名师讲 解析几何

高二年级用

思维科学研究所 研究员
陈振宣编著

中国青年出版社

名师讲

解析几何

陈振宣

中国青年出版社

（京）新登字083号

责任编辑：赵惠宗
封面设计：吕敬人　张　朋

图书在版编目（CIP）数据

名师讲解析几何/陈振宣编．—北京：中国青年出版社，1997.11
ISBN 7-5006-2735-1

Ⅰ．名…　Ⅱ．陈…　Ⅲ．解析几何课-高中-教学参考资料　Ⅳ．G634.653

中国版本图书馆CIP数据核字（97）第23442号

中国青年出版社出版发行
社址：北京东四12条21号　邮政编码：100708
北京颐航印刷厂印刷　新华书店经销
*
787×1092　1/32　10.25印张　230千字
1998年1月北京第1版　1998年1月北京第1次印刷
印数1—6000册　定价9.70元
ISBN 7-5006-2735-1/G·765

主要作者简介

陈振宣，1922年10月出生，杭州市人。老中教一级，1981年被评为上海市先进教师，退休后被上海师大教科所聘为特邀研究员，1993年被上海市新学科研究所聘为研究员。1994年初被中国管理科学研究院思维科学研究所职称委员会评定为研究教授。

陈老师在中学与研究所从事数学教育、数学思维方法与思维科学研究工作已逾五十个春秋。80、90年代应邀去全国60多个地区讲学，获得一致好评。

主要著作及主编或部分编写的著作有：《极大与极小》、《数学题解辞典》、《数学辞典》、《中学·数学教学辞典》、《中学数学思维方法》（获国家教委优秀教育图书奖）、《数学思想方法入门》（上海市选修教材）、《高考中常用的数学思想方法》、《名师帮你学数学》、《中学数学解题方法大全》、《中学数学范例点解》等三十余种。《高中数学伴读（一下）》将由台湾九章出版社出版。《五十年数学教育的反思》、《强化数学应用教学的几点思考》等百余篇论文发表在海峡两岸的《数学通报》、《数学传播》等杂志上。

作者在上述论著中概括得“确定数学思维能力的主变量”的假设。第一：熟练掌握数学思维的载体（数学知识与数学语言）；第二：领会数学思维的导航器（数学思维方法）；第三：强化情感、心理因素的教育。在“数学素质教育与智能开发研究”课题组中反复探索验证，力争为数学教育开辟一条切实可行的康庄大道。

前　言

“数学是科学的皇后和仆人”，“花有重开时，人无再青春”，说的是数学的重要，青春的可贵。那么，能够帮助高中学生以较少的精力，把数学学得更好些吗？——本书就是作者以四、五十年的心力，慎重写成的部分答卷。

数学素质的核心是数学思维的素质。根据我俩的长期实践和研究，为了提高数学思维的水平，必须抓住三个要素：

第一、熟练掌握数学思维的栽体（数学语言与数学知识）；

第二、领会数学思维的导航器（数学思维方法）。

第三、强化情感、心理因素的教育。

在上述思想指导下，本书力图体现下列特色：

（一）重视“三基”（基础知识，基本技能，基本的思想方法）；

（二）突出重点，抓住关键，化解难点；

（三）注重应用性与探索性，培养兴趣，培养能力；

（四）例题丰富多彩，习题精选精编，A 组、B 组相对会考、高考要求。

著名数学家苏步青曾针对中学生的数学学习，写过明确中肯的题词：“学习数学，要多做习题，边做边思索，先知其然，而后弄清其所以然。实事求是，循序前进，不怕艰难，持之以恒。”我们相信，每一位真正按苏老指示认真学习本书的读者，都会使自己有明显的提高。

陈振宣　杨象富

目　　录

第一章　直　线

第一节　有向线段、定比分点

解析几何是用代数方法来研究几何问题的一门数学学科.因而,首先要学会建立几何语言和代数语言之间的桥梁.坐标法就是几何的基本元素——点和代数的基本元素——数(组)之间互相转化的一套法则.平面直角坐标系是平面点集与有序数组的集合之间的一一对应.熟练掌握从点到数组(即点的坐标)和从数组到点的相互转化是解析几何的基本功.

