配合教育部高职高专规划教材

五年制高等职业教育适用

YINGYONG Shuxue

应用数学基础学习辅导

下册

主编：胡胜生

华东师范大学出版社

配合教育部高职高专规划教材
五年制高等职业教育适用

应用数学基础

学习辅导(下册)

胡胜生 主编

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用数学基础学习辅导. 下册/胡胜生主编. —上海：华东师范大学出版社，2002.7

ISBN 7-5617-3028-4

Ⅰ.应… Ⅱ.胡… Ⅲ.应用数学-高等学校：技术学校-教学参考资料 Ⅳ.029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 046261 号

应用数学基础

学习辅导(下册)

主　　编　胡胜生
策划组稿　大学教材策划部
封面设计　黄惠敏
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
　　　　　市场部　电话 021-62865537
　　　　　　　　　传真 021-62860410
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路 3663 号
　　　　　邮编 200062
印 刷 者　上海新文印刷厂
开　　本　787×1092　16 开
印　　张　12.75
字　　数　279 千字
版　　次　2002 年 8 月第一版
印　　次　2002 年 8 月第一次
印　　数　5100
书　　号　ISBN 7-5617-3028-4/O・129
定　　价　16.00 元

出 版 人　朱杰人

前　　言

《应用数学基础学习辅导》是与教育部五年制高等职业教育规划教材《应用数学基础》（华东师范大学出版社出版）配套的用书，分上、中、下三册。

本套书每章各节的内容包括：学习要求、典型例题、练习题．每章的后面都有"本章知识结构与学法指导"及"自测题"，自测题附有答案．另外，给出了教材中部分习题、复习题的答案．

练习题、自测题都分 A、B 两组，A 组题按教学的基本要求选编，因而是面对全体同学的，B 组题为学有余力的同学提供的，以进一步提高分析、解决问题的能力．

本套书的编写工作由黄家玲负责组织．

下册主编：胡胜生．各章编写人员：陈运胜（第十七、十八章）、赵宁军（第十九、二十章）、胡胜生（第二十一、二十二章）、黄春棋（第二十三、二十四章）．规划、统稿工作由胡胜生完成．

由于编者水平所限，本书中难免有不当之处，真诚欢迎使用本书的教师和学生批评、指正，提出改进意见．

《应用数学基础》教材编写组

2002 年 4 月

目录

第十七章　二元函数微分学

第十八章　二元函数积分学

第十九章　无 穷 级 数

目录

第二十章 常微分方程和拉普拉斯变换

第二十一章 行列式 矩阵 线性方程组

第二十二章 线 性 规 划

目录

第二十三章　数理统计初步

第二十四章　数学建模简介

知识是一座宝库，而实践就是宝库的钥匙.

——富勒(英)

第十七章　二元函数微分学

§17-1　空间直角坐标系

学 习 要 求

知 识 点	认 知 要 求	能 力 要 求
空间直角坐标系	理解空间直角坐标系的概念	会判断点所在的卦限
距离公式	掌握距离公式	会用距离公式进行计算

典 型 例 题

例 1　求出点(a, b, c)关于各坐标面的对称点.

解:由立体几何的知识得,点(a, b, c)关于 xOy 面、yOz 面、xOz 面的对称点分别为$(a, b, -c)$、$(-a, b, c)$、$(a, -b, c)$.

说明:同理,点(a, b, c)关于各坐标轴的对称点应是两个坐标变号.例如,关于 z 轴的对称点为$(-a, -b, c)$.

例 2　在 z 轴上求一点使它到两点$(1, 1, 0)$、$(-1, 0, 3)$的距离相等.

解:据已知设此点为$(0, 0, a)$,于是

$$1+1+a^2=1+(a-3)^2.$$

故 $a=\frac{4}{3}$,因此所求的点为$\left(0, 0, \frac{4}{3}\right)$.

练 习 题

A 组

1. 指出下列各点所在的卦限.

(1) $(1, -1, -1)$； (2) $(-3, -3, 1)$； (3) $(-1, -1, -1)$； (4) $(-2, -1, 1)$.

