

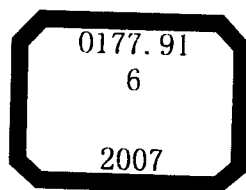


信息与计算机科学丛书

38

非线性分歧：理论和计算

杨忠华 著



国家科学技术学术著作出版基金资助出版

信息与计算科学丛书 38

非线性分歧：理论和计算

杨忠华 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书系统地介绍了非线性问题由有序走向混沌的过程中起重要作用的分歧理论及其计算,重点讨论了奇异点的分类和确定、拟弧长延拓方法、解枝的转接、路径跟踪等处理奇异性的分歧计算技巧,介绍了 Hopf 分歧、周期解的计算和分歧,还介绍了同宿轨道和异宿轨道的计算、Liapunov 指数的计算、奇异吸引子和分数维的计算等全局分歧和混沌动力学中的计算方法。

本书可作为应用数学、计算数学、非线性科学等专业的研究生教材,也可以作为相应专业本科高年级学生的选修课教材以及有关科学计算工作者和科研人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

非线性分歧:理论和计算/杨忠华著. —北京:科学出版社, 2007

(信息与计算科学丛书; 38)

ISBN 978-7-03-017820-6

I. 非… II. 杨… III. 非线性-分歧理论 IV. O177.91

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006) 第 093859 号

责任编辑:范庆奎/责任校对:张 琪

责任印制:安春生/封面设计:王 浩

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双 青 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 1 月第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2007 年 1 月第一次印刷 印张: 12 1/2

印数: 1—3 000 字数: 228 000

定价: 35.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈双青〉)

《信息与计算科学丛书》序

20 世纪 70 年代末, 由已故著名数学家冯康先生任主编、科学出版社出版了一套《计算方法丛书》, 至今已逾 30 多册. 这套丛书以介绍计算数学的前沿方向和科研成果为主旨, 学术水平高、社会影响大, 对计算数学的发展、学术交流及人才培养起到了重要的作用.

1998 年教育部进行学科调整, 将计算数学及其应用软件、信息科学、运筹控制等专业合并, 定名为“信息与计算科学专业”. 为适应新形势下学科发展的需要, 科学出版社将《计算方法丛书》更名为《信息与计算科学丛书》, 组建了新的编委会, 并于 2004 年 9 月在北京召开了第一次会议, 讨论并确定了丛书的宗旨、定位及方向等问题.

新的《信息与计算科学丛书》的宗旨是面向高等学校信息与计算科学专业的高年级学生、研究生以及从事这一行业的科技工作者, 针对当前的学科前沿、介绍国内外优秀的科研成果. 强调科学性、系统性及学科交叉性, 体现新的研究方向. 内容力求深入浅出, 简明扼要.

原《计算方法丛书》的编委和编辑人员以及多位数学家曾为丛书的出版做了大量工作, 在学术界赢得了很好的声誉, 在此表示衷心的感谢. 我们诚挚地希望大家一如既往地关心和支持新丛书的出版, 以期为信息与计算科学在新世纪的发展起到积极的推动作用.

石钟慈

2005 年 7 月

前 言

本书的写作已经酝酿有十多年了, 20 世纪 80 年代初我在美国加州理工学院做访问学者时接触了非线性分歧问题的理论和计算, 逐渐对其产生兴趣并将之作为自己的主要研究方向. 回国后, 在上海科学技术大学和上海师范大学给研究生讲授非线性分歧问题的理论和计算方面的课程时, 逐步积累了这方面的材料, 经过十多年的完善, 相对比较成熟了, 就有了出版本书的想法.

非线性科学从 20 世纪 70 年代以来发展迅速, 混沌理论作为 20 世纪物理学的三大发现之一, 得到了长足的进步, 在理解混沌的机理和非线性系统如何走向混沌的过程中, 分歧理论起了很重要的作用. 目前非线性科学的研究正方兴未艾, 受到越来越多的科技工作者的关注. 计算机的快速发展更促进了非线性问题的研究, 对复杂非线性系统的数值模拟刺激了有关计算方法的发展. 80 年代以来, 曾多次召开非线性分歧计算方面的国际会议, 出版了有关的论文集^[1~6], 总结了各种非线性分歧计算方面的研究成果. 用于非线性分歧计算的专用软件也不断涌现^[7~9].

