=5$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=6$，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$夹角的余弦值等于________.

14. 在$\triangle ABC$中，边a,b,c的长度分别为m^2+m+1，$2m+1$，m^2-1，求这个三角形的最大角.

15. 在梯形$ABCD$中，已知$CD=2$，$AC=\sqrt{19}$，$\angle BAD=60°$，求梯形$ABCD$的高DE.



(第15题)

16. 在$\triangle ABC$中，已知$B>\frac{\pi}{2}$，$a=2x-5$，$b=x+1$，$c=4$，试写出x需满足的不等式组.

17. 在$\triangle ABC$中，已知$\sin C=\frac{3}{5}$，$\sin C+\cos C<0$，且$a=2$，$b=5$，求c.

[redacted]课时　正弦、余弦定理综合

例说

例4　在$\triangle ABC$中，求证：$\frac{\cos B}{\cos C}=\frac{c-b\cos A}{b-c\cos A}$.

分析　观察等式左、右两边，含有边、角元素，故可考虑运用正弦定理、余弦定理进行求证.

证法1　由正弦定理，得右边$=\frac{c-b\cos A}{b-c\cos A}$

$=\frac{2R\sin C-2R\sin B\cos A}{2R\sin B-2R\sin C\cos A}=\frac{\sin(A+B)-\sin B\cos A}{\sin(A+C)-\sin C\cos A}$

$=\frac{\sin A\cos B}{\sin A\cos C}=\frac{\cos B}{\cos C}=$左边，所以等式成立.

证法2　由余弦定理，得右边$=\frac{c-b\cos A}{b-c\cos A}$

$$=\frac{c-b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{b-c\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}=\frac{\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}}{\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}}=\frac{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}=\frac{\cos B}{\cos C}$$

=左边，所以等式成立.

[redacted]　正弦定理、余弦定理是三角形的边与角互化的依据.

证法1是运用正弦定理统一成角元素来证明，证法2

是运用余弦定理统一成边元素来证明.

例 5 在$\triangle ABC$中,已知$A>B>C$,且三边的长为连续自然数,$a=2c\cdot\cos C$,求$\sin A$和$\sin B$的值.

分析 已知三边的长为连续自然数,即边长可用一个未知数表示,运用余弦定理把条件中的等式的量统一为边元素,三角形的三边可求得.

解 $\because$ $A>B>C$, $\therefore$ $a>b>c$.

又$\because$ a,b,c为连续自然数,

$\therefore$ 可设$a=b+1,c=b-1$.

由$a=2c\cdot\cos C$,得$\cos C=\dfrac{a}{2c}=\dfrac{b+1}{2(b-1)}$.

由余弦定理得$\cos C=\dfrac{b^2+a^2-c^2}{2ba}$

$=\dfrac{b^2+(b+1)^2-(b-1)^2}{2b(b+1)}=\dfrac{b+4}{2(b+1)}$.

$\therefore$ $\dfrac{b+4}{2(b+1)}=\dfrac{b+1}{2(b-1)}$,

即$(b+1)^2=(b-1)(b+4)$,解得$b=5$.

$\therefore$ $a=6,c=4$.

$\therefore$ $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{8}$, $\therefore$ A为锐角,

$\therefore$ $\sin A=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$.

由正弦定理得$\sin B=\dfrac{b}{a}\sin A=\dfrac{5\sqrt{7}}{16}$.

本例在求出三角形三边的长后,可通过余弦定理来求角的正弦值,也可直接运用条件中的等式来求解.

例 6 在$\triangle ABC$中,AD是$\angle BAC$的平分线,求证:$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$.

证明 如图 1-6,

设$\angle ADB=\alpha$.

在$\triangle ABD$中,由正弦定理得

$\dfrac{BD}{\sin\dfrac{A}{2}}=\dfrac{AB}{\sin\alpha}$,

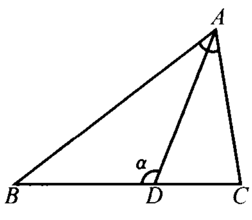


图 1-6

$\therefore$ $\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{\sin\dfrac{A}{2}}{\sin\alpha}$.

