面向21世纪高校教材

线性代数习题课教程

（财经类）

主编　李　挺

苏州大学出版社

面向21世纪高校教材

线性代数习题课教程

（财经类）

主　编　李　挺

苏　州　大　学　出　版　社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数习题课教程. 财经类/李挺主编. —苏州：苏州大学出版社，2006. 12
面向 21 世纪高校教材
ISBN 978-7-81090-768-2

Ⅰ. 线… Ⅱ. 李… Ⅲ. 线性代数-高等学校-习题
Ⅳ. O151. 2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 022623 号

线性代数习题课教程(财经类)
李 挺 主编
责任编辑 谢金海

苏州大学出版社出版发行
(地址：苏州市干将东路 200 号 邮编：215021)
宜兴文化印刷厂印装
(地址：宜兴市南漕镇 邮编：214217)

开本 787mm×960mm 1/16 印张 12.25 字数 220 千
2006 年 12 月第 1 版 2006 年 12 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-81090-768-2 定价：17.00 元

苏州大学出版社营销部 电话：0512-67258835

《线性代数习题课教程》编委会

主　编　李　挺

编　委　牟红青　李　挺　杨松林

苏国荣　汪光先　徐聪敏

戴中寅

前　　言

当前，数学已经成为社会经济研究的重要工具。《高等数学》对于学习经济类专业的学生来说是一门非常重要的基础课，而习题课则是学好这门课程的重要环节。习题课是学生在教师指导下，利用已知的知识解题，从而提高理论知识的理解和运用能力的课程。在习题课上，教师不仅要培养学生分析问题、解决问题和检验结论的能力，还要帮助学生总结内容，积累解题经验、比较解题方法的适用场合和分析常见错误的性质及其产生的原因等。例题讲解是习题课的主要手段，通过具体的习题，让学生掌握一般的解题方法，理解不同方法的联系和理论依据。

有鉴于此，为配合经济类《高等数学》课程教学，我们将几年来探索习题课教学的讲义修订编写成这套习题课教程，分为微积分、线性代数、概率论与数理统计三个分册，为《高等数学》习题课教学提供一个规范。本书也可帮助学习《高等数学》的学生理清理论脉络、理解基本概念、总结解题方法。例题分析更能帮助学生提高分析问题、解决问题的能力。同时，本书对于参加竞赛或考研的学生也有参考价值。

本书按照中国人民大学出版社出版的经济应用数学基础《线性代数》（第三版）的章节顺序编排，共分为五章，每章均设计了基本要求、基本内容、典型例题解析、考研试题精选、习题这五个方面的内容。

（1）基本要求——根据线性代数的教学大纲，强调读者应以大纲要求为准进行学习；

（2）基本内容——对每章的重要定理、公式、结论进行叙述、归纳和总结，并指出重点和注意点，使读者弄清各知识点之间的相互联系，加深读者对所学内容的理解，并能正确地应用；

（3）典型例题解析——尽可能归纳了这门课程所涉及的重要题型，结合知识点给出解题分析和各种解题思路、方法、技巧，使读者能举一反

三，触类旁通，从而提高综合解题能力。

(4) 考研试题精选——从近几年财经类研究生入学统考试题中精选出一些典型题目，并进行了解答，供读者了解最新题型；

(5) 习题——本部分精选了适量的习题，只有适量的练习才能巩固所学知识，提高实际解题能力。习题后附有参考答案和部分详解，以供读者在学习过程中对照检查。

本书的编写出版，得到了苏州大学教务处、数学科学学院的大力支持；在编写过程中，编者参考了许多优秀的教材和辅导书，在此谨向有关作者表示感谢。

由于编者水平有限，不妥之处在所难免，诚请专家和读者指正。

编　者

2006 年 12 月

目　录

第四章 矩阵的特征值

*第五章 二次型

第一章　行列式

行列式最早是由解线性方程组而引进的，现在它已成为一个重要的数学工具，在线性代数中有较多的应用. 行列式的重点在于计算，要求在理解 n 阶行列式的概念、掌握行列式性质的基础上，熟练计算 3 阶、4 阶行列式，同时也要能计算简单的 n 阶行列式.

计算行列式的基本方法是用按行(列)展开公式，通过降阶来实现，但在展开之前往往先运用行列式的性质，对行列式作恒等变形，以期有较多的零或公因式，从而可简化计算. 计算时常用的技巧有：三角法、公式法、递推法、数学归纳法等.