本书作为应用数学和计算数学的研究生教材, 覆盖了非线性分歧计算的主要内容. 第 1 章介绍非线性分歧问题的实际背景和基本理论. 第 2 章介绍定常分歧的理论和计算, 包括奇异点的分类和确定、拟弧长延拓方法、解枝的转接、路径跟踪等处理奇异性的分歧计算技巧. 第 3 章介绍从定常解走向周期解的 Hopf 分歧、周期解的计算和延拓、周期解的稳定性和分歧. 第 4 章讨论高阶奇异点的计算, 包括三阶折叠点、横截分歧点、Takens-Bogdanov 点、二阶折叠/Hopf 分歧点、Hopf/Hopf 分歧点、二重奇异点的计算, 其中包括了作者的研究成果. 第 5 章介绍有关全局分歧和混沌动力学方面的计算、Liapunov 指数的计算、奇异吸引子和分数维的计算. 每章后面都附有习题, 习题的完成特别是各类数值计算题的完成对于理解课程会有重要的帮助, 其中带星号的习题绝对有必要在计算机上编程计算. 本书可以作为科学计算工作者和有关科研人员的参考书, 也可以作为应用数学和信息与计算科学专业本科高年级学生的选修课教材使用.

本书得到了许多同志的关心和帮助, 特别是作者的历届博士生和硕士生, 他们对本书的内容提出了很好的建议, 做了大量的录入工作, 在此表示衷心的感谢. 本书的出版得到了国家科学技术著作出版基金的大力资助, 并得到了上海市教育委员

会科研基金 (No.05DZ07)、上海市科技发展基金 (No.03QA14036)、国家自然科学基金项目 (No.10671130)、上海市重点学科 (No.T0401) 和上海师范大学研究生教材建设项目的支持, 在此一并表示感谢.

杨忠华

2006 年 4 月

目 录

《信息与计算科学丛书》序

前言

第 1 章 分歧理论基础	1
1.1 分歧的实际背景和例子	1
1.2 Liapunov-Schmidt 方法的两个例子	8
1.3 Liapunov-Schmidt 方法的一般框架	12
1.4 Hopf 分歧	16
习题一	18
第 2 章 延拓方法和定常分歧图的计算	20
2.1 局部延拓方法	20
2.2 奇异点的分类和确定	28
2.3 拟弧长延拓方法	41
2.4 解枝的转接	49
2.5 Z_2 对称性和对称破缺分歧	53
2.6 极小扩张系统方法	59
习题二	61
第 3 章 Hopf 分歧和周期解的延拓	64
3.1 L-S 过程和 Hopf 分歧定理	64
3.2 迭代方法	70
3.3 确定 Hopf 分歧点的数值方法	79
3.4 周期解的计算与延拓	88
3.5 周期解的稳定性和 Floquet 理论	93
3.6 单值矩阵的计算	99
3.7 周期解的分歧	100
习题三	106
第 4 章 两参数非线性分歧问题和高阶奇异点的计算	109
4.1 三阶折叠点的计算	109

4.2 简单横截分歧点的计算和性质	114
4.3 Takens-Bogdanov 点	117
4.4 二阶折叠/Hopf 分歧点	126
4.5 Hopf/Hopf 分歧点	137
4.6 二重奇异点的计算	142
习题四	149
第 5 章 全局分歧和混沌	152
5.1 通向混沌的道路	152
5.2 混沌的机理和马蹄映照	154
5.3 计算同宿轨道和异宿轨道的数值方法	163
5.4 Liapunov 指数的计算	169
5.5 奇异吸引子和分数维	177
5.6 功率谱	180
习题五	182
参考文献	184