2. 求两点$(-1, -1, -1)$和$(-3, 2, 1)$之间的距离.

B 组

1. 在 x 轴上求一点使它到两点$(1, 1, 1)$和$(3, 5, 7)$的距离相等.

2. 求与两点$(-1, 1, -1)$和$(3, -1, 2)$的距离都相等的点的轨迹.

§ 17-2 空 间 向 量

学 习 要 求

知 识 点	认 知 要 求	能 力 要 求
向量	1. 理解向量、向量的模和单位向量的概念 2. 掌握向量的几何、坐标表示方法	1. 会将向量单位化 2. 会求向量的坐标和模
向量的运算	1. 掌握向量的几何运算和坐标运算 2. 理解向量的夹角和方向余弦的概念 3. 理解向量平行和垂直的概念	1. 会求向量的夹角和方向余弦 2. 会判断向量平行和垂直
数量积	理解数量积的概念和意义	1. 会求向量的数量积 2. 会计算数量积的物理应用问题

典 型 例 题

例 1 设 $\boldsymbol{a}=(1, 1, 1)$, $\boldsymbol{b}=(2, 3, -2)$, $\boldsymbol{c}=(0, -1, 3)$,求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}$ 的模和方向余弦.

解:因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}=(1, 1, 1)+(2, 3, -2)-3(0, -1, 3)=(3, 7, -10)$,

所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}|=\sqrt{158}$, 方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{158}}$, $\cos\beta=\dfrac{7}{\sqrt{158}}$, $\cos\gamma=-\dfrac{10}{\sqrt{158}}$.

例 2 已知向量 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 垂直于向量 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$,向量 $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 垂直于向量 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$, 求向量

$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

解:由已知,得 $(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=0$, $(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$, 即

$$7|\boldsymbol{a}|^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15|\boldsymbol{b}|^2=0,\ 7|\boldsymbol{a}|^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+8|\boldsymbol{b}|^2=0,$$

因此 $46\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-23|\boldsymbol{b}|^2=0$, 又消去 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, 得 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$, 故 $\cos\theta=0.5$, 所以 $\theta=\frac{\pi}{3}$.

例 3 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 是单位向量,且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$,求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

解:因为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 是单位向量,所以 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=1$, $|\boldsymbol{c}|=1$, 因此

$$0=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}),$$

所以
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{3}{2}.$$

练 习 题

A 组

1. 已知两点 $A(1,0,-1)$ 和 $B(2,-1,-2)$,求 $\overrightarrow{AB}$ 及 $|\overrightarrow{AB}|$.

2. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,1,1)$, $\boldsymbol{b}=(-1,2,-1)$, $\boldsymbol{c}=(3,1,2)$, 求 $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 及 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{c})$.

3. 求向量 $\boldsymbol{a}=(1,2,3)$, $\boldsymbol{b}=(-3,0,1)$ 的夹角.

B 组

1. 已知向量的起点坐标为 $(1,1,1)$,模为 2,且与向量 $(2,3,1)$ 平行,求它的终点坐标.

2. 已知 $\boldsymbol{a}=(3,5,-2)$, $\boldsymbol{b}=(2,1,4)$, $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直,λ 与 μ 关系如何?

§ 17-3 空间平面与直线的方程

学 习 要 求

知 识 点	认 知 要 求	能 力 要 求
平面方程	1. 理解平面方程的意义 2. 了解平面方程的两种形式	1. 会求平面的点法式方程 2. 会求平面的一般式方程 3. 会进行两种形式的互化
直线方程	1. 理解直线方程的意义 2. 了解直线方程的两种形式	1. 会求直线的点向式方程 2. 会求直线的一般式方程 3. 会进行两种形式的互化

典型例题

例 1　求过点$(1, -1, 2)$且与点$(3, 1, 1)$和点$(-2, 1, -1)$的连线垂直的平面方程.

解:由立体几何的知识可知平面的法向量就是连线的方向向量,所以法向量为$\boldsymbol{n}=(5, 0, 2)$.