一、基本要求

(1) 理解 n 阶行列式的定义；
(2) 熟练掌握行列式的基本性质及行列按行(列)展开的方法；
(3) 掌握行列式的基本计算方法和技巧；
(4) 掌握利用行列式解有关线性方程组的克莱姆法则.

二、基本内容

(一) 重要定义

1. n 级排列、逆序数、奇排列、偶排列

由 n 个不同数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为一个 n 级排列.

在一个 n 级排列中，如果有较大的数排在较小的数前面，则称这两个数构成一个逆序. 一个 n 级排列中逆序的总数，称为它的逆序数，记为 $N(i_1i_2\cdots i_n)$.

逆序数为偶数的排列称为偶排列；逆序数为奇数的排列称为奇排列.

2. n 阶行列式

设有 n^2 个数 $a_{ij}, i,j=1,2,\cdots,n$. 将它们排成一个 n 行、n 列的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 n 阶行列式. 记为 $D=|a_{ij}|=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$.

［注意 1］ 行列式定义对初学者而言是一个难点，掌握行列式定义必须抓住三个特点，即

(i) $j_1j_2\cdots j_n$ 是 n 级排列，由于 n 级排列的总数是 $n!$ 个，故 n 阶行列式展开式中共有 $n!$ 项；

(ii) 每项必须是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积；

(iii) 每项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 前的符号取决于 n 个元素列下标所组成排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的奇偶性.

［注意 2］ (i) n 阶行列式共有 n^2 个元素，如果其非零元素的个数小于 n 个，则行列式的值必为 0；

(ii) 若行列式有某一行(列)的元素全为 0，那么行列式的值必为 0.

3. 余子式 M_{ij}，代数余子式 A_{ij}

在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列划去后，余下的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的代数余子式，记为 M_{ij}. 称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

(二) 行列式性质

性质 1 行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等.

性质 2 交换行列式的两行(列)，行列式的值变号.

性质 3 行列式中有两行(列)的对应元素相同或成比例，则行列式的值为零.

性质 4 用数 k 乘行列式的某一行(列)的各元素，等于以数 k 乘以此行列式.

性质 5 若行列式的某一行(列)中各元素均为两项之和，则此行列式等于两个行列式之和.

［注意］ 一般地，

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix},$$

事实上

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

性质 6 将行列式的某一行(列)的所有元素同乘以数 k 后加于另一行(列)的对应位置的元素上，行列式的值不变.

(三) 重要定理

定理 1.1 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 的一般项可以记为

$$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 均为 n 级排列.

定理 1.2 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的

代数余子式乘积的和,即

按第 i 行展开公式: $D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\qquad(i=1,2,\cdots,n)$;

按第 j 列展开公式: $D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\qquad(j=1,2,\cdots,n)$.

定理 1.3　n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 的某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积的代数和等于 0,即

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=0\qquad(i\neq s),$$

$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=0\qquad(j\neq t).$$

(四) 重要公式

(1) 上(下)三角行列式的值等于主对角线元素的乘积.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) 关于副对角线的行列式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

(3) 奇数阶反对称行列式的值为 0.

(4) 两个特殊的拉普拉斯展开式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A|\cdot|B|,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = |A|\cdot|B|;$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A|\cdot|B|.$$

(5) 范德蒙(Vandermonde)行列式.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^{\ 2} & x_2^{\ 2} & \cdots & x_n^{\ 2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{\ n-1} & x_2^{\ n-1} & \cdots & x_n^{\ n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i).$$

公式推导参看例 1-14.

(6) $$D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = [(n-1)a+x](x-a)^{n-1}.$$

(五) 计算行列式的方法

(1) 定义法(参看例 1-6);

(2) 三角化法(参看例 1-7);

(3) 降阶法(参看例 1-11);

(4) 递推法(参看例 1-13);

(5) 数学归纳法(参看例 1-14);

(6) 加边法(参看例 1-15);

(7) 拆开法(参看例 1-16);

(8) 公式法(参看例 1-17);

(9) 观察法(参看例 1-20).

(六) 行列式的应用

定理 1.4(克莱姆法则) 含有 n 个方程的 n 元线性方程组的一般形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

如果方程组中系数行列式 $D=|a_{ij}|\neq 0$,D_j 为 D 中的第 j 列元素对应地换成

常数列后得到的行列式，则方程组有唯一解$x_j=\dfrac{D_j}{D}(j=1,2,\cdots,n)$.