第 1 章 分歧理论基础

20 世纪科学技术的发展日新月异, 各个学科领域均提出了复杂的数学模型以揭示事物的本质. 这些模型一般都是非线性问题, 固体力学中的 Von Karman 板问题, 流体力学中的 Taylor 问题、Benard 问题, 生物神经传导中的 Hodgkin-Huxley 方程, 大气环流中的 Lorenz 方程, 非线性振动中的 Von der Pol 方程、Duffing 方程, 非线性反应 - 扩散方程组等等都是比较著名的例子^[10~14]. 这些非线性问题一般无法用解析方法求解. 随着问题中参数的变化, 解的个数和稳定性质将会发生变化. 本书的目的是提供适当的数值方法来跟踪这些解枝, 从而为各个学科作出积极的贡献.

1.1 分歧的实际背景和例子

考虑带参数的非线性发展问题

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \lambda), \quad (1.1.1)$$

这里 $f: X \times A \rightarrow Z$, X, Z 是 Banach 空间, 参数集 A 是 $\mathbb{R}^m$ 中的某个子集. 如果式 (1.1.1) 的解不依赖于时间 t , 那么它满足定常问题

$$f(x, \lambda) = 0, \quad (1.1.2)$$

$m = 1$ 时, 式 (1.1.1) 或 (1.1.2) 称为单参数非线性问题, $m > 1$ 时则称为多参数非线性问题.

1.1.1 Euler 杆问题

定常分歧问题早在 18 世纪就已经出现, 那就是 Euler 杆问题^[15], 这是为数不多的几个可以用解析法求解的非线性分歧问题之一. 考虑平衡位置在 x 轴上的一根杆, 杆长为 l , 杆在一端点 $(0,0)$ 处被固定, 在另一端点 $(l,0)$ 处当受到水平方向的力 P 时被允许沿着 x 轴滑动. 用 s 表示杆的弧长, ϕ 表示杆上的点的切线与水平方向的夹角. 由曲率的变化与力矩成正比, 可得杆的位移方程为

$$Py = -k \frac{d\phi}{ds}, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \phi,$$

其中 k 是一个常数, 与杆的材料有关. 边界条件为

$$y(0) = y(l) = 0, \quad x(0) = 0.$$

上述问题等价于

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} + \lambda \sin \phi = 0, \quad (1.1.3a)$$

$$\phi'(0) = \phi'(l) = 0, \quad (1.1.3b)$$

其中参数 $\lambda = \frac{P}{k}$, 这是一个非线性的两点边值问题.

令

$$f(\phi, \lambda) = \frac{d^2\phi}{ds^2} + \lambda \sin \phi,$$

$$X = \{x(s) \in C^2[0, l]; x'(0) = x'(l) = 0\},$$

$$Z = C[0, l],$$

问题 (1.1.3) 就可以表达成式 (1.1.2) 的形式.

问题 (1.1.3) 显然有平凡解 $\phi = 0$, 为了用解析方法求出它的非平凡解, 令 $p(s) = \frac{d\phi(s)}{ds}$, 问题 (1.1.3) 变成

$$\begin{cases} p \frac{dp}{d\phi} + \lambda \sin \phi = 0, & (1.1.4a) \\ p(0) = p(l) = 0. & (1.1.4b) \end{cases}$$

在相平面 (p, ϕ) 上, 方程 (1.1.4a) 有首次积分:

$$\begin{aligned} G(\lambda, p(s), \phi(s)) &= c_0 = G(\lambda, p(0), \phi(0)), \\ &= G(\lambda, 0, -\phi_0), \quad 0 \leq s \leq l, \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

这里 $G(\lambda, p, \phi) = \frac{p^2}{2} + \lambda(1 - \cos \phi)$. 由式 (1.1.5), 可得

$$\begin{aligned} p &= \frac{d\phi}{ds} = \sqrt{2\lambda}(\cos \phi - \cos \phi_0)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2\sqrt{\lambda} \left(\sin^2 \frac{\phi_0}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