在$\triangle ACD$中,由正弦定理得$\dfrac{DC}{\sin\dfrac{A}{2}}=\dfrac{AC}{\sin(\pi-\alpha)}$.

$\therefore$ $\dfrac{DC}{AC}=\dfrac{\sin\dfrac{A}{2}}{\sin\alpha}$.

$\therefore$ $\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{DC}{AC}$, $\therefore$ $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$.

通过角的正弦比值相等,得出边比值相等,即证边相等转化为证角相等.

训练

A 组

18. 在$\triangle ABC$中,满足条件$A=60^\circ,a=\sqrt{6},b=4$的$\triangle ABC$( ).

(A) 仅存在一个 (B) 存在两个

(C) 不存在 (D) 存在无数个

19. 在$\triangle ABC$中,已知$\sin A:\sin B:\sin C=3:2:4$,则$\cos C$的值为( ).

(A) $-\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{1}{4}$

(C) $-\dfrac{2}{3}$ (D) $\dfrac{2}{3}$

20. 在$\triangle ABC$中,已知$A=30^\circ,a=2\sqrt{2},b=4$,则$c$等于( ).

(A) $2\sqrt{3}-2$ (B) $2\sqrt{3}+2$

(C) $2\sqrt{3}\pm2$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}\pm1}{2}$

21. 在$\triangle ABC$中,已知$A=30^\circ,c=2\sqrt{3},a=2$,则$b$ ________.

22. 在$\triangle ABC$中,若$\dfrac{a}{\sqrt{2}}=\dfrac{b}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{c}{2}$,则$A$的度数为________.

23. 在$\triangle ABC$中,已知$b=7,c=4$,边BC上的中线$AD=\dfrac{7}{2}$,则$a=$________.

24. 在$\triangle ABC$中,已知$a=2\sqrt{2},b=2$.如果$\triangle ABC$仅有一解,求B;如果$\triangle ABC$有两个不同的解,求B的取值范围.

25. 在$\triangle ABC$中,求证:$\dfrac{b-c\cdot\cos A}{a-c\cdot\cos B}=\dfrac{\sin A}{\sin B}$.

26. 在△ABC中，若$\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}=\frac{c}{\cos C}$，试判断△$ABC$的形状.

27. 在△ABC中，已知$A>B>C$，$A=2C$，且$a+c=2b$，$b=4$，求a，c.

28. 在△ABC中，已知$\frac{2}{\tan B}=\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan C}$，求证：$a^2+c^2=2b^2$.

B　组

29. 在△ABC中，已知$(\sin A+\sin B+\sin C)(\sin A+\sin B-\sin C)=3\sin A\sin B$，则$A$，$B$，$C$中(　　).
(A) 没有一个角等于 60°
(B) 必有一个角等于 60°
(C) 只有两个角等于 60°
(D) 三个角都等于 60°

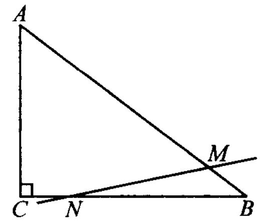
30. 在△ABC中，已知$\frac{a^3+b^3-c^3}{a+b-c}=c^2$，且$A+C=120°$，则△$ABC$的形状是(　　).
(A) 直角三角形　　(B) 钝角三角形
(C) 等边三角形　　(D) 等腰直角三角形

31. 在△ABC中，已知$B=60°$，$b^2=ac$，则A的度数为________.

32. 在△ABC中，已知$B=45°$，D是边BC上一点，$AD=5$，$AC=7$，$DC=3$，则$AB=$________.

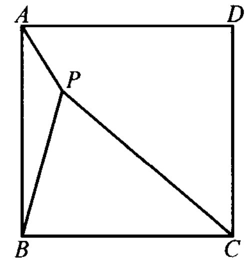
33. 在△ABC中，三角形的三边长分别为a，$a+1$，$a+2$，则△ABC中的最大角是否能取$\frac{2\pi}{3}$？若能，求出相应的a的值；若不能，请说明理由.

34. 如图，在 Rt△ABC中，$C=90°$，$AC=3$，$BC=4$，直线l交AB于点M，交BC于点N，且$CN=BM$，求线段MN的长的最小值.