坐标法是以有向线段的数量的概念为基础的,有向线段$\overline{AB}$的数量AB等于终点B的坐标x_2减去始点A的坐标x_1所得的差,即$AB = x_2 - x_1$.它是导出距离、分点公式的工具,必须牢固掌握.

熟练坐标法的应用的关键是:

(1)掌握建立恰当坐标系的方法;

(2)熟练几何量的解析化(即坐标化);

(3)掌握方程思想这一基本的思维方法.

【范例】

例1　如图1-1,已知$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$,$A(\cos\theta, \sin\theta)$,$B(\sin\theta, \cos\theta)$,则$|AB| =$(　　).

(A)$2(\sin\theta - \cos\theta)$　　　(B)$2\sin(\frac{\pi}{4} - \theta)$

(C)$\sqrt{2}(\sin\theta-\cos\theta)$　　　　(D)以上都不对

解　$|OA|=|OB|$

$=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1,$

$|AB|=2|OA|\sin(\frac{\pi}{4}-\theta)$

$=2\sin(\frac{\pi}{4}-\theta).$

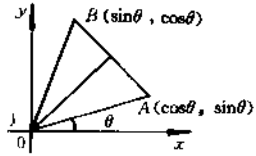

图 1-1

应选(B).

说明　应用距离公式：

$$|AB|=\sqrt{(\cos\theta-\sin\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2}$$
$$=\sqrt{2(1-\sin2\theta)}$$
$$=\sqrt{4\sin^2(\frac{\pi}{4}-\theta)}=2\sin(\frac{\pi}{4}-\theta).$$

如果应用距离公式：

$|AB|=\sqrt{2(\sin\theta-\cos\theta)^2}=\sqrt{2}|\sin\theta-\cos\theta|$，不注意 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$，$\sin\theta<\cos\theta$，误得 $|AB|=\sqrt{2}(\sin\theta-\cos\theta)$，则误选(C).

例 2　如图 1-2，已知三角形三顶点坐标分别为 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$，三边长分别为 $|BC|=a$，$|CA|=b$，$|AB|=c$. 则此三角形的内心 I 的坐标为__________.

解　设 AI 交 BC 于 D 点，

$\because\quad \frac{BD}{DC}=\frac{|AB|}{|CA|}=\frac{c}{b},$

$\therefore\quad x_D=\frac{x_2+\frac{c}{b}x_3}{1+\frac{c}{b}}=\frac{bx_2+cx_3}{b+c},$

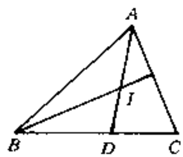

图 1-2

$$y_D=\frac{y_2+\frac{c}{b}y_3}{1+\frac{c}{b}}=\frac{by_2+cy_3}{b+c}.$$

$$\because\quad \frac{BD}{DC}=\frac{c}{b},\quad\therefore\quad \frac{BD}{BD+DC}=\frac{c}{b+c}.$$

且 $BD+DC=BC=a$, $\quad\therefore\quad BD=\frac{ac}{b+c}$.

$$\therefore\quad \frac{AI}{ID}=\frac{|AB|}{|BD|}=\frac{b+c}{a},$$

$$x_I=\frac{x_1+\frac{b+c}{a}x_D}{1+\frac{b+c}{a}}=\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c},$$

$$y_I=\frac{y_1+\frac{b+c}{a}y_D}{1+\frac{b+c}{a}}=\frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}.$$

故应填：$\left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c},\frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$.

例 3 已知一线段 P_1P_2 被点 P 分成 $\lambda=3:2$. 且 P_1、P 的坐标分别为 $(-3,2)$、$(1,-2)$，则点 P_2 的坐标为__________.