由轨道的对称性, 解从 $(0, -\phi_0)$ 出发, 此时 $s = 0$, 沿着轨道到达 $(0, \phi_0)$ 时 $s = s_0$ (见图 1.1),

$$\begin{aligned} s_0 &= \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_{-\phi_0}^{\phi_0} \frac{d\phi}{\left(\sin^2 \frac{\phi_0}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\left(\sin^2 \frac{\phi_0}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

作变换 $\sin \frac{\phi}{2} = \sin \frac{\phi_0}{2} \sin \psi$ 后可得

$$s_0 = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\left(1 - \sin^2 \frac{\phi_0}{2} \sin^2 \psi\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\gamma(\phi_0)}{\sqrt{\lambda}},$$

这里 $\gamma(\phi_0) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\left(1 - \sin^2 \frac{\phi_0}{2} \sin^2 \psi\right)^{\frac{1}{2}}}.$

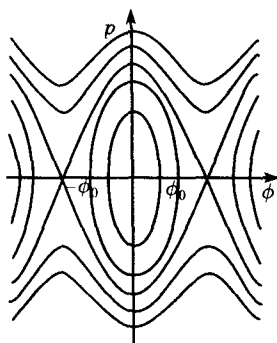


图 1.1

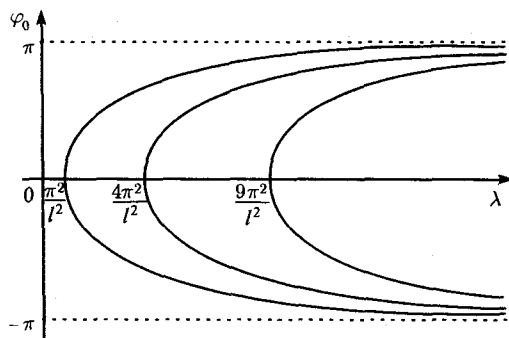


图 1.2

为了满足边界条件 (1.1.4b), 必须使 $s_0 = \frac{l}{m}$, $m \geq 1$, 于是 $\lambda = \frac{m^2 \gamma^2(\phi_0)}{l^2}$ 时, 问题 (1.1.3) 存在非平凡解. 通过计算容易得到

$$\gamma(0) = \pi,$$

$$\gamma(\pi) = +\infty,$$

$$\gamma'(\phi_0) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \phi_0 \sin^2 \psi d\psi}{\left(1 - \sin^2 \frac{\phi_0}{2} \sin^2 \psi\right)^{\frac{3}{2}}} > 0, \quad \text{当 } 0 < \phi_0 < \pi \text{ 时,}$$

$$\gamma'(0) = 0.$$

问题 (1.1.3) 的非平凡解出现在图 1.2 所示的各条曲线上.

问题 (1.1.3) 的非平凡解等价于下列初值问题的解:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \phi}{ds^2} + \lambda \sin \phi = 0, \\ \phi(0) = -\phi_0, \phi'(0) = 0. \end{cases} \quad \lambda = \frac{m^2 \gamma^2(\phi_0)}{l^2},$$

由首次积分并利用初始条件可得

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{ds} &= 2 \frac{m\gamma(\phi_0)}{l} \left(\sin^2 \frac{\phi_0}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ s &= \frac{l}{2m\gamma(\phi_0)} \int_{-\phi_0}^{\phi} \frac{d\alpha}{\left(\sin^2 \frac{\phi_0}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

作变换 $\sin \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\phi_0}{2} \sin \psi$ 后,

$$\begin{aligned} s &= \frac{l}{m\gamma(\phi_0)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin\left(\frac{\sin \frac{\phi}{2}}{\sin \frac{\phi_0}{2}}\right)} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \\ &= \frac{l}{m\gamma(\phi_0)} \left[\int_0^{\arcsin\left(\frac{\sin \frac{\phi}{2}}{\sin \frac{\phi_0}{2}}\right)} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} + K \right], \end{aligned}$$

其中 $k = \sin \frac{\phi_0}{2}$, $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}$. 从而

$$\sin \frac{\phi}{2} = k \operatorname{sn} \left(\frac{m\gamma(\phi_0)}{l} s - K \right), \quad (1.1.6)$$

$$\phi(s) = 2 \arcsin \left(k \operatorname{sn} \left(\frac{m\gamma(\phi_0)}{l} s - K \right) \right), \quad (1.1.7)$$

这里 $w = \operatorname{sn} z$ 是 Jacobi 椭圆函数, 它是第一类椭圆积分

$$z = \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}$$

的反函数. 式 (1.1.7) 即为问题 (1.1.3) 的非平凡解的解析表达式.

