

邱金倬 编著

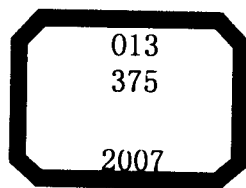
高等数学

GAODENG SHUXUE

G A O D E N G S H U X U E



厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS



高等数学

邱淦倬 编著

厦门大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/邱淦倬编著. —厦门:厦门大学出版社, 2007. 2
ISBN 978-7-5615-2717-7

I. 高… II. 邱… III. 高等数学-高等学校-教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 020578 号

厦门大学出版社出版发行

(地址:厦门大学 邮编:361005)

<http://www.xmupress.com>

xmup@public.xm.fj.cn

厦门昕嘉莹印刷有限公司印刷

2007 年 2 月第 1 版 2007 年 2 月第 1 次印刷

开本:787×960 1/16 印张:26.5

字数:460 千字 印数:0 001—5 000 册

定价:38.00 元

本书如有印装质量问题请直接寄承印厂调换

前 言

随着当前教育的不断深化,大学的高等数学教育已不单纯只是向学生传授基础知识,为相关学科和其他数学分支提供计算工具,更重要的是向学生灌输、渗透数学思想、数学方法,培养学生的创新精神、创新意识、创新思维与创新能力,提高学生的数学素质、数学思维能力和科学计算能力,着重提高学生发现问题与解决问题的实际应用能力,以便更好地在市场经济体制的新形势下实施有效的素质教育,培养适应社会需求、为经济发展服务的高素质应用型人才.为此,作者尝试编写了本书,旨在为高校教材建设之路作大胆的初步探索.

本书在内容组织上力求体现如下几个特色:

1. 在不破坏知识与理论的科学性、系统性和严谨性的前提下,尽可能地深入浅出,通俗易懂地简明地解释抽象的数学概念.
2. 重视数学知识的应用,充分展示数学理论的本质与实际意义,突出培养解决实际问题的数学思想、方法与能力,并配备大量的几何、物理、经济等方面的应用例题配合强化训练.
3. 注重现代科技与数学的有机结合与相互渗透,适应现代数学的发展趋势.介绍了当前颇受关注且作用重大的数学建模与数学软件的相关知识,着力提高学生的综合运用能力.
4. 本书为理工与经管类普适版,各专业可灵活根据不同需求有所侧重与删减.

本书在编写过程中得到数学系同仁陈大波、林秀清、周仙耕、赵小珍、刘芳、林影、许莉丽等老师的大力支持,没有他们无私的辛勤劳动,本书无法如此之快地与读者见面,在此,一并向他们表示诚挚谢意.此外,衷心地感谢厦门大学出版社的大力支持与帮助.

编写一本富有鲜明特色又符合广大师生需求的教材决非朝夕之功.虽然我们也已尽力而为,但奈于水平,加之时间仓促,遂不尽如人意之处恐在所难免,敬请专家、读者不吝指教.

编者

2006年9月

目 录

第一章 函数	(1)
1.1 预备知识	(1)
1.2 函数	(3)
习题 1.2	(16)
1.3 经济中常用的函数	(18)
习题 1.3	(19)
1.4 数学模型	(19)
习题 1.4	(27)
自我测验题(一)	(28)
复习题(一)	(30)
第二章 极限与连续	(32)
2.1 极限	(32)
习题 2.1	(45)
2.2 函数的连续性	(46)
习题 2.2	(52)
自我测验题(二)	(53)
复习题(二)	(54)
第三章 导数与微分	(56)
3.1 切线速度及其变化率	(56)
3.2 导数概念	(59)
习题 3.2	(61)
3.3 求导法则和基本初等函数导数公式	(62)
习题 3.3	(68)
3.4 高阶导数	(69)
习题 3.4	(71)