(第 34 题)

35. 如图，设P是正方形$ABCD$内的一点，点P到顶点A，B，C的距离分别是 1，2，3，求正方形$ABCD$的边长.



(第 35 题)

1.2　应用举例

时　距离问题

例 说

例 1　架设在点C的测量仪测得点A位于点C的正北方向，点B位于点C的西偏北 30°方向，点D位于点C的正西方向，且$CD=1$ km. 架设在点D的测量仪测得点A位于点D的北偏东 45°方向，点B位于点D的北偏西 15°方向. 求A，B两点间的距离.

分析　首先由条件作出示意图，如图 1-7 所示. 参照图形思考：所求边AB在哪个三角形中？要解这个三角形需要知道哪些元素？

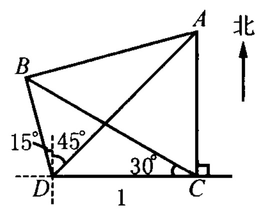


图 1-7

若AB看成△ABD的边，则需要求出BD和AD；

若AB看成△ABC的边，则需要求出AC和BC.

而已知条件$CD=1$ km，若视为△ACD的边，则AC和BC可求得；若视为△BCD的边，则BD和BC可求得.

解　在 Rt△ACD中，$CD=1$ km，$\angle ACD=90°$，

$\angle ADC=45°$，解得 $AD=\sqrt{2}$(km).

在 Rt△BCD 中，$CD=1$ km，$\angle BDC=105°$，$\angle BCD=30°$，则$\angle DBC=45°$.

由正弦定理得 $\frac{BD}{\sin 30°}=\frac{CD}{\sin 45°}$，得 $BD=\frac{\sqrt{2}}{2}$(km).

在△ABD 中，$AD=\sqrt{2}$ km，$BD=\frac{\sqrt{2}}{2}$ km，$\angle ADB=60°$，由余弦定理得 $AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos 60°=\frac{3}{2}$，即 $AB=\frac{\sqrt{6}}{2}$(km).

故 A，B 两点间的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ km.

(1) 分析题意，是否有其他解法，请尝试完成.

(2) 解与三角形有关的应用问题，首先要通过阅读，理解问题，作出示意图，在此基础上将问题转化为解斜三角形问题，从而解决问题.

(3) 测量名词.

①铅垂线：目标物与地心的连线称为铅垂线.

②水平线：过观测者眼睛而与铅垂线垂直的直线.

③视线：眼睛与观测物的连线.

④仰角：仰视目标物时，视线与水平线间的夹角.

⑤俯角：俯视目标物时，视线与水平线间的夹角.

⑥方位与方位角：从某点的指北方向起，依顺时针方向到目标方向线之间的水平角(0°～360°之间)，叫方位角.

如图 1-8，OB 的方位角是 320°，OC 的方位角是 122°.

规定东、西、南、北四个方位，表示时，一般采用上北下南、左西右东，用以上四个方位为基准线，加上旋转角度(0°～90°之间)来描述其他方位.

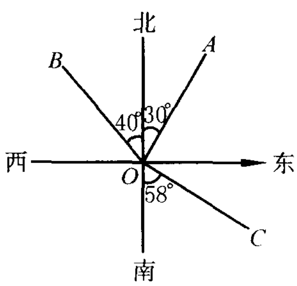


图 1-8

如："东偏北 30°"表示先向正东，然后往正北方位转 30°角所对的方位.

如图 1-8，如：

点 A 位于点 O 的北偏东 30°，也可称点 A 位于点 O 的东偏北 60°，

点 B 位于点 O 的北偏西 40°，

点 C 位于点 O 的南偏东 58°.

例 2　如图 1-9，海岛 O 上有一座海拔 300 m 的山，山顶上设有一个观察站 A. 上午 11 时测得一轮船在岛北偏东 60°的 B 处，俯角为 5°；11 时 20 分又测得该船在岛的北偏西 60°的 C 处，俯角为 10°.