所求的平面方程为$5(x-1)+2(z-2)=0$,即$5x+2z-9=0$.

例 2　求过点$(1, 1, 1)$且与平面$x+y-2z+8=0$垂直的直线方程.

解:由立体几何的知识可知直线的方向向量就是平面的法向量,所以方向向量为$\boldsymbol{a}=(1, 1, -2)$,

所求的直线方程为
$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-2}.$$

例 3　求过点$(-1, 1, -1)$且与两直线$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{1}$和$x=y=z$都平行的平面方程.

解:由立体几何的知识可知平面的法向量与两直线的方向向量都垂直,所以设法向量为(m, n, p).因此
$$\begin{cases}2m-n+p=0,\\ m+n+p=0.\end{cases}$$
解得
$$m=2n,\ p=-3n,$$
所求的平面方程为$2(x+1)+(y-1)-3(z+1)=0$,即$2x+y-3z-2=0$.

练　习　题

A　组

1. 求过点$(3, -5, 0)$且法向量为$(1, 2, -1)$的平面方程.

2. 求过点$(0, 3, -1)$且方向向量为$(1, 0, -1)$的直线方程.

3. 求过点$(3, 1, -7)$且与直线$\begin{cases}x-y+z=1,\\ 2x+y+z=4\end{cases}$平行的直线方程.

4. 求过点$(1, 1, 1)$且过直线$\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$的平面方程.

5. 计算点$(3, 1, -1)$到平面$x-y+z=1$的距离.

B　组

1. 设一平面垂直于平面$z=0$,并通过从点$(1, -1, 1)$到直线$\begin{cases}y-z+1=0,\\ z=0\end{cases}$的

垂线，求平面的方程.

2. 求直线 $\begin{cases}2x-4y+z=0,\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$ 在平面 $4x-y+z=1$ 上的投影直线的方程.

§17-4 曲面及其方程

学 习 要 求

知 识 点	认 知 要 求	能 力 要 求
曲面方程	了解曲面方程的概念	会建立简单曲面的方程
球面的方程	理解球面的方程的概念	1. 会建立球面的方程 2. 知道什么方程表示球面
柱面的方程	了解柱面的方程的概念	知道什么方程表示柱面
旋转曲面的方程	了解旋转曲面的方程的概念	知道旋转曲面的方程的特点

典 型 例 题

例 1 下列方程各表示什么曲面：

(1) $x^2+y^2+z^2-2x+4z=0$； (2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

解：(1) 表示球心在点$(1, 0, -2)$半径为 $\sqrt{5}$的球面.

(2) 表示准线为 xOy 面上的椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，母线平行于 z 轴的柱面.

例 2 xOz 面上的曲线 $x^2=3z$ 绕 z 轴旋转一周，求此旋转曲面的方程.

解：由旋转曲面的定义，得旋转曲面的方程为 $x^2+y^2=3z$.

练 习 题

A 组

1. 判断下列方程所表示的曲面的类型：

(1) $x^2+y^2+z^2=1$； (2) $2x^2+y^2=1$； (3) $x^2+y^2+z=0$.

2. 求球面 $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2=0$ 的球心和半径.

B 组

1. 求 xOy 面上的曲线 $y^2=x$ 分别绕 x 轴与 y 轴旋转一周所得旋转体的方程.

2. 求准线是 yOz 面上的曲线 $2y^2 - z^2 = 1$ 而母线平行于 x 轴的柱面方程.

§17-5 常见二次曲面及其方程

学习要求

知识点	认知要求	能力要求
椭球面方程	了解椭球面方程的特点	会用截痕法讨论曲面的方程
锥面方程	了解锥面方程的特点	会用截痕法讨论曲面的方程
椭圆抛物面方程	了解椭圆抛物面方程的特点	会用截痕法讨论曲面的方程

典型例题

例 用截痕法讨论方程 $z = x^2 + 2y^2$ 所表示的曲面.