考虑 (1.1.3) 关于平凡解的线性化问题

$$\frac{d^2\psi}{ds^2} + \lambda\psi = 0, \quad (1.1.8a)$$

$$\psi'(0) = \psi'(l) = 0. \quad (1.1.8b)$$

这是一个 Liouville-Storm 问题, 它的单重特征值 $\lambda = \lambda_m = \frac{m^2\pi^2}{l^2}$, $m = 1, 2, \dots$, 相应的特征函数 $\psi_m(s) = \cos \frac{m\pi s}{l}$. 从图 1.2 可以看出, 问题 (1.1.3) 的非平凡解是从它的关于平凡解的线性化问题 (1.1.8) 的单重特征值 $\lambda_m = \frac{m^2\pi^2}{l^2}$ 处分岔出来的.

1.1.2 定常分枝的定义^[15]

我们用 $S \subset X \times A$ 表示定常问题 (1.1.2) 的解集. 对任何 $\lambda \in A$, 记

$$S_\lambda = \{x \in X : (x, \lambda) \in S\}.$$

假定 U 是 X 中的一个开集, 如果集合 $S_\lambda \cap U$ 和集合 $S_\mu \cap U$ 同胚, 我们就称在 U 中 S_λ 等价于 S_μ , 记为 $S_\lambda \sim S_\mu$.

定义 1.1.1 如果对 λ_0 任一邻域 V , 存在 $x_0 \in S_{\lambda_0}$ 和 x_0 的一个邻域 U , 以及 $\lambda_1, \lambda_2 \in V$, 使在 U 中 S_{λ_1} 不等价于 S_{λ_2} , 那么我们称 (x_0, λ_0) 是定常问题 (1.1.2) 的一个分枝点.

注 1.1.1 在定义 1.1.1 中, 可以允许 λ_1, λ_2 中有一个是 λ_0 , 从直观来看, 在分枝点 (x_0, λ_0) 的邻域内, 定常问题 (1.1.2) 的解的个数发生了变化. 从图 1.2 可以看出, 在 $(0, \lambda_m)$ 的邻域内, 当 $\lambda \leq \lambda_m$ 时, 只有一个平凡解, 当 $\lambda > \lambda_m$ 时, 除了平凡解外, 还有两个非平凡解存在. 所以 $(0, \lambda_m)$ 是问题 (1.1.3) 的分枝点.

引理 1.1.1 如果 (x_0, λ_0) 是定常问题 (1.1.2) 的一个分枝点, 那么 Jacobi $D_x f(x_0, \lambda_0)$ 一定是奇异的.

证明 如果 $D_x f(x_0, \lambda_0)$ 是正则的, 那么由隐函数定理, 在 (x_0, λ_0) 的邻域中, 存在唯一的解枝 $x = x(\lambda)$, 通过 (x_0, λ_0) . 由定义 1.1.1 可知 (x_0, λ_0) 不是 (1.1.2) 的一个分枝点, 得到矛盾. $\square$

注 1.1.2 引理 1.1.1 叙述了非线性分枝问题的计算中存在的一个本质性困难, 在分枝点附近求解 (1.1.2) 时, 通常的简单迭代法和 Newton 迭代法将会失效, 如何克服这一计算困难是本书的主要任务之一.