推论 若n阶齐次线性方程组的系数行列式$D\neq0$，则方程组只有一组零解$x_j=0(j=1,2,\cdots,n)$.

[**注意**] 克莱姆法则不适用于系数行列式等于零或方程个数与未知量个数不等的方程组.

定理 1.5 齐次线性方程组有非零解，则$D=|a_{ij}|=0$.

三、典型例题解析

(一) n阶行列式的概念

例 1-1 求下列排列的逆序数：

$2n,1,2n-1,2,\cdots,n+1,n.$

分析 求一个排列的逆序数可以有两种思路.

思路一：按此排列的次序分别算出每个数后面比它小的数的个数，然后求和.

思路二：按自然数顺序分别算出$1,2,3,\cdots$前面比它大的数的个数，再求和.

此题用思路一较简便. 可以看出$1,2,\cdots,n$的后面没有比它们小的数，故逆序数为0. 而$2n$后面有$2n-1$个数比它小，故产生逆序数$2n-1$. 依此方法逐个计算.

解 $N(2n,1,2n-1,2,\cdots,n+1,n)=2n-1+2n-3+\cdots+1=\dfrac{2n\times n}{2}=n^2.$

例 1-2 已知$a_{23}a_{31}a_{ij}a_{64}a_{56}a_{15}$是6阶行列式中的一项，试确定$i,j$的值及此项所带符号.

分析 本题有两种方法：一是先将该项的行指标按自然顺序排好，然后再用到指标的奇偶性确定该项符号；二是直接计算行的逆序数和列的逆序数，再以两数之和确定该项符号.

解法一 根据行列式的定义，它是不同行不同列元素乘积的代数和，

所以$i=4,j=2$.

因为$a_{23}a_{31}a_{42}a_{64}a_{56}a_{15}=a_{15}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{64}$,

$N(5\ 3\ 1\ 2\ 6\ 4)=7$,

所以该项符号为负.

解法二 同前得$i=4,j=2$.

行标逆序数$N(2\ 3\ 4\ 6\ 5\ 1)=6$，　　列标逆序数$N(3\ 1\ 2\ 4\ 6\ 5)=3$,

$N(2\ 3\ 4\ 6\ 5\ 1)+N(3\ 1\ 2\ 4\ 6\ 5)=9$,

所以该项符号为负.

例 1-3 设 $f(x)=\begin{vmatrix} a_1+x & b_1+x & c_1+x \\ a_2+x & b_2+x & c_2+x \\ a_3+x & b_3+x & c_3+x \end{vmatrix}$ 是 x 的多项式，x 的最高幂次至多为________.

解 将 $f(x)$ 的第一行的 -1 倍分别加到第二、三行，得

$$f(x)=\begin{vmatrix} a_1+x & b_1+x & c_1+x \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 & c_3-c_1 \end{vmatrix}.$$

由于行列式是不同行、不同列元素的乘积，所以 $f(x)$ 作为 x 的多项式，其最高幂次至多为 1.

例 1-4 由行列式定义，计算

$$f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ x & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$ 展开式中 x^4 与 x^3 的系数.

分析 按行列式定义，行列式中每一项元素都是不同行不同列元素的乘积，要构成 x^4，只能是 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$. 而构成 x^3 的共有三项.

解 由行列式定义可知 $f(x)$ 中 x^4 一定取 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 的元素之积，且该项符号为正，所以 x^4 的系数为 2. $f(x)$ 中 x^3 项，即该项有 3 个元素是取自不同行、不同列的 x 一次项元素，而另一个元素为常数，所以，应该取 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$，$a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$，$a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$ 三项，此时各项逆序数分别是 $N(2\ 4\ 3\ 1)=4$，$N(2\ 1\ 3\ 4)=1$，$N(4\ 2\ 3\ 1)=5$. 所以 x^3 的系数 $=-1-1-2=-4$.

例 1-5 已知 $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$. 求：

(1) $A_{12}-A_{22}+A_{32}-A_{42}$;

(2) $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$.

分析 (1) 如果先分别算出每一个代数余子式，然后再求和，这样往往比较繁琐，我们可以观察到 $a_{11}=1$，$a_{21}=-1$，$a_{31}=1$，$a_{41}=-1$，那么就得到 $A_{12}-A_{22}+A_{32}-A_{42}=a_{11}A_{12}+a_{21}A_{22}+a_{31}A_{32}+a_{41}A_{42}=0$.