解:该方程所表示的曲面为椭圆抛物面,用平行于 xOy 面的平面 $z = h\ (h \geqslant 0)$ 截曲面截线是该平面上的椭圆 $x^2 + 2y^2 = h$,随着 h 的增大椭圆也增大,当 $h = 0$ 时,椭圆缩成一点(原点);用平行于 yOz 面的平面 $x = l$ 截曲面截线是该平面上的抛物线 $2y^2 - z + l^2 = 0$;用平行于 xOz 面的平面 $y = s$ 截曲面截线是该平面上的抛物线 $x^2 - z + 2s^2 = 0$. 所以该曲面可看成是平行于 xOy 面的一簇椭圆码起来的.

练习题

A 组

判断下列方程所表示的曲面:

(1) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$;　　(2) $z = 2x^2 + y^2$;

(3) $2x^2 + y^2 - 4z^2 = 8$;　　(4) $x^2 - y^2 + 3z^2 = -6$.

B 组

利用截痕法讨论下列方程:

(1) $6z = 2x^2 + 3y^2$;　　(2) $x^2 - 2y^2 + 3z^2 = -6$.

§ 17-6　二元函数的基本概念

学 习 要 求

知 识 点	认 知 要 求	能 力 要 求
二元函数的概念	1. 理解二元函数的意义 2. 了解平面区域的意义	会求二元函数的定义域
二元函数的极限	了解二元函数极限的意义	会求一些简单函数的极限
二元函数的连续	了解二元函数连续的意义	会判断函数的连续性

典 型 例 题

例 1　求函数 $z=\ln(y^2+2x)-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ 的定义域.

解:要使函数有意义,则

$$\begin{cases} y^2+2x>0, \\ y\geqslant 0, \\ 1-x^2-y^2>0, \end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases} y^2>-2x, \\ y\geqslant 0, \\ x^2+y^2<1. \end{cases}$$

因此函数的定义域为 $\{(x,\ y)\mid y^2>-2x,\ y\geqslant 0,\ x^2+y^2<1\}$.

例 2　设 $f\left(\dfrac{y}{x},\ x+y\right)=x^2+y^2$, 求 $f(x,\ y)$.

解:设 $\dfrac{y}{x}=u$, $x+y=v$. 从而 $x=\dfrac{v}{1+u}$, $y=\dfrac{uv}{1+u}$

代入,得
$$f(u,\ v)=\frac{v^2}{(1+u)^2}+\frac{u^2v^2}{(1+u)^2}=\frac{v^2(1+u^2)}{(1+u)^2},$$

因此
$$f(x,\ y)=\frac{y^2(1+x^2)}{(1+x)^2}.$$

例 3　求下列函数的极限:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{2xy}$;　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\y\to\frac{1}{2}}}\left(\sqrt{1-x^2-y^2}+\arcsin\dfrac{x}{y}\right)$.

解:(1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{2xy}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{1}{2(\sqrt{xy+1}+1)}=\dfrac{1}{4}$.

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ y\to-\frac{1}{2}}}\left(\sqrt{1-x^2-y^2}+\arcsin\dfrac{x}{y}\right)=\dfrac{\sqrt{2}-\pi}{2}$.

练　习　题

A　组

1. 已知 $f(x,\ y)=\dfrac{2x}{y}-\arcsin\dfrac{y}{x}$，求 $f(x,\ x)$.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $z=\dfrac{1}{x^2-y^2}$；　　　　(2) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}+\arcsin(x-y)$.

3. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ y\to2}}\dfrac{5x+y}{x-2y}$；　　　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{xy}{\sqrt{1+5xy}-1}$.

B　组

1. 已知 $f(xy,\ x-y)=x^2+y^2$，求 $f(x,\ y)$.

2. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to1}}\left[\dfrac{1}{1+x+y}-\dfrac{3}{(x+y)^3+1}\right]$.