1.1.3 定常分枝问题的几个例子

例 1.1.1

$$f(u, \lambda) = -u^2 + \lambda u = 0,$$

这里 $X = Z = \mathbb{R}, m = 1$. 除了平凡解 $u = 0$ 外, 同时存在解 $u = \lambda, (u, \lambda) = (0, 0)$ 是唯一的分歧点, 这样的分歧称为横截式分歧 (见图 1.3), 相应的非线性发展方程是一阶常微分方程 $\frac{du}{dt} = -u^2 + \lambda u$. 通过计算 $f_u(0, \lambda) = \lambda$, 显示出当 $\lambda < 0$ 时, 平凡解 $u = 0$ 是稳定的, 当 $\lambda > 0$ 时, 平凡解 $u = 0$ 是不稳定的. $f_u(\lambda, \lambda) = -\lambda$, 显示出当 $\lambda < 0$ 时, 定常解 $u = \lambda$ 是不稳定的, 当 $\lambda > 0$ 时, 定常解 $u = \lambda$ 变成稳定的. 从上述分析可以知道, 当 λ 从负到正通过 0 时, 解枝的稳定性质发生了变化.

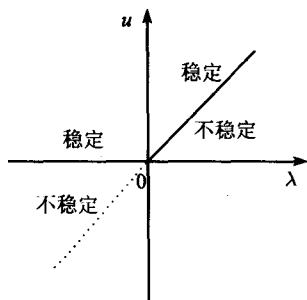


图 1.3

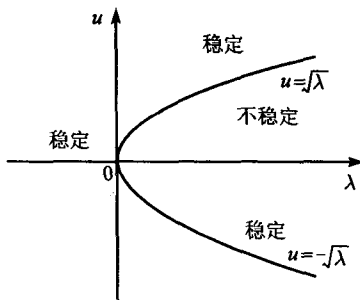


图 1.4

例 1.1.2

$$f(u, \lambda) = -u^3 + \lambda u = 0,$$

这里 $X = Z = \mathbb{R}, m = 1$. 除了平凡解 $u = 0$ 外, 还有非平凡解 $u = \pm\sqrt{\lambda} (\lambda > 0)$. $(u, \lambda) = (0, 0)$ 是唯一的分歧点. 这类的分歧点称为音叉式分歧 (见图 1.4).

相应的非线性发展方程是一阶常微分方程: $\frac{du}{dt} = -u^3 + \lambda u$. 类似地, 由 $f_u(0, \lambda) = \lambda$ 可知, 当 $\lambda < 0$ 时, 平凡解 $u = 0$ 是稳定的, 当 $\lambda > 0$ 时, 平凡解 $u = 0$ 是不稳定的. 由 $f_u(\pm\sqrt{\lambda}, \lambda) = -2\lambda$ 可知非平凡解当 $\lambda > 0$ 时是稳定的, 就是当 λ 从负到正通过 0 时, 稳定的解枝由平凡解变为非平凡解.

例 1.1.3

$$f(x, \lambda) = \begin{pmatrix} x_2(x_1^2 + x_2^2) + \lambda x_1 \\ -x_1(x_1^2 + x_2^2) + \lambda x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

这里 $x = (x_1, x_2)^T, X = Z = \mathbb{R}^2, m = 1$.

由于上述方程的所有解必须满足 $(x_1^2 + x_2^2)^2 = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, 所以上述方程只有零解 $x_1 = x_2 = 0$. 由定义 1.1.1 可知, 上述方程不存在分歧点, 当然 $(x, \lambda) = (0, 0)$ 不是它的分歧点. 虽然 $\lambda = 0$ 是上述方程关于零解的线性化方程的零特征值, 但它是二重的.

例 1.1.4

$$f(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \beta_1 x_1 + \gamma_1 x_1(x_1^2 + x_2^2) - \lambda x_1 \\ \beta_2 x_2 + \gamma_2 x_2(x_1^2 + x_2^2) - \lambda x_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (1.1.9)$$

这里 $\beta_2 > \beta_1 > 0, \gamma_1 > \gamma_2 > 0$.

上述方程显然有平凡解 $x_1 = x_2 = 0$, 还有解 $x_2 = 0, x_1 = \pm \sqrt{\frac{\lambda - \beta_1}{\gamma_1}}$ (当 $\lambda > \beta_1$ 时) 和 $x_1 = 0, x_2 = \pm \sqrt{\frac{\lambda - \beta_2}{\gamma_2}}$ (当 $\lambda > \beta_2$ 时). 于是 $\lambda = \beta_1, \beta_2$ 都是从平凡解出发的音叉式分歧点 (见图 1.5).