3.5 微分	(71)
习题 3.5	(74)
自我测验题(三)	(75)
复习题(三)	(76)
第四章 微分中值定理及导数的应用	(78)
4.1 中值定理	(78)
习题 4.1	(83)
4.2 洛必塔 (L'Hospital) 法则	(83)
习题 4.2	(89)
4.3 导数在研究函数上的应用	(89)
习题 4.3	(108)
自我测验题(四)	(109)
复习题(四)	(111)
第五章 不定积分	(114)
5.1 不定积分的概念	(114)
习题 5.1	(117)
5.2 不定积分的性质	(117)
习题 5.2	(119)
5.3 换元积分法	(119)
习题 5.3	(127)
5.4 分部积分法	(128)
习题 5.4	(131)
5.5 几种特殊类型函数的积分	(131)
习题 5.5	(137)
5.6 积分表的使用	(137)
自我测验题(五)	(140)
复习题(五)	(141)
第六章 定积分及其应用	(144)
6.1 定积分的概念	(144)
习题 6.1	(149)
6.2 定积分的性质	(149)
习题 6.2	(152)

6.3 微积分基本公式	(152)
习题 6.3	(155)
6.4 定积分的换元法	(156)
习题 6.4	(158)
6.5 定积分的分部积分法	(159)
习题 6.5	(161)
6.6 广义积分	(162)
习题 6.6	(167)
6.7 定积分的应用	(167)
习题 6.7	(183)
自我测验题(六).....	(185)
复习题(六).....	(186)
第七章 无穷级数	(189)
7.1 常数项级数	(189)
习题 7.1	(192)
7.2 常数项级数的收敛性判别法	(193)
习题 7.2	(201)
7.3 幂级数	(202)
习题 7.3	(208)
7.4 函数展开成幂级数	(208)
习题 7.4	(214)
7.5 傅立叶(Fourier)级数	(215)
习题 7.5	(224)
自我测验题(七).....	(224)
复习题(七).....	(225)
第八章 微分方程	(227)
8.1 微分方程的基本概念	(227)
习题 8.1	(228)
8.2 一阶微分方程	(229)
习题 8.2	(237)
8.3 几类特殊的高阶方程	(238)
习题 8.3	(240)

8.4 二阶常系数线性微分方程	(240)
习题 8.4	(249)
自我测验题(八)	(250)
复习题(八)	(251)
第九章 向量代数与空间解析几何	(253)
9.1 向量代数	(253)
习题 9.1	(260)
9.2 空间中的平面和直线	(261)
习题 9.2	(270)
9.3 空间的曲面和曲线	(270)
习题 9.3	(277)
自我测验题(九)	(277)
复习题(九)	(278)
第十章 多元函数的微分学	(280)
10.1 二元函数的概念	(280)
习题 10.1	(281)
10.2 二元函数的极限与连续	(281)
习题 10.2	(283)
10.3 偏导数与全微分	(284)
习题 10.3	(288)
10.4 多元复合函数的求导法则	(289)
习题 10.4	(291)
10.5 隐函数求导公式	(291)
习题 10.5	(293)
10.6 二元函数的极值与最值	(293)
习题 10.6	(297)
10.7 条件极值与拉格朗日乘数法	(297)
习题 10.7	(300)
10.8 最小二乘法	(301)
习题 10.8	(303)
10.9 偏导数在几何上的应用	(303)
习题 10.9	(307)

自我测验题(十).....	(307)
复习题(十).....	(309)
第十一章 多元函数的积分学	(312)
11.1 二重积分.....	(312)
习题 11.1	(326)
11.2 三重积分.....	(328)
习题 11.2	(335)
11.3 二、三重积分的应用	(336)
习题 11.3	(345)
11.4 曲线积分.....	(346)
习题 11.4	(355)
自我测验题(十一).....	(356)
复习题(十一).....	(357)
习题答案与提示	(361)
附录一 积分表	(395)
附录二 Mathematica 入门	(406)
参考书目	(411)

第一章 函数

函数是高等数学研究的主要对象,本章将介绍函数的概念及基本初等函数与经济中常见的一些函数,这些内容是学习本课程必须掌握好的基本知识.

1.1 预备知识

1. 集合

集合是数学中的一个基本概念.一般地说,所谓集合(或简称集)是指具有特定性质的一些事物的总体.组成这个集合的事物称为该集合的元素.

例 1 06 级数学系的学生.

例 2 全体自然数.

例 3 某公司的全体员工.

通常以大写字母 $A, B, C \cdots$ 表示集合,元素以小写字母 $a, b, c \cdots$ 表示.事物 a 是集合 A 的元素,记作 $a \in A$ (读作 a 属于 A);事物 a 不是集合 A 的元素,记作 $a \notin A$ (读作 a 不属于 A).

由有限多个元素组成的集合称为有限集.例如,由元素 $a_1, a_2, a_3 \cdots a_n$ 组成的集合 A ,可记作 $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$.

