



大学课程学习与考研
全程辅导系列丛书

考研 大串讲

电磁场与电磁波

焦其祥 主编
张阳安 张欣 张民 编写



科学出版社
www.sciencepress.com

大学课程学习与考研全程辅导系列丛书
考 研 大 串 讲

电磁场与电磁波

焦其祥 主编
张阳安 张欣 张民 编写

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是参照“电磁场与电磁波”课程考研要求编写的。重点突出,难点明确。书中选列了近十所重点大学的考研试卷来分析和讲解,选择的题目概念性强、综合性好,极具代表性和参考价值。

本书编者主持的课程获得北京市电磁场与电磁波精品课程。该书特别适合考研复习使用,也可供期末考试复习使用。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波/焦其祥主编. —北京:科学出版社,2006

(大学课程学习与考研全程辅导系列丛书·考研大串讲)

ISBN 7-03-018166-2

I. 电… II. 焦… III. ①电磁场-研究生-入学考试-自学参考资料
②电磁波-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 123963 号

责任编辑:匡 敏 余 江 杨 然/责任校对:桂伟利

责任印制:张克忠/封面设计:耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京市文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006年11月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2006年11月第一次印刷 印张:11 3/4

印数:1—4 000 字数:260 000

定价:21.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈文林〉)

《大学课程学习与考研全程辅导系列丛书》编委会

编委(按姓氏笔画排列):

于 枫 (吉林大学)

于洪珍 (中国矿业大学)

孙立山 (哈尔滨工业大学)

陈乔夫 (华中科技大学)

胡华强 (科学出版社)

徐家恺 (南京大学)

唐竞新 (清华大学)

梅晓榕 (哈尔滨工业大学)

程 靳 (哈尔滨工业大学)

焦其祥 (北京邮电大学)

《大学课程学习与考研全程辅导系列丛书》出版说明

2006年教育部公布的最新数字显示：目前全国拥有普通高等院校1550余所；全国各级各类高等院校在校生总数超过2000万；高等教育已基本实现了由精英化向大众化的转变。

高等院校扩大招生，一方面极大地满足了我国社会主义建设对高素质人才的迫切需求，为当代青年的成才和发展提供了更高更好的平台；另一方面，其造成的最直接的矛盾就是招生与就业的矛盾。如何提高学习效果、培养科学的思维方法和解题能力、增强自身就业竞争力是广大学子面临的最为迫切的问题。为此，我们在北京地区的高校中进行了大量设计严密的，包括对教师、学生、课程、教材等各方面信息的调研，结果发现：名师的指点和加强自修练习成为解决上述问题最重要的选项。

基于上述原因，我们组织策划了本套丛书，同时面向全国重点高校遴选并约请长期在教学第一线的优秀教师，尤其是国家级教学名师和省级教学名师，来参与本套丛书的编写工作。一方面希望能使广大学子们受益于这些名师丰富的教学经验并掌握学习技巧，同时也给在教学第一线工作的青年教师们以示范和启发。

本套丛书将针对大学本科课程的学习与考研对学生进行全程辅导，考虑到学生在学习的不同阶段、不同层次的不同需要，该套丛书将分成如下两个系列：

第一层次：“名师大课堂”系列——辅助课程学习，应对各种考试。

第二层次：“考研大串讲”系列——针对考研复习，帮助考生备考。

本套丛书的编写主要具有以下特点：

【定位明确，针对性强】本丛书针对不同的读者定位对课程学习的全程进行了科学的安排，分为课程学习和考研辅导两个层次。课程学习的指导部分重在帮助学生掌握知识要点，增强分析问题及解决问题的能力；考研辅导部分重在帮助参加研究生入学考试的学生掌握课程考点，迅速提高应试能力。

【名师开讲，经验丰富】本丛书充分挖掘优秀的教师资源，从全国各重点高校中约请经验丰富的任课教师参加编写，从基本知识点到重点、难点进行全程讲解，对学生容易出错的地方进行分析，指导效果显著。

【源于基础，构建网络】本丛书在深入挖掘学科知识点的基础上，梳理各部分知识间的内在联系，把零散、孤立的知识交汇，编制成具有系统性、条理性的网络结构，使学生能够在解决问题时迅速地检索、提取和应用。