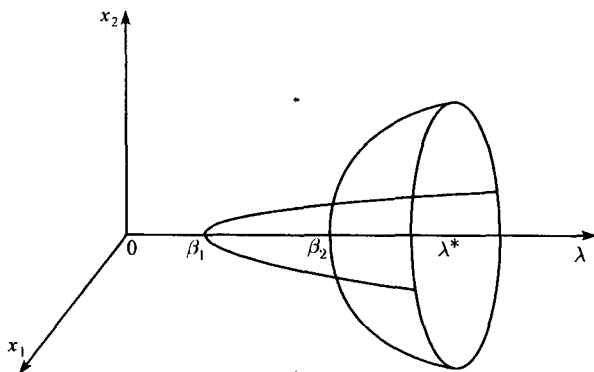


图 1.5

从第一个方程中消去 x_1 , 第二个方程中消去 x_2 可以得到

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{\lambda - \beta_1}{\gamma_1}, \quad x_1^2 + x_2^2 = \frac{\lambda - \beta_2}{\gamma_2}.$$

故当 $\lambda = \lambda^* = \frac{\beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} (> \beta_2)$ 时, x_1, x_2 均不是 0 的解落在圆

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\gamma_1 - \gamma_2} > 0, \\ \lambda = \lambda^* \end{cases}$$

上. 计算表明此圆是与前面的两条抛物线联结在一起的 (见图 1.5). 由定义 1.1.1 可知, $\lambda = \lambda^*$ 也是一个分歧点.

当 $\beta_1 = \beta_2 = \beta, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma > 0$ 时, 上述方程除平凡解 $x_1 = x_2 = 0$ 外, 当 $\lambda > \beta$ 时, 有非平凡解 $x_1^2 + x_2^2 = \frac{\lambda - \beta}{\gamma}$, 这是 (x_1, x_2, λ) 空间中一个抛物面. 显然这时只有 $\lambda = \beta$ 是一个分歧点 (见图 1.6). 此时 $\lambda = \beta$ 也是方程 (1.1.9) 关于零解的线性化方程的二重零特征值.

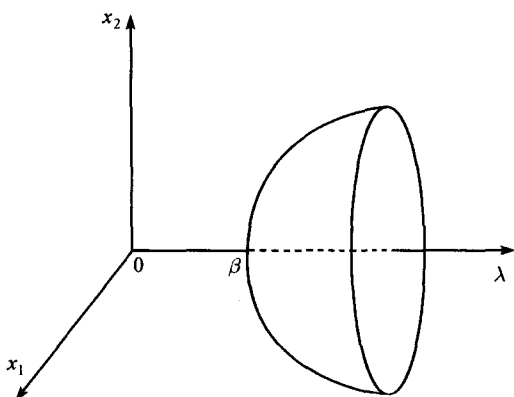


图 1.6

注 1.1.3 从例 1.1.4 可以看出, 即使对二维问题中的非线性方程, 方程的解及分歧点的出现也可以变得很复杂 (见图 1.5 和图 1.6).

注 1.1.4 从例 1.1.3 和例 1.1.4 可知, 当线性化方程的零特征的重数为 2(或偶) 时, 原来非线性方程是否存在分歧点要进一步分析其非线性项才能确定, 有的时候不存在分歧点 (见例 1.1.3), 有的时候存在分歧点 (见例 1.1.4).

1.2 Liapunov-Schmidt 方法的两个例子

本节介绍处理非线性分歧问题的一个最常用的有效方法——Liapunov-Schmidt 方法 (简称为 L-S 方法), 它的基本思想是把空间 X 和 Z 进行分解. 然后将原来的非线性定常方程 (1.1.2) 化为两个方程, 其中一个通常是带奇异性的一维方程 (零空间为一维时), 另一个方程中没有奇异性, 可以用隐函数定理求解, 把求得的解代入带奇异性的一维方程后所得到的方程称为原方程 (1.1.2) 的分歧方程, 该方程保留了原方程中的分歧现象. 由于一维方程中的奇异性比较容易处理, 所以 L-S 方法是非线性分歧理论中的一个重要工具.