由无穷多个元素组成的集合称为无限集.无限集通常用如下的记号表示:

$M = \{x | x \text{ 所具有的特性}\}.$

微积分中用到的集合主要是数集,即元素都是数的集合.我们将全体自然数的集合记作 N ,全体整数的集合记作 Z ,全体有理数的集合记作 Q ,全体实数的集合记作 R .

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,即若 $x \in A$,则必 $x \in B$,就说 A 是 B 的子集,记作 $A \subset B$ (读作 A 包含于 B 或读作 B 包含 A).

例如 $N \subset Z \subset Q \subset R$.

如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 就称集合 A 与 B 相等, 记作 $A=B$.

不含任何元素的集合称为空集. 例如 $\{x | x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0\}$ 是空集, 因为满足条件 $x^2 + 1 = 0$ 的实数是不存在的. 空集记作 $\emptyset$, 并规定空集为任何集合的子集.

2. 区间

设 a, b 为实数, 且 $a < b$, 数集 $\{x | a < x < b\}$ 称为开区间, 记作 (a, b) , 即 $(a, b) = \{x | a < x < b\}$, 见图 1-1.

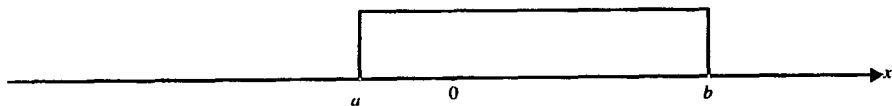


图 1-1

数集 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间, 记作 $[a, b]$, 即 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$, 见图 1-2.

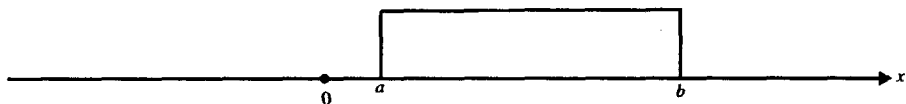


图 1-2

类似地 $[a, b)$, $(a, b]$ 称为半开区间, 即 $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$, 见图 1-3; $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$, 见图 1-4.

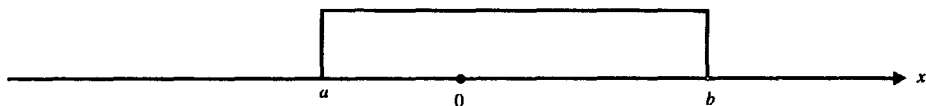


图 1-3

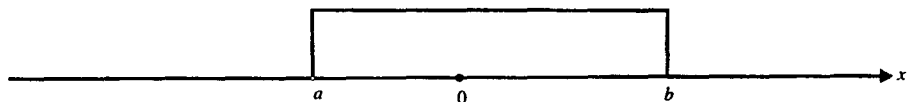


图 1-4

以上这些区间都称为有限区间, 数 $b-a$ 称为这些区间的长度.

此外还有无限区间, 引进 $+\infty$ (读作正无穷大) 及 $-\infty$ (读作负无穷大), 则可类似地表示 $[a, +\infty) = \{x | a \leq x\}$, 见图 1-5; $(-\infty, b) = \{x | x < b\}$, 见图 1-6; $(-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\}$, 见图 1-7.

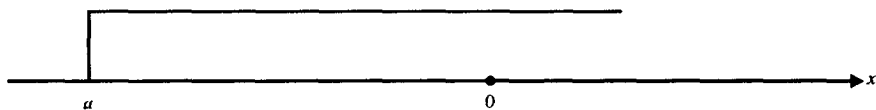


图 1-5

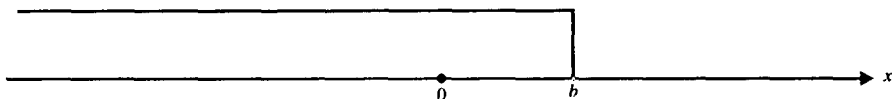


图 1-6

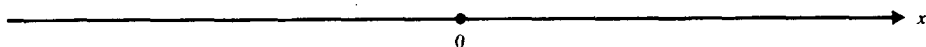


图 1-7

为了避免重复,今后用“区间 I ”代表各种类型的区间.