解一 设 P_2 的坐标为 (x,y)，则

$$\begin{cases}1=\dfrac{-3+\frac{3}{2}x}{1+\frac{3}{2}}\\[2ex] -2=\dfrac{2+\frac{3}{2}y}{1+\frac{3}{2}}\end{cases}\quad \text{解之得}\quad \begin{cases}x=\dfrac{11}{3},\\[2ex] y=-\dfrac{14}{3}.\end{cases}$$

故应填：$\left(\frac{11}{3},-\frac{14}{3}\right)$

解二 设 P_2 的坐标为 (x,y).

$\because \quad \frac{P_1P}{PP_2}=\frac{3}{2}, \therefore \quad \frac{P_1P_2}{P_2P}=-\frac{5}{2}$，代入分点公式，得

$$x=\frac{-3-\frac{5}{2}\times 1}{1-\frac{5}{2}}=\frac{11}{3}, \quad y=\frac{2-\frac{5}{2}\times(-2)}{1-\frac{5}{2}}=-\frac{14}{3}.$$

说明 定比分点公式的灵活应用，一开始就应重视，它的应用很广泛，在学习参数之后，还有意想不到的效果．希望读者随着学习的深入，不断予以反复领会．

例 4 试求以 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$、$D(x_4,y_4)$ 为顶点的四边形是平行四边形（A、B、C、D 的顺序是逆时针的）的充要条件．

解一 四边形 $ABCD$（A、B、C、D 的顺序是逆时针的）为平行四边形的充要条件是对角线互相平分．

$$\therefore \quad \begin{cases}\frac{x_1+x_3}{2}=\frac{x_2+x_4}{2},\\ \frac{y_1+y_3}{2}=\frac{y_2+y_4}{2};\end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases}x_1+x_3=x_2+x_4,\\ y_1+y_3=y_2+y_4.\end{cases}$$

故所求的充要条件是 $\begin{cases}x_1+x_3=x_2+x_4,\\ y_1+y_3=y_2+y_4.\end{cases}$

解二 四边形 $ABCD$（A、B、C、D 的顺序是逆时针的）为平行四边形的充要条件是两双对边分别相等．

$$\therefore \quad \begin{cases}x_1-x_2=x_4-x_3,\\ y_1-y_2=y_4-y_3;\end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases}x_1+x_3=x_2+x_4,\\ y_1+y_3=y_2+y_4.\end{cases}$$

说明 本题解法较多，殊途同归，作为一题多解的练习颇

有教益.

例5 设 M、A、B、C 为同一直线上任意四点,求证:

$$\frac{AM^2}{AB\cdot AC}+\frac{BM^2}{BC\cdot BA}+\frac{CM^2}{CA\cdot CB}=1.$$

分析 由于 AB、AC、BC…等都是有向线段的数量,为把它们转化为相应的诸点坐标的代数式,应建立恰当的直线坐标系(数轴).为了计算的简化,宜取 M 点为原点.

证明 取 M 点为原点,M、A、B、C 所在直线为数轴,建立直线坐标系.设 A,B,C 的坐标分别为 x_1,x_2,x_3,则 $AB=x_2-x_1$,$AC=x_3-x_1$,$BC=x_3-x_2$,$BA=x_1-x_2$,$CA=x_1-x_3$,$CB=x_2-x_3$,$MA=x_1$,$MB=x_2$,$MC=x_3$.