1.2.1 有限维问题的 L-S 方法

如果 $X = Z = \mathbb{R}^n, m = 1$, 那么 (1.1.2) 为单参数 n 维非线性方程组. 假定此时 (1.1.2) 存在平凡解, 令

$$f(x, \lambda) = Bx - \lambda x + h(x, \lambda),$$

这里 B 是 $n \times n$ 常数矩阵, 假定 λ_0 是 B 的单特征值, 而 $h(x, \lambda) = O(|x|^2 + |\lambda - \lambda_0|^2|x|)$ 是高阶项.

定理 1.2.1 在上述假定下, $(x, \lambda) = (0, \lambda_0)$ 是 n 维非线性方程组 (1.1.2) 的一个分歧点.

证明 用非奇异线性变换 $x = P\bar{x}$ 可以把 (1.1.2) 化为

$$\bar{f}(\bar{x}, \lambda) = \bar{B}\bar{x} - \lambda\bar{x} + \bar{h}(\bar{x}, \lambda) = 0, \quad (1.2.1)$$

其中

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B_0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

$B_0 - \lambda_0 I_{n-1}$ 是 $(n-1) \times (n-1)$ 非奇异矩阵, $\bar{h}(\bar{x}, \lambda) = O(|\bar{x}|^2 + |\lambda - \lambda_0|^2 |\bar{x}|)$. 令 $\bar{x} = (y, z)^T, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^{n-1}, \mu = \lambda - \lambda_0, (1.2.1)$ 等价于

$$\mu y = g(\mu, y, z), \quad (1.2.2a)$$

$$(B_0 - \lambda I_{n-1})z = h(\mu, y, z), \quad (1.2.2b)$$

这里 $g \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R}^{n-1}$ 均为高阶项 $O(y^2 + |z|^2 + \mu^2(|y| + |z|))$.

由于 $B_0 - \lambda_0 I_{n-1}$ 非奇异, 故在 $\mu = 0$, 即 $\lambda = \lambda_0$ 附近, $B_0 - \lambda I_{n-1}$ 非奇异. 由隐函数定理, 在 $\mu = 0, y = 0$ 附近从 (1.2.2b) 中解得 $z = z^*(\mu, y)$, 其中 $z^*(\mu, y) = O(\mu^2|y| + y^2)$. 再代入 (1.2.2a) 可得到

$$\mu y = g(\mu, y, z^*(\mu, y)), \quad (1.2.3)$$

这里 $g(\mu, y, z^*(\mu, y))$ 是高阶项 $O(y^2 + \mu^2|y|)$. 上式两边除以 y 后得到

$$\mu = \bar{g}(\mu, y),$$

这里 $\bar{g}(\mu, y) = O(|y| + \mu^2)$. 显然 $\bar{g}(0, 0) = 0, \frac{\partial \bar{g}(0, 0)}{\partial \mu} = 0$, 故

$$\left. \frac{\partial(\mu - \bar{g}(\mu, y))}{\partial \mu} \right|_{(0,0)} = 1.$$

再由隐函数定理在 $y = 0$ 附近解出 $\mu = \mu^*(y)$, 满足 $\mu^*(0) = 0$, 于是在 $\lambda = \lambda_0$ 附近, 除了平凡解以外, (1.1.2) 还有另一个非平凡解

$$\begin{cases} \mu = \mu^*(y), \\ z = z^*(\mu^*(y), y) \end{cases}$$

通过 $(0, \lambda_0)$. 由定义 1.1.1 可知 $(0, \lambda_0)$ 是 n 维非线性方程组 (1.1.2) 的分支点. $\square$

注 1.2.1 定理 1.2.1 的证明过程就是处理有限维分枝问题的 L-S 方法. 式 (1.2.3) 就是原方程的一维分枝方程, 其中的奇异性通过两边除以 y 消去.