3. 邻域

设 a 与 δ 是两个实数,且 $\delta > 0$. 开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 称为 a 的 δ 邻域,记作 $U(a, \delta)$,即 $U(a, \delta) = \{x | a - \delta < x < a + \delta\}$. 其中 a 叫作这个邻域的中心, δ 称为这邻域的半径.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 在点 a 的邻域去掉中心后,称为点 a 的去心邻域,记作 $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$,即 $\overset{\circ}{U}(a, \delta) = \{x | 0 < |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$.

1.2 函数

1.2.1 函数的概念

在研究某个自然现象或实际问题时,往往会发现问题中的变量并不是彼此独立地变化的,而是相互联系并遵循着一定的变化规律. 考虑以下几个例子.

例 1 半径为 R 的圆的面积为

$$A = \pi R^2$$

这就是两个变量 A 与 R 之间的关系,当半径 R 在区间 $(0, +\infty)$ 内任取一个

值时,由上式就可唯一确定 A 的一个值.

例 2 表 1-1 给出世界人口数量 P 与某些年份 t 之间的关系.

表 1-1

年度	人口/百万
1900	1 650
1910	1 750
1920	1 860
1930	2 070
1940	2 300
1950	2 560
1960	3 040
1970	3 710
1980	4 450
1990	5 280
2000	6 080

对于每一个年份 t ,从表格中就可唯一地确定人口数量 P 的值.

例 3 图 1-8 是气温自动记录仪描出的某一天的气温变化曲线,它给出了时间 t 与气温 T 之间的关系.

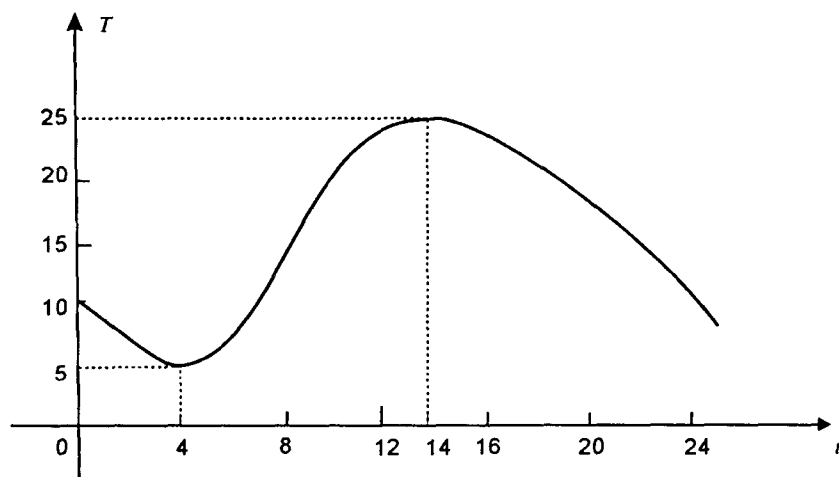


图 1-8

当时间 t 在区间 $[0, 24]$ 中任取一个值时,从图上可以唯一地确定 T 的值,如 $t=14$ 时, $T=25\text{ }^{\circ}\text{C}$.

从以上的例子看到,它们所描述的问题虽各不相同,但有共同的特征:

(1) 每个问题中都有两个变量, 它们之间不是彼此独立的, 而是相互联系, 相互制约的;

(2) 当一个变量在它的变域中任意取定一值时, 另一个变量按一定法则就有一个确定的值与之相对应.

具有这两个特征的变量之间的依存关系, 称为函数关系. 下面给出函数的定义.

定义 1 设 A 是一个非空数集, 如果存在一个对应关系 f , 使得对 A 中任一 $x (\forall x \in A)$, 通过 f 都对对应唯一一个 $y \in \mathbf{R}$, 则称 f 是确定在 A 上的一个函数, 记作

$$f: A \rightarrow \mathbf{R}.$$

集合 A 称为函数的定义域, x 称为自变量, y 称为因变量, x 所对应的 y 称为 f 在 x 的函数值, 记为 $y = f(x)$. 全体函数值的集合

$$f(A) = \{y \mid y = f(x), x \in A\}$$

称为函数的值域.

在数学中, 对于抽象的函数表达式, 我们约定: 函数的定义域就是使函数表达式有意义的自变量的取值范围.

例 4 函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 $[-1, 1]$.