§ 17-7　偏导数与全微分

学 习 要 求

知　识　点	认　知　要　求	能　力　要　求
偏导数	1. 掌握偏导数的意义 2. 了解偏导数的几何意义	会求二元函数的偏导数
二阶偏导数	理解二阶偏导数的意义	会求二元函数的二阶偏导数
全微分	1. 理解全微分的意义 2. 了解可微的充分条件	会求二元函数的全微分

典 型 例 题

例 1　求下列函数的偏导数：

(1) $z=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$；　　　　(2) $z=(x+2y)^x$.

解:(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{(x^2y)_x(x^2+y^2)-(x^2+y^2)_x x^2y}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{(x^2y)_y(x^2+y^2)-(x^2+y^2)_y x^2y}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial y}=2x(x+2y)^{x-1}$,

原函数两边取自然对数,得 $\ln z=x\ln(x+2y)$,

因此 $\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\ln(x+2y)+\dfrac{x}{x+2y}$,所以$\dfrac{\partial z}{\partial x}=(x+2y)^x\left[\ln(x+2y)+\dfrac{x}{x+2y}\right]$.

例 2　求函数 $z=\ln(1+x^2+y^2)$ 的二阶偏导数.

解:因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x}{1+x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y}{1+x^2+y^2}$, 所以

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{(2x)_x(1+x^2+y^2)-2x(1+x^2+y^2)_x}{(1+x^2+y^2)^2}=\dfrac{2(1-x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{-2x(1+x^2+y^2)_y}{(1+x^2+y^2)^2}=-\dfrac{4xy}{(1+x^2+y^2)^2}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{(2y)_y(1+x^2+y^2)-2y(1+x^2+x^2)_y}{(1+x^2+y^2)^2}=\dfrac{2(1+x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$.

例 3　设 $z=\arctan(2x-y)$, 求 $\mathrm{d}z$.

解:因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2}{1+(2x-y)^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{1}{1+(2x-y)^2}$,

所以 $\mathrm{d}z=\dfrac{2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y}{1+(2x-y)^2}$.

练　习　题

A　组

1. 已知 $f(x, y)=x^2+xy-2y^2$, 求 $f_x(1,-1)$ 及 $f_y(1,-1)$.

2. 求下列函数的偏导数:

(1) $z=\dfrac{x-2y}{3x+y}$;　　　　(2) $z=\mathrm{e}^{xy}+\ln(x^2+y^2)$.

3. 求函数 $z=\cos(x+y)+\arctan(x-y)$ 的全微分.

B　组

1. 求函数 $z=x\arctan\dfrac{y}{x}-(x+2y)^x$ 的偏导数.

2. 求函数 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 的二阶偏导数.

3. 设 $z=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$,求证:$x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$.

§17-8 链 式 法 则

学 习 要 求

知 识 点	认 知 要 求	能 力 要 求
复合函数的微分	1. 掌握复合函数微分的法则 2. 理解全导数的公式	会求二元复合函数的偏导数

典 型 例 题

例 1 设 $z=u^v$, $u=x+y$, $v=xy$, 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解:因为 $\dfrac{\partial z}{\partial u}=vu^{v-1}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}=u^v\ln u$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=1$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=y$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=x$, 所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=vu^{v-1}+yu^v\ln u=xy(x+y)^{xy-1}+y(x+y)^{xy}\ln(x+y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=vu^{v-1}+xu^v\ln u=xy(x+y)^{xy-1}+x(x+y)^{xy}\ln(x+y).$$

例 2 已知 $z=u^2+v^2-t$, $u=e^t$, $v=\cos t$, 求全导数$\dfrac{dz}{dt}$.

解:因为 $\dfrac{\partial z}{\partial u}=2u$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}=2v$, $\dfrac{\partial z}{\partial t}=-1$, $\dfrac{du}{dt}=e^t$, $\dfrac{dv}{dt}=-\sin t$, 所以

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}+\frac{\partial z}{\partial t}=2ue^t-2v\sin t-1=2e^{2t}-\sin 2t-1.$$

练 习 题

A 组

1. 设 $z=u\ln v$, $u=x+y$, $v=xy$, 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

2. 设 $z=uv$, $u=y\sin x$, $v=x\cos y$, 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.