【全程优化，科学设计】本丛书根据学生学习的特点和要求，设计了不同的单元和模块，从知识点的归纳到理解再到运用，层层加深学生理解的程度，最终使学生能够达到熟练掌握所学知识并能灵活应用的目的。

【循序渐进，逐级提升】本丛书遵循由浅入深、由易到难、由简到繁的原则，例题和习题都设置了科学、合理的梯度与坡度，能够兼顾不同层次和水平的学生，使之成为

学生们十分有用而必备的学习工具。

我们相信，本套丛书的出版一定能够为提高我国高等教育的教学质量做出应有的贡献。

科学出版社高等教育分社

2006年5月

前 言

电磁场与电磁波是一门重要的专业基础学科。作为通信工程、电子工程、电子信息以及微波等专业的专业基础课，其内容丰富、概念抽象、理论性强、对数学方法的依赖性强，教与学都有难度，仅依靠课堂教学所达到的效果是有限的。这本考研大串讲是参照教育部颁布的工科高校电磁场教学大纲而编写的。根据我们多年的教学经验、体会以及近十所重点大学近年的考研试题，每章通过总结重要知识点，分析综合考研点，并从十几所重点大学近年的考研试题中精选出一些典型题目作为例题给出精解，另外精选部分考研真题作为习题，留给学生练习，书末附出了习题的解答，并对重点、难点问题给出了提示。最后，从多所重点大学近年的考研试题中精选出多套考研试卷，目的是帮助学生加深对教学内容的理解，提高分析问题和解决问题的能力，提高学生复习考研的效率。

本书重点突出，选题典型，与教学重点紧密结合；解题过程强调思路清晰，强调分析方法得力和多样性，强调数学和物理概念相结合。本书可作为研究生入学考试的参考书，以及重点院校和一般院校的在校大学生进一步学习使用。

本书由获得北京市电磁场与电磁波精品课程教学组的教授、副教授编写。全书共分9章，其中第1、2章由焦其祥编写，第3、5章由张欣编写，第4章由高泽华编写，第6章由王亚峰编写，第7章由张民编写，第8章由张阳安编写，第9章由李莉编写。全书由焦其祥教授主编和统稿。本书选用了清华大学、北京理工大学、北京交通大学、电子科技大学、西安电子科技大学、东南大学、北京邮电大学等重点大学的研究生入学考试试卷，在此对他们表示感谢。

感谢科学出版社匡敏、余江等编辑的大力支持和严格把关，以及为保证本书质量所付出的辛勤劳动。

作 者

2006年7月

目 录

| | |
|---------------------------------|----|
| 第 1 章 静电场 | 1 |
| 1.1 名师辅导 | 1 |
| 1.1.1 静电场的重要内容 | 1 |
| 1.1.2 静电场的考研点 | 3 |
| 1.2 考研真题详解 | 3 |
| 1.3 考研试题精选 | 10 |
| 第 2 章 恒定磁场 | 12 |
| 2.1 名师辅导 | 12 |
| 2.1.1 恒定磁场的重要内容 | 12 |
| 2.1.2 恒定磁场的考研点 | 15 |
| 2.2 考研真题详解 | 16 |
| 2.3 考研试题精选 | 20 |
| 第 3 章 恒定电场 | 22 |
| 3.1 名师辅导 | 22 |
| 3.2 考研真题详解 | 24 |
| 3.3 考研试题精选 | 27 |
| 第 4 章 静态场边值型问题的解法 | 28 |
| 4.1 名师辅导 | 28 |
| 4.1.1 静态场边值型问题的重要内容 | 28 |
| 4.1.2 静电场边值型问题的考研点 | 29 |
| 4.2 考研真题详解 | 29 |
| 4.3 考研试题精选 | 39 |
| 第 5 章 交变电磁场 | 42 |
| 5.1 名师辅导 | 42 |
| 5.2 考研真题详解 | 44 |
| 5.3 考研试题精选 | 48 |
| 第 6 章 平面波在无界介质中的传播 | 50 |
| 6.1 名师辅导 | 50 |
| 6.2 考研真题详解 | 53 |
| 6.3 考研试题精选 | 60 |
| 第 7 章 电磁波的反射与折射 | 62 |
| 7.1 名师辅导 | 62 |
| 7.1.1 电磁波的反射与折射的重点内容 | 62 |
| 7.1.2 电磁波的反射与折射的考研点 | 63 |