(1) 该船的速度为每小时多少千米？

(2) 若此船以不变的航速继续前进，则它何时到达岛的正西方向？此时船离开岛多少千米？(精确到 1 m)

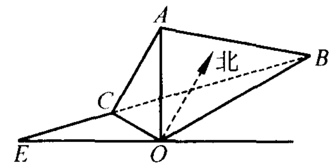


图 1-9

解　(1) 在 Rt△AOB 中，$\angle OAB=90°-5°=85°$，

∴　$OB=300\tan 85°\approx 3429.0$(m).

在 Rt△AOC 中，$\angle OAC=90°-10°=80°$，

∴　$OC=300\tan 80°\approx 1701.4$(m).

在△BOC 中，$\angle BOC=120°$，

由余弦定理得 $BC^2=OB^2+OC^2-2\cdot OB\cdot OC\cdot\cos\angle BOC$，得 $BC\approx 4526.2$(m).

于是船速 $v=4526.2\times\frac{60}{20}=13578.7\approx 14$(km/h).

(2) 设正西方向与 BC 延长线交于点 E.

在△BOC 中，由余弦定理得 $\cos\angle OCB\approx 0.7547$，于是 $\sin\angle OCB\approx 0.6561$.

$\sin\angle OEC=\sin(\angle OCB-30°)\approx 0.1908$.

在△CEO 中，由正弦定理得：$OE=\frac{OC\sin\angle OCE}{\sin\angle CEO}\approx 5850.6$(m).

从点 C 到点 E 所需时间 $t=\frac{OE}{v}=0.4309$(时)≈ 26(min).

答：船约经过 26 min 可到达海岛的正西方向，此时船与海岛相距是 5 850.6 m.

本题研究的是空间问题，解决这类问题的思路是：把条件与所求分散至若干个三角形中，借助解三角形知识解决问题.

例 3　据气象台预报，在 S 岛的正东、距 S 岛 300 km 的 A 处有一台风中心形成，并以 30 km/h 的速度向北偏西 30°的方向移动，在距台风中心 270 km 以内的地区将受到台风的影响. 设经过 t h 后台风到达点 B. 若 S 岛会受到该台风的影响，试写出 t 应该满足的关系式.

分析　因 A 为台风中心，B 为 AB 上的动点. S 岛受台风影响等价于 $SB\leqslant 270$ km. 而在△ABS 中，由余弦定理可求出 SB 的表达式.

解　如图 1-10，

由题意，$\angle SAB=60°$.

在△SAB 中，$SA=300$ km，$AB=30t$，$\angle SAB=60°$，

由余弦定理得

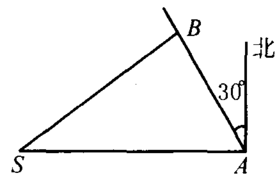


图 1-10

$$SB^2=SA^2+AB^2-2SA\cdot AB\cdot\cos\angle SAB=300^2+(30t)^2-2\cdot 300\cdot 30t\cos 60°.$$

∵　S 岛受到台风影响，则有

$|SB|\leqslant 270$，即 $SB^2\leqslant 270^2$.

化简整理得 $t^2-10t+19\leqslant 0$.

解得　$5-\sqrt{6}\leqslant t\leqslant 5+\sqrt{6}$.

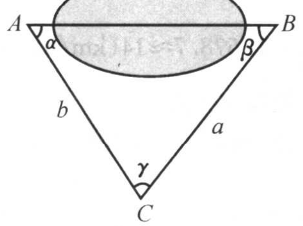
注意　随着知识的不断增加，我们还可以求出该台风的影响从何时开始？到何时结束.

训 练

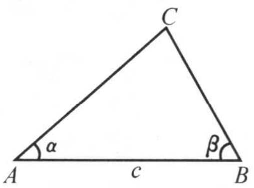
A 组

1. 如图，为了测量两隧道口 AB 的长，给出下列四组数据，一次计算便能解决测量的数据是(　　).

(A) α,a,b　(B) α,β,a　(C) a,b,γ　(D) α,β,b



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图，从海岸边 A，B 两地同时测量海上一船 C. 若测得 $AB=c$ km，$\angle BAC=\alpha$，$\angle CBA=\beta$. 同学甲用这一组数据计算得出：

①此时船 C 与 A 处相距 $\dfrac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ km；

②此时船 C 与 B 处相距 $\dfrac{c\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$ km；

③此时船 C 到海岸边 AB 的距离为 $\dfrac{c\sin\alpha\ \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ km.