$$\begin{aligned}
\therefore\quad & \frac{AM^2}{AB\cdot AC}+\frac{BM^2}{BC\cdot BA}+\frac{CM^2}{CA\cdot CB}\\
&=\frac{(-x_1)^2}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)}+\frac{(-x_2)^2}{(x_3-x_2)(x_1-x_2)}\\
&\quad+\frac{(-x_3)^2}{(x_1-x_3)(x_2-x_3)}\\
&=-\frac{x_1^2(x_2-x_3)+x_2^2(x_3-x_1)+x_3^2(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)}\\
&=\frac{x_1x_2^2-x_1^2x_2+x_1^2x_3-x_2^2x_3-x_3^2(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)}\\
&=\frac{x_1x_2(x_2-x_1)+x_3(x_1^2-x_2^2)-x_3^2(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)}\\
&=\frac{(x_1-x_2)(x_3x_1+x_3x_2-x_1x_2-x_3^2)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)}\\
&=\frac{(x_1-x_2)[x_3(x_2-x_3)-x_1(x_2-x_3)]}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)}$$

$$= 1.$$

说明 通过坐标系的建立，把几何问题转化为代数问题，应用代数运算，使问题顺利解决．这是解析几何的基本思维方法．下列例 6～8 都是这一思维方法的应用．

例 6 设 A_1、A'_1、A_2、A_3 为平面上任意四点，且 O 为 A'_1A_1 的中点，求证：

$$|A_1A_2|^2 + |A_2A_3|^2 + |A_3A'_1|^2 \geqslant |OA_1|^2 + |OA_2|^2 + |OA_3|^2.$$

分析 为了便于确定这四点的坐标，可取 O 为原点，直线 A'_1A_1 为 x 轴，建立直角坐标系后，可将问题转化为代数不等式来证明．

证明 取 O 为原点，A'_1A_1 所在直线为 x 轴，建立直角坐标系如图 1-3. 设诸点坐标分别为 $A_1(x_1,0)$、$A_2(x_2,y_2)$、$A_3(x_3,y_3)$、$A'_1(-x_1,0)$，则

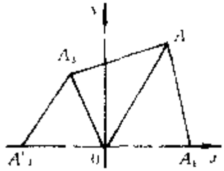

图 1-3

$$|A_1A_2|^2 + |A_2A_3|^2 + |A_3A'_1|^2 - |OA_1|^2 - |OA_2|^2 - |OA_3|^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + y_2^2 + (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (x_3 + x_1)^2 + y_3^2 - x_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - x_3^2 - y_3^2$$

$$= (x_3 + x_1)^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + x_2^2 + (y_2 - y_3)^2$$

$$= (x_3 + x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_3)^2 \geqslant 0.$$

$$\therefore \quad |A_1A_2|^2 + |A_2A_3|^2 + |A_3A'_1|^2 \geqslant |OA_1|^2 + |OA_2|^2 + |OA_3|^2.$$

当且仅当 $x_1+x_3=x_2$ 且 $y_2=y_3$ 时，即 A_1A_3 的中点与 OA_2 的中点重合，亦即 $OA_1A_2A_3$ 是平行四边形时，等号成立．

例 7　$\triangle ABC$ 中，AT 为 $\angle A$ 的内角平分线，D、E 分别在 AB、AC 上，且 $|BD|=|CE|$，BC，DE 的中点分别为 M、N，求证：$MN/\!/AT$．

分析　为了便于确定 A、B、C、D、E、M、N 的坐标，注意到 B、C、D、E 分别在 AB、AC 上，故可取 A 为原点．$\angle A$ 的内、外角平分线互相垂直，可取它们为坐标轴，以 $\angle BAC=2\theta$，$|AB|=2m$，$|AC|=2n$，$|BD|=|CE|=2l$ 为参数，不难求出诸点的坐标．只要证明 $y_M=y_N$，即可获证．

证明　取 A 为原点，AT 所在直线为 x 轴，建立直角坐标系如图 1-4.