| | | |
|--------------|---------------------------|------------|
| 7.2 | 考研真题详解 | 64 |
| 7.3 | 考研试题精选 | 68 |
| 第 8 章 | 波导 | 70 |
| 8.1 | 名师辅导 | 70 |
| 8.1.1 | 波导的重要内容 | 70 |
| 8.1.2 | 波导的考研点 | 71 |
| 8.2 | 考研真题详解 | 71 |
| 8.3 | 考研试题精选 | 74 |
| 第 9 章 | 电磁波辐射 | 75 |
| 9.1 | 名师辅导 | 75 |
| 9.2 | 考研真题详解 | 80 |
| 9.3 | 考研试题精选 | 84 |
| 附录 A | 考研试卷选编 | 86 |
| | 清华大学 2003 年考研试卷 | 86 |
| | 清华大学 2001 年考研试卷 | 87 |
| | 清华大学 2000 年考研试卷 | 88 |
| | 北京邮电大学 2004 年考研试卷 | 89 |
| | 北京邮电大学 2002 年考研试卷 | 90 |
| | 东南大学 2003 年考研试卷 | 92 |
| | 东南大学 2002 年考研试卷 | 94 |
| | 北京理工大学 2005 年考研试卷 | 96 |
| | 北京理工大学 2004 年考研试卷 | 97 |
| | 北京交通大学 2005 年考研试卷 | 99 |
| | 电子科技大学 2005 年考研试卷 | 100 |
| | 西安电子科技大学 2002 年考研试卷 | 103 |
| 附录 B | 试题精选参考答案 | 105 |
| 附录 C | 考研试卷参考答案与提示 | 129 |

第 1 章 静 电 场

1.1 名师辅导

1.1.1 静电场的重要内容

(1) 无限空间点电荷的电场、电位的表示式

① 点电荷的电场、电位

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{e}_R$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

② 电荷连续分布时的电场、电位(如面电荷分布的情况)

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_S dS}{R^2} \mathbf{e}_R$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_S dS}{R}$$

(2) 静电场的基本方程

① 无旋性方程

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

② 发散性方程

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV = q$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

③ 无旋性及其等价表示式

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi$$

④ 拉普拉斯方程、泊松方程

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (\text{拉普拉斯方程})$$

$$\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon \quad (\text{泊松方程})$$

(3) 边界条件

介质边界条件

$$E_{1t} = E_{2t},$$

$$\text{其矢量形式为 } \mathbf{e}_n \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_n \times \mathbf{E}_2$$

$$D_{1n} = D_{2n},$$

$$\text{其矢量形式为 } \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{D}_1 = \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{D}_2 \quad (\text{当 } \rho_S = 0 \text{ 时})$$

导体的边界条件

$$E_t = 0, \quad \text{其矢量形式为 } \mathbf{e}_n \times \mathbf{E} = 0$$

$$D_n = \rho_s, \quad \text{其矢量形式为 } \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{D} = \rho_s$$

介质分界面上电位的边界条件

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2 \\ \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} &= \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \quad (\text{即 } D_{1n} = D_{2n}) \end{aligned}$$

(4) 电场能量

① 带电系统总电能

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i$$

应当注意, φ_i 为系统中所有电荷(包括 q_i 自身以及其余的所有电荷)在具有 q_i 的带电体处所产生的电位。

若 φ_i 不包含 q_i 自身所产生的电位, 这样所求出的电能 W_e 并不是系统的总电能, 而是称为系统电能。

② 电场能量体密度为

$$\frac{1}{2} \epsilon E^2$$

(5) 电场力

① 库仑定律表示的真空中两电荷之间的作用力为

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_0}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{e}_R$$