同学甲的计算(　　).

(A) 只有①②是正确的　(B) 只有③是正确的

(C) 都是正确的　(D) 全部错的

3. 为了测量河的宽度，在一岸边选定 A，B 两点，观察河对岸标记物 C，测得 $\angle CAB=30°$，$\angle CBA=75°$，$AB=120$ m，则河的宽度为________.

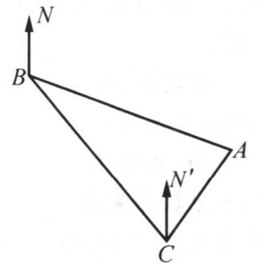
4. 炮兵为定位目标 A，选用观察点 B 和 C，测得 $BC=2.9$ km，$\angle CBA=58°$，$\angle BCA=64°$，则 B 与 A 之间的距离为________ km(精确到 0.1 km).

5. 某岛屿周围 38 n mile 内有暗礁. 现有一艘船由西向东行驶，初测此岛在北偏东 60°，航行 30 n mile 后测得岛在正东北方向. 如果船航向不变，船有无触礁危险？

6. 直线 AB 外有一点 C，$AC=150$ km，$\angle BAC=60°$，$AB=200$ km. 汽车以 80 km/h 速度由 C 向 B 行驶，同时，摩托车以 50 km/h 速度由 B 向 C 行驶. 经过多少时间两车相遇(精确到 0.1 h)？

7. 甲船在 A 处观察到乙船在它的北偏东 60° 的 B 处，此时两船相距 a km，乙船向正北方向行驶. 若甲船的速度是乙船速度的 $\sqrt{3}$ 倍. 试问：甲船以什么方向行驶才能追上乙船？此时乙船已行驶了多少千米？

8. 如图，已知货轮在海上以 40 km/h 的速度由 B 到 C 航行，航向的方位角为 140°. 又海上的 A 处有一座灯塔，从 B 观测灯塔 A 的方位角为 110°，而从 C 观测灯塔 A 的方位角是 35°. B 到 C 的航行时间用了 0.5 h，求 C 到灯塔 A 的距离.



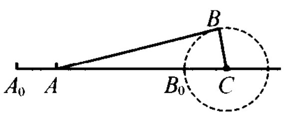
(第 8 题)

B 组

9. 已知船 A 的正北方向有一船 B 以 20 n mile/h 的速度，沿北偏西 60° 的方向行驶，A，B 两地相距 100 n mile，且船 A 以 15 n mile/h 的速度，向正北方向行驶. 两船同时出发，问：经过多少时间后，两船相距最近？最近距离为多少？

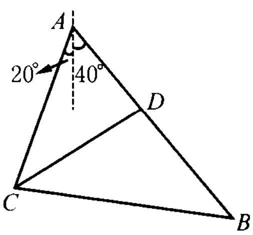
10. 某船沿正北方向航行，看见正西有相距 7.8 n mile 的两个小岛恰好与船在同一条直线上，船继续向北航行 30 min 后，看见一岛在船西南方向，另一岛在船南偏西 $22°30'$ 方向，求船的航行速度（精确到 0.1 n mile/h）.

11. 如图是曲柄连杆机的示意图，当曲柄 CB_0 绕点 C 旋转时，通过连杆 AB 的传递，活塞作直线往复运动，当曲柄在 CB_0 位置时，曲柄和连杆成一条直线，连杆的端点 A 在点 A_0 处. 设连杆 AB 长为 340 mm，曲柄 CB 长为 85 mm. 当曲柄自 CB_0 按顺时针方向旋转 80°时，求活塞移动的距离，即连杆的端点 A 移动的距离 A_0A（精确到 1 mm）.