例 5 函数 $y = \lg(5x-4)$ 的定义域应满足 $5x-4 > 0$, 故定义域为 $(\frac{4}{5}, +\infty)$.

例 6 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$ 的定义域应满足 $x^2-x-2 > 0$, 即 $(x-2)(x+1) > 0$, 故定义域为 $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

例 7 函数 $y = \arcsin \frac{x-1}{5} + \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域应满足 $\left| \frac{x-1}{5} \right| \leq 1$ 且 $x^2 < 25$, 即为 $-5 \leq x-1 \leq 5$ 且 $-5 < x < 5$, 故定义域为 $[-4, 5)$.

在函数关系中, 定义域、对应规则和值域是确定函数关系的三个要素. 如果两个函数的对应规则和定义域、值域相同, 则认为这两个函数是相同的, 至于自变量和因变量用什么字母表示则无关紧要.

例 8 下列各对函数是否相同?

$$(1) f(x) = x+1, g(x) = \frac{x^2-1}{x-1};$$

$$(2) f(x) = |x|, g(x) = \sqrt{x^2}.$$

解 (1) 不相同. $f(x) = x+1$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ 的定

义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, 因此 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域不相同, 故不是相同的函数.

(2) 相同. 因 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域相同, 均为 $(-\infty, +\infty)$, 而且对应规则、值域也相同, 所以是相同的函数.

1.2.2 函数的表示法

由于函数的对应法则是多种多样的, 所以表示一个函数要采取适当的方法. 从上面所举的三个例子可见: 在例 1 中, 函数的对应法则用一个公式或叫作解析式来表示, 所以称为解析法; 在例 2 中, 函数的对应法则用一张表格来表示, 称为表格法; 在例 3 中, 函数的对应法则用一条曲线来表示, 称为图示法. 一般说来, 函数的常用表示法就是上述三种. 这三种表示法各有优缺点.

解析法的优点是形式简明, 便于作理论研究与数值计算; 缺点是不如图示法来得直观.

表格法的优点是表中有对应数据, 可以直接查用; 缺点是不便于作理论研究, 也不直观.

图示法的优点是直观, 并可从图形看出函数的变化情况; 缺点是不便于作理论研究. 尽管如此, 今后在研究函数时仍常常借助于它的图形, 从直观上去了解它的变化情况.

在实用上有些函数不能用单独一个解析式来表示, 往往当自变量在某一个区间上取值时, 可用这个解析式来表示, 而在另一个区间上取值时, 就得用另一个解析式来表示. 这种在不同区间上用不同解析式来表示的函数称为分段函数. 例如在电子技术中经常用到的单位阶跃函数就是一个分段函数:

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t > a \end{cases} \quad (a \geq 0)$$

它的定义域为 $(-\infty, a) \cup (a, +\infty)$, 图形如图 1-9 所示.

1.2.3 函数的性质

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $A \subset D$, 如果存在一个常数 $M > 0$, 使得对于一切 $x \in A$, 都有

$$|f(x)| \leq M$$

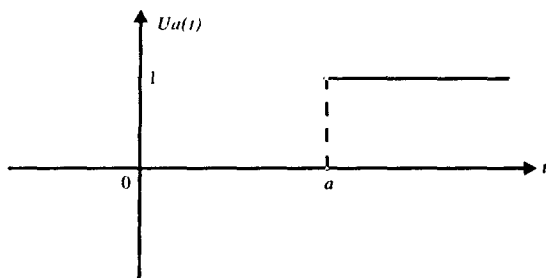


图 1-9

则称函数 $f(x)$ 在 A 上有界. 否则称函数 $f(x)$ 在 A 上无界, 也就是说, 对无论多大的 M , 总可以找到 A 中的点 x_1 , 使 $|f(x_1)| > M$.

函数 $y = \sin x$ 无论 x 取任何实数, 总有 $|\sin x| \leq 1$ 成立, 所以 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的. 又如函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在半开区间 $[1, +\infty)$ 上是有界的, 因为对一切 $x \in [1, +\infty)$, 总有 $|f(x)| = \left| \frac{1}{x} \right| \leq 1$. 但 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在开区间 $(0, 1)$ 内是无界的, 因为对于任意取定的正数 M , 不妨设 $M > 1$, 则 $\frac{1}{2M} \in (0, 1)$, 当取 $x_1 = \frac{1}{2M}$ 时, $|f(x_