② 用虚位移法——利用系统能量的改变去求力。例如, x 方向的受力为

$$F_x = - \left. \frac{dW_e}{dx} \right|_{q=\text{const}}$$

总电场力 \mathbf{F} 为

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= e_x F_x + e_y F_y + e_z F_z \\ &= - \left(e_x \frac{\partial W_e}{\partial x} + e_y \frac{\partial W_e}{\partial y} + e_z \frac{\partial W_e}{\partial z} \right) \Big|_{q=\text{const}} \\ &= - \nabla W_e \Big|_{q=\text{const}} \end{aligned}$$

(6) 介质极化

① 介质中场量的基本关系

$$\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_e = \epsilon_0 \mathbf{E} + \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}$$

由

$$\epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}$$

得

$$\chi_e = \epsilon_r - 1$$

由

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_e = \epsilon_0 \mathbf{E} + \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}$$

得

$$\mathbf{P}_e = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \mathbf{E}$$

式中 \mathbf{P}_e 为极化强度, χ_e 为介质极化率。

② \mathbf{D} 、 \mathbf{P}_e 与电荷密度的关系

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{P}_e = -\rho_p$$

$$\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{P}_e = -\rho_{ps}$$

$$\mathbf{P}_e = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \mathbf{E}$$

式中 ρ 、 ρ_p 、 ρ_{ps} 分别为电荷密度、束缚电荷密度、束缚电荷面密度。

1.1.2 静电场的考研点

(1) 基本定律、基本方程

① 库仑定律、高斯定律的数学表示式以及这两个定律的应用。

② 静电场的两个基本方程及其应用。

③ 静电场的无旋性 ($\nabla \times \mathbf{E} = 0$)、电场与电位的关系 ($\mathbf{E} = -\nabla\varphi$) 以及该关系式的应用。

(2) 边界条件及其应用

$$\text{导体边界条件 } E_t = 0, \quad D_n = \rho_s$$

$$\text{介质边界条件 } E_{1t} = E_{2t}, \quad D_{1n} = D_{2n} \text{ (当 } \rho_s = 0 \text{ 时)}$$

$$\text{电位边界条件 } \varphi_1 = \varphi_2, \quad \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$$

(3) 电容的计算

① 在求平行双导线间分布电容或多对平行双导线分布电容时, 平行双导线在空间任一点的电位的表示式

$$\varphi = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{r^-}{r^+}\right)$$

十分有用。

② 同轴线单位长度的电容, 孤立金属球的电容的计算。

(4) 电场能量的计算, 以及利用电场能量 W_e 计算电容 C

$$W_e = \frac{1}{2} CU^2$$

* (5) 电场力, 束缚电荷面密度 ρ_{ps} 及束缚电荷体密度 ρ_p

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}_e$$

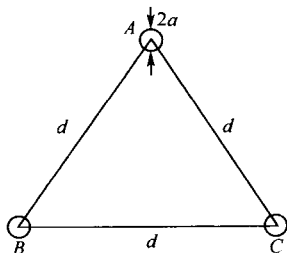
$$\rho_{ps} = -\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{P}_e$$

式中

$$\mathbf{P}_e = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \mathbf{E}$$

1.2 考研真题详解

例 1 真空中, 在边长为 d 的等边三角形的三顶点分别置有一半径为 a 的导体球 A 、



例 1 图

B、C, 球心与顶点重合, 且 $a \ll d$, 参看例 1 图。开始每一球所带的电荷为 q 。现在按 A、B、C 的先后顺序将每个球接地后断开, 求最终每个球上所带的电荷 q_A 、 q_B 和 q_C 。

名师提示 本题可以直接引用电荷 q 对接地金属球镜像后的结论

$$q' = -q \frac{a}{d}$$

求解。式中 q' 为镜像电荷, d 为 q 到球心的距离, a 为金属球半径。镜像电荷即为所要求的 q_A 、 q_B 、 q_C 。

解 方法(1):

① 求 q_A

q_A 是 A 球接地时球 B、C 的电荷(都为 q) 在球 A 的镜像电荷之和

$$q_A = \left(-q \frac{a}{d}\right) + \left(-q \frac{a}{d}\right) = -q \frac{2a}{d}$$