（第 11 题）

12. 某观测站 C 在 A 城的南偏西 20°方向，由 A 城出发有一条公路的方向是南偏东 40°，由 C 处测得距 C 为 31 km 的公路上 B 处有 1 人沿公路向 A 城以5 km/h 的速度走了 4 h 后到达 D 处，此时测得 C，D 间距离为 21 km. 这人以原来的速度至少还要走多少小时才能到达 A 城？



（第 12 题）

[redacted]时 高度问题

例说

例 4 如图 1－11，为测量山顶上的电视塔 PQ 的高度，有一组同学设计出下列方法：在地面 A 处，测得 $\angle PAC=\alpha$，$\angle QAC=\beta$，由 A 处向山脚下方向前进 a m 到达 B 处，测得 $\angle PBC=\theta$，试帮助计算塔高 PQ.

分析 在已知条件下，$\triangle APB$ 的内角均可知，又由 $AB=a$，则 PA 和 PB 均可求得，因此，在$\triangle APQ$ 中，用正弦定理可求出 PQ.

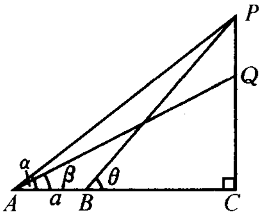


图 1－11

解 在$\triangle APB$ 中，

$AB=a$m，$\angle APB=\theta-\alpha$，

$\angle ABP=\pi-\theta$.

由正弦定理得 $\dfrac{PA}{\sin(\pi-\theta)}=\dfrac{a}{\sin(\theta-\alpha)}$，

得 $PA=\dfrac{a\sin\theta}{\sin(\theta-\alpha)}$.

在$\triangle APQ$ 中，$\angle AQP=\dfrac{\pi}{2}+\beta$，$\angle PAQ=\alpha-\beta$.

由正弦定理得 $\dfrac{PQ}{\sin(\alpha-\beta)}=\dfrac{PA}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)}$，

得 $PQ=\dfrac{a\sin\theta\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\theta-\alpha)\cos\beta}$.

[redacted] 本题还有其他解法，请动手试试.

例 5 如图 1－12，在点 B 处测得建筑物 AE 的顶端 A 的仰角为 θ，沿 BE 方向前进 30 m 至点 C 处测得顶端 A 的仰角为 2θ，再继续前进 $10\sqrt{3}$ m 至点 D 处，测得顶端 A 的仰角为 4θ，求 θ 的大小和建筑物 AE 的高.

解法 1 在$\triangle ACD$ 中，$AC=BC=30$ m，$AD=CD=10\sqrt{3}$ m，$\angle ADC=180°-4\theta$，

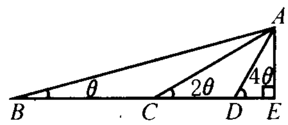


图 1－12

$\therefore\ \dfrac{10\sqrt{3}}{\sin 2\theta}=\dfrac{30}{\sin(180°-4\theta)}$.

$\because\ \sin 4\theta=2\sin 2\theta\cos 2\theta$，$\therefore\ \cos 2\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore\ 2\theta=30°$，$\therefore\ \theta=15°$.

在 Rt$\triangle ADE$ 中，$AE=AD\sin 60°=15$(m).

答：所求 θ 角为 15°，建筑物高度为 15 m.

解法 2 设 $DE=x$，$AE=h$.

在 Rt$\triangle ACE$ 中，$(10\sqrt{3}+x)^2+h^2=30^2$. ①

在 Rt$\triangle ADE$ 中，$x^2+h^2=(10\sqrt{3})^2$. ②

①－②，得 $x=5\sqrt{3}$，$\therefore\ h=15$(m).

在 Rt$\triangle ACE$ 中，$\tan 2\theta=\dfrac{h}{10\sqrt{3}+x}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore\ 2\theta=30°$，$\therefore\ \theta=15°$.

答：所求 θ 角为 15°，建筑物高度为 15 m.

[redacted] (1) 把问题转化为数学问题后，要善于挖掘题设信息. 在本题条件下，$\triangle ABC$、$\triangle ACD$ 均为等腰三角形，利用等腰三角形的性质把不同三角形的边长转化到$\triangle ACD$ 中，运用正弦定理解决问题.

(2) 解法 2 通过挖掘题设中存在直角三角形这一信