(2) 由于 A_{ij} 与元素 a_{ij} 无关，可以构造一个新行列式

$$|B|=\begin{vmatrix}1&0&1&2\\-1&1&0&3\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}$$（将$|A|$中第 4 行元素都换成 1，得到$|B|$）.

可知$|A|$与$|B|$的代数余子式 A_{41}，A_{42}，A_{43}，A_{44} 是完全一样的. 将$|B|$的第 4 行展开，就有

$$\begin{aligned}|B|&=1\cdot A_{41}+1\cdot A_{42}+1\cdot A_{43}+1\cdot A_{44}\\&=A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}.\end{aligned}$$

解 (1) $A_{12}-A_{22}+A_{32}-A_{42}=a_{11}A_{12}+a_{21}A_{22}+a_{31}A_{32}+a_{41}A_{42}=0.$

(2) 构造新的行列式

$$|B|=\begin{vmatrix}1&0&1&2\\-1&1&0&3\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}=A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}.$$

$$|B|\xlongequal[\text{加至第 4 行}]{\text{将第 3 行的}-1\text{倍}}\begin{vmatrix}1&0&1&2\\-1&1&0&3\\1&1&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=-1,$$

即 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=-1.$

(二) 行列式的计算

1. 用行列式定义计算

例 1-6 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}0&\cdots&0&1&0\\0&\cdots&2&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\2000&\cdots&0&0&0\\0&\cdots&0&0&2001\end{vmatrix}.$

分析 由于行列式中零元素较多，可以考虑用定义计算.

解 由定义知，D 中只含有一项

$$\begin{aligned}D&=(-1)^{N(n-1,n-2,\cdots,1,n)}a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{n-1,1}a_{n,n}\\&=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{n-1,1}a_{n,n}\\&=2001!\quad(n=2001).\end{aligned}$$

［**注意**］ 用 n 阶行列式的定义直接计算行列式是相当麻烦的，因此只有在特殊情况下才用此方法.

2. 三角化法

即利用行列式性质将行列式化为上(下)三角形行列式,这种方法比较容易掌握,也是计算行列式的一种常用方法.

例 1-7 计算 4 阶行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 $$D_4=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix}\quad \times(-2)\quad \times(-1)$$

$$=-\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}\quad \times(-2)$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=-9.$$

[说明] 数字行列式化为上(下)三角形行列式的一般步骤如下:

(i) 使 $a_{11}\neq 0$,乘以 $\dfrac{1}{a_{11}}$ 把 a_{11} 变为 1,但要注意,避免元素变为分数,否则将给下面的计算增加困难.

(ii) 把第一行(列)分别乘以 $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}},-\dfrac{a_{31}}{a_{11}},\cdots,-\dfrac{a_{n1}}{a_{11}}\left(-\dfrac{a_{12}}{a_{11}},-\dfrac{a_{13}}{a_{11}},\cdots,-\dfrac{a_{1n}}{a_{11}}\right)$ 加到第 $2,3,\cdots,n$ 行(列)对应元素上去,于是第一列(行)除了 a_{11} 以外其余全为 0.

(iii) 重复上面的作法,把主对角线元素 $a_{22},a_{33},\cdots,a_{nn}$ 以下(或上)的元素全化为 0.

这样行列式就化为上(下)三角行列式.

例 1-8　计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

解　$D\xlongequal[\text{都加至第 1 列}]{\text{将第 2,3,}\cdots,n\text{ 列}}(1+a_1+a_2+\cdots+a_n)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$

$\xlongequal[\text{加至第 2,}\cdots,n\text{ 行}]{\text{第 1 行乘以}(-1)}(1+a_1+a_2+\cdots+a_n)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$

$=1+a_1+a_2+\cdots+a_n.$

[**说明**] 如果行列式各行(列)元素之和相等都为 k，常用的方法是各列(行)都加到第 1 列(行)，把第 1 列(行)的公因子 k 提到行列式号外面.

例 1-9　计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$ $(a_i\neq 0,i=1,2,\cdots,n)$.
(箭形行列式)

解　$D\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{\text{第 }i\text{ 行提出 }a_i}\prod_{i=2}^{n}a_i\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \dfrac{1}{a_2} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{1}{a_3} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$