② 求 q_B

q_B 是 B 球接地时球 A 的电荷 $\left(-q \frac{2a}{d}\right)$ 和球 C 的电荷(q) 在球 B 的镜像之和。

$$\begin{aligned} q_B &= \left[(-) \left(-q \frac{2a}{d}\right) \frac{a}{d}\right] + (-) q \frac{a}{d} = 2q \frac{a^2}{d^2} - q \frac{a}{d} \\ &= q \frac{a}{d^2} (2a - d) \end{aligned}$$

③ 求 q_C

与以上相同的方法可得

$$\begin{aligned} q_C &= \left[(-) \left(-q \frac{2a}{d}\right) \frac{a}{d}\right] + \left[(-) q \frac{a}{d^2} (2a - d) \times \frac{a}{d}\right] \\ &= q \frac{a^2}{d^3} (3d - 2a) \end{aligned}$$

方法(2): 直接利用金属球(先后)被接地时, 其电位等于零的条件, 求解 q_A 、 q_B 、 q_C 。

例如, 金属球 A 被接地时, 其电位 $\varphi_A = 0$, φ_A 是三个电位之和, 即

$$\varphi_A = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} = 0$$

所以

$$q_A = -q \frac{2a}{d}$$

依此类推, 可以求出与方法(1)相同的 q_B 、 q_C 。如求 q_B

$$\varphi_B = \left(-q \frac{2a}{d}\right) / 4\pi\epsilon_0 d + \frac{q_B}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} = 0$$

所以

$$q_B = q \frac{a}{d^2} (2a - d)$$

例 2 n 个带电导体被放置在电介质中, 电介质是线性各向同性的, 但不一定是均匀的, 当

这些导体上的电荷分别为 Q_1, Q_2, \dots, Q_n 时,各导体相应的电位分别为 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$;若这些导体上的电荷分别变成 Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_n ,各导体相应的电位变为 $\varphi'_1, \varphi'_2, \dots, \varphi'_n$ 。

求证:

$$\sum_{i=1}^n Q_i \varphi'_i = \sum_{i=1}^n Q'_i \varphi_i$$

名师提示 这是要证明电荷量发生变化之后的一个等式。虽然电荷量变了,但系统结构没有变,介质分布没变,介质仍是线性各向同性的,则电荷的变化所引起的电位变化也是线性的。

证明 把要证明的等式加以变化。由

$$\sum_{i=1}^n Q_i \varphi'_i = \sum_{i=1}^n Q'_i \varphi_i$$

变化为

$$\sum_{i=1}^n Q_i (\varphi_i + \Delta\varphi_i) = \sum_{i=1}^n (Q_i + \Delta Q_i) \varphi_i$$

于是

$$\sum_{i=1}^n Q_i \Delta\varphi_i = \sum_{i=1}^n \Delta Q_i \varphi_i$$

现证明该式的正确性。

为了简明,将导体所带电荷视为点电荷,于是上式等号左方为

$$\sum_{i=1}^n Q_i \Delta\varphi_i = \sum_{i=1}^n Q_i \times \frac{\Delta Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

及等号右方为

$$\sum_{i=1}^n \Delta Q_i \varphi_i = \sum_{i=1}^n \Delta Q_i \times \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

所以

$$\sum_{i=1}^n Q_i \Delta\varphi_i = \sum_{i=1}^n \Delta Q_i \varphi_i$$

即

$$\sum_{i=1}^n Q_i \varphi'_i = \sum_{i=1}^n Q'_i \varphi_i$$

例 3 半径为 a 的圆环导线,线电荷密度为 ρ_l ,求轴线上 P 点的电场强度 E_1 及 O 点(圆环中心)的电场强度 E_2 。

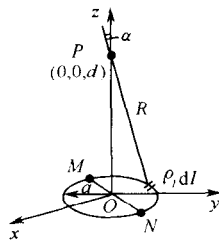
名师提示 由于电荷分布是均匀的以及轴线上的点对圆环的对称性, P 点仅有 E_z 分量。

解 (1) P 点的 E_z

由库仑定律知

$$dE_z = dE \cdot \cos\alpha = \frac{\rho_l dl}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot \frac{d}{R} = \frac{\rho_l dl \cdot d}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + d^2)^{3/2}}$$