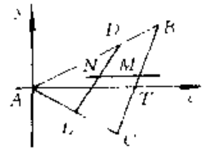

图 1-4

设 $\angle BAC=2\theta$，$|AB|=2m$，$|AC|=2n$，$|BD|=|CE|=2l$，则诸点坐标分别为 $A(0,0)$、$B(2m\cos\theta,2m\sin\theta)$、$C(2n\cos\theta,-2n\sin\theta)$、$D(2(m-l)\cos\theta,2(m-l)\sin\theta)$、$E(2(n-l)\cos\theta,-2(n-l)\sin\theta)$．$M$，$N$ 两点的纵坐标分别为

$$y_M=\frac{1}{2}(y_B+y_C)=(m-n)\sin\theta,$$

$$y_N=\frac{1}{2}(y_D+y_E)=(m-n)\sin\theta,$$

$\because$　$y_M=y_N$，AT 为 x 轴，

$\therefore$　$MN/\!/AT$.

说明　用解析法解几何问题，首先要选择恰当的坐标系．一般为了便于确定关键点的坐标，常取图形中互相垂直的直

线为坐标轴,或选择某一特殊点为原点来建立恰当的坐标系.为了计算的方便,选参数时,不局限于线段的长度,而是线段长度与角度并用,运用三角知识,常可收代数、三角结合之妙.运用参数的个数不宜过多,能使所给图形确定即可.

例8 设圆 O 的半径为单位长度,定点 A 到圆心 O 的距离为2个单位长度,B 为圆 O 上的动点,以 AB 为一边作正三角形 ABC(A,B,C 的顺序是顺时针的),试求四边形 $OACB$ 的面积的最大值.

分析 为确定四边形 $OACB$ 的面积 S(这里是最值问题的目标函数),应选择恰当的坐标系与适当的自变量(这在最值问题中也称为设计变量)使 S 便于计算.

解 取 O 为原点,OA 所在直线为 x 轴,建立直角坐标系如图1-5,取 $\angle AOB=\theta$ 为自变量,则 A,B 的坐标为 $A(2,0)$,$B(\cos\theta,\sin\theta)$,于是

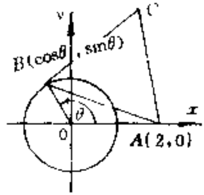

图1-5

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\sin\theta=\sin\theta,$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}|AB|^2=\frac{\sqrt{3}}{4}[(\cos\theta-2)^2+\sin^2\theta]$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}[5-4\cos\theta].$$

$\because$ 四边形 $OACB$ 的面积 $=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle ABC}$,

$$\therefore\quad S=\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{4}(5-4\cos\theta)=\frac{5\sqrt{3}}{4}+\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$$

$$=\frac{5\sqrt{3}}{4}+2\sin(\theta-\frac{\pi}{3}).$$

当 $\theta=\frac{5\pi}{6}$时，$S_{\max}=\frac{5\sqrt{3}}{4}+2$.

说明 最值问题，一般应根据题意，选择适当的自变量(设计变量)，建立目标函数，写下对自变量的限制条件，这样获得最值问题的数学模型．通过对模型的数学处理，使问题获解，这是数学模型方法的一种形态．

***例 9** 已知△ABC 的顶点 A 的坐标是(3,4)，而顶点 B 在第二象限内，又重心 G 坐标为(1,1).

(1)设顶点 B 的坐标为(a,b)，试用 a,b 表示顶点 C 的坐标；

(2)若垂心 O 在原点上，求 a,b 之值．

分析 点 C 随 A,B,G 而确定，利用重心坐标，可建立含 a,b 和点 C 坐标的两个方程，从而可解出点 C 的坐标(x_c, y_c). 再根据垂心的定义，$OA\perp BC$，$OB\perp CA$，又可得到含 a,b 的两个方程，从而解出 a,b 之值．

解 (1)如图 1-6，设点 C 的坐标为(x,y)，

∵ 重心 G 的坐标为(1,1)，

$$\therefore \begin{cases}\frac{x+a+3}{3}=1,\\ \frac{y+b+4}{3}=1.\end{cases}$$

解之，得

$x=-a,\quad y=-b-1,$

即点 C 的坐标为$(-a,-b-1)$.