所以

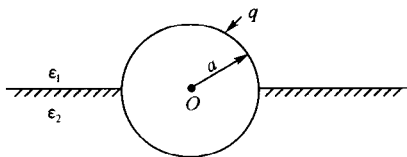


例 3 图

$$E_z = \int dE_z = \frac{\rho_l \times (2\pi a) d}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + d^2)^{3/2}} = \frac{\rho_l a d}{2\epsilon_0 (a^2 + d^2)^{3/2}}$$

(2) O 点的 E

圆环中心(O 点)的电场 $E=0$ (O 点的 $d=0$)。这是因为圆环上的对应点(如 M 、 N 点)所产生的电场,在 O 点大小相等,方向相反,因而互相抵消。



例 4 图

例 4 ϵ_1 、 ϵ_2 两种介质的分界面为极大平面,半径为 a 的带电量为 q 的导体球球心位于介质分界面上,试求:

- (1) 金属球外的电场强度 E ;
- (2) 金属球的面电荷密度 ρ_s ;
- (3) 金属球的电容 C 。

名师提示 正确应用边界条件:①介质边界

条件 $E_{1t} = E_{2t}$; ②导体边界条件 $\rho_s = D_n$ 。

解 (1) 金属球外的电场 E_r

电场为以 O 点为中心的 E_r 分量。 E_r 对于介质分界面为切向分量,则 $E_{r1} = E_{r2} = E_r$ 。则由高斯定律

$$\epsilon_1 E_r \times 2\pi r^2 + \epsilon_2 E_r \times 2\pi r^2 = q$$

所以

$$E_r = \frac{q}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) \times 2\pi r^2}$$

(2) 金属球的面电荷密度 ρ_s

由导体边界条件: $\rho_s = D_n = \epsilon E_r$

$$\text{上半球面: } \rho_{s1} = \epsilon_1 E_r |_{r=a} = \frac{\epsilon_1 q}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) \times 2\pi a^2}$$

$$\text{下半球面: } \rho_{s2} = \epsilon_2 E_r |_{r=a} = \frac{\epsilon_2 q}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) \times 2\pi a^2}$$

(3) 金属球的电容 C

① 由定义求 C

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{\int_a^\infty E_r dr} = 2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)a$$

② 也可由电容器的电场能量求 C

$$\frac{1}{2} C U^2 = \int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon E_r^2 \right) dV$$

则

$$\begin{aligned} C &= 2 \int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon E_r \right)^2 dV / U^2 \\ &= 2 \int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon E_r \right)^2 dV / \left[\int_a^\infty E_r dr \right]^2 \\ &= \dots \end{aligned}$$

例 5 内外导体半径分别为 a 、 b 的同轴线,其一半为 $\epsilon_r \epsilon_0$ 、 μ_0 的介质,另一半为空气,

如例 5 图所示,试求:

- (1) 单位长度的电容 C_0 ;
- (2) 单位长度的电感 L_0 。

名师提示 求电场、磁场时要注意轴对称性,注意边界条件的应用。

解 (1) 求单位长度的电容 C_0

由介质边界条件 $E_{1r} = E_{2r}$ 知 $E_r = E_{r(0)} = E_{r(\epsilon)}$

利用高斯定律知

$$\epsilon_0 E_r \times \pi r \times 1 + \epsilon_r \epsilon_0 E_r \times \pi r \times 1 = \rho_l$$

所以

$$E_r = \frac{\rho_l}{\epsilon_0 \pi r (1 + \epsilon_r)}$$

式中 ρ_l 为同轴线的线电荷密度。

于是

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{\rho_l}{U} = \frac{\rho_l}{\int_a^b E_r dr} = \frac{1}{\int_a^b \frac{dr}{\epsilon_0 \pi (1 + \epsilon_r) r}} \\ &= \frac{\pi \epsilon_0 (1 + \epsilon_r)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \text{ F/m} \end{aligned}$$

(2) 求单位长度的电感 L_0

由于所填充的介质 $(\epsilon_r, \epsilon_0, \mu_0)$ 为电介质,对磁场分布不产生影响,故可以很方便的求出 H_ϕ 及磁通 Φ ,从而得到 L_0 。

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{\Phi}{I} = \frac{\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}}{I} = \frac{\int_a^b \mu_0 H_\phi (dr \times 1)}{I} \\ &= \frac{\mu_0 \int_a^b \frac{I}{2\pi r} dr}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \text{ H/m} \end{aligned}$$

此 L_0 没有计入内电感 L_i 。

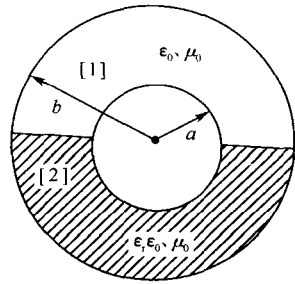
例 6 内外导体半径分别为 a 、 b 的同轴线,所加电压为 U_0 ,其内外导体间的 $\frac{1}{3}$ 空间填充了 ϵ_r, ϵ_0 的介质(区域[2]),其余 $\frac{2}{3}$ 填充空气介质(区域[1]),如例 6 图所示,试求:

- (1) 电场强度 E ;
- (2) 同轴线单位长度的电容 C_0 ;
- (3) 束缚电荷面密度 ρ_{ps} 。

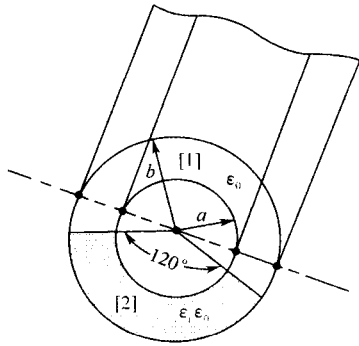
名师提示 求电场强度 E 时要正确的应用边界条件。求束缚电荷面密度 ρ_{ps} 时,要注意公式 $\rho_{ps} = e_n \cdot \mathbf{P}_e$ 中, e_n 的方向为介质面的外法线方向。

解 (1) 求电场强度 E

两种介质中的电场均为 r 方向,则依介质边界条件: $E_r = E_{r1} = E_{r2}$,应用高斯定律得



例 5 图



例 6 图

$$(2\pi r) \frac{2}{3} \times \epsilon_0 E_r + (2\pi r) \times \frac{1}{3} \epsilon_r \epsilon_0 E_r = \rho_l$$

所以

$$E_r = \frac{\rho_l}{2\pi r \epsilon_0 \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \epsilon_r \right)}$$

又

$$U_0 = \int_a^b E_r dr = \frac{\rho_l}{2\pi \epsilon_0 \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \epsilon_r \right)} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

即

$$\rho_l = \frac{U_0 \times \frac{2}{3} \pi \epsilon_0 (\epsilon_r + 2)}{\ln(b/a)}$$

所以

$$E_r = \frac{U_0}{r \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

(2) 同轴线单位长度的电容 C_0

① 区域[1](填充空气介质)的 $C_{0[1]}$

$$\begin{aligned} C_{0[1]} &= \frac{\rho_{l1}}{U_0} = \frac{\epsilon_0 E_r |_{r=a} \times \frac{2}{3} \times 2\pi a}{U_0} \\ &= \frac{4}{3} \times \frac{\pi \epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \end{aligned}$$

② 区域[2](填充 $\epsilon_r \epsilon_0$ 介质)的 $C_{0[2]}$

$$\begin{aligned} C_{0[2]} &= \frac{\rho_{l2}}{U_0} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 E_r |_{r=a} \times \frac{1}{3} \times 2\pi a}{U_0} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{\pi \epsilon_r \epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \end{aligned}$$

所以

$$C_0 = C_{0[1]} + C_{0[2]} = \frac{2}{3} \times \frac{\pi \epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} (2 + \epsilon_r) \text{ F/m}$$

(3) 束缚电荷面密度 ρ_{ps}

束缚电荷面密度 ρ_{ps} 将出现在区域[2]的介质表面, 已知 $\rho_{ps} = \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{P}_e$, 由于电场为 E_r 分量, 而极化强度 \mathbf{P}_e 与电场 \mathbf{E} 同方向

$$\mathbf{P}_e = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E}$$

因此可以判定, 与 E_r 相平行的面没有 ρ_{ps} 。

① 区域[2]的 $r=a$ 处的 $\rho_{ps(a)}$