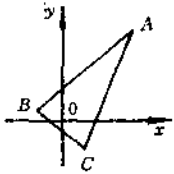

图 1-6

(2)∵ $O(0,0)$为垂心，

∴ $AO\perp BC$.

∵ 直线 AO，BC 的斜率分别为

$$k_{AO}=\frac{4}{3},\quad k_{BC}=\frac{b-(-b-1)}{a-(-a)}=\frac{2b+1}{2a},$$

$\therefore\quad \dfrac{4(2b+1)}{3(2a)}=-1,\qquad$ 即 $3a+4b=-2.$ ①

又 $BO\perp CA$,直线 BO,CA 的斜率分别为

$$k_{BO}=\frac{b}{a},\quad k_{CA}=\frac{4-(-b-1)}{3-(-a)}=\frac{5+b}{3+a},$$

$\therefore\quad \dfrac{b(5+b)}{a(3+a)}=-1,$

即 $\quad a^2+b^2+3a+5b=0.$ ②

解①,②构成的方程组,得

$$a=\frac{6}{5},b=-\frac{7}{5};\text{或 } a=-\frac{6}{5},b=\frac{2}{5}.$$

由于 B 在第二象限,

$\therefore\quad a=-\dfrac{6}{5},b=\dfrac{2}{5}.$

说明 解析几何里,常用的思维方法之一是数学模型方法,它的一种形态是问题的数学模型是函数,如例 8;另一种更常见的形态是问题的数学模型是方程(组),如例 9. 由于后一类问题的数学模型是方程,因此解决这类问题的思维方法称为方程观点(或方程思想). 中学数学中的形形色色的应用题,都是应用方程观点获解的,在解析几何里这一思维方法有极其广泛的应用,今后会多次遇到,希读者仔细体会.

【练习题一】

A 组

1. 选择题

(1)在直角坐标系内有两定点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,A,B

在 y 轴上的射影分别为 N_A, N_B,则有向线段 $\overline{N_AN_B}$ 的数量为(　　).

(A) y_1-y_2　(B) y_2-y_1　(C) x_1-x_2　(D) x_2-x_1

(2)已知点 P 内分 AB 之比为 $1:3$,则点 B 分 AP 之比为(　　).

(A) $\frac{4}{3}$　(B) $\frac{3}{4}$　(C) $-\frac{4}{3}$　(D) $-\frac{3}{4}$

(3)过点 $A(-2,n)$ 和点 $B(n,4)$ 的直线的斜率为 1,则 n 的值是(　　).

(A) -1　(B) 1　(C) -2　(D) 2

(4)点 $P(x,y)$ 到 y 轴的距离为(　　).

(A) $|y|$　(B) $|x|$　(C) y　(D) x

(5)已知点 $P_1(-3,-6)$ 和 $P_2(3,0)$,延长 P_2P_1 到 P,使 $|P_1P|=\frac{2}{3}|P_1P_2|$,则点 P 的坐标为(　　).

(A) $(0,0)$　(B) $(-7,10)$

(C) $(7,-10)$　(D) $(-7,-10)$

(6)点 P 在 x 轴上,两定点 A, B 的坐标分别为 $(-2,3)$, $(3,-2)$,若 $\angle APB=90°$,则 P 的坐标为(　　).

(A) $(4,0)$　(B) $(-4,0)$

(C) $(4,0)$ 或 $(-3,0)$　(D) $(-4,0)$ 或 $(3,0)$

(7)已知点 $P_2(x_2,y_2)$ 是以 $P_1(x_1,y_1)$, $P(x,y)$ 为端点的线段的中点,则点 P 的坐标为(　　).

(A) $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$　(B) $(2x_2-x_1,2y_2-y_1)$

(C) $(2x_1-x_2,2y_1-y_2)$　(D) $\left(\frac{x_1-2x_2}{2},\frac{y_1-2y_2}{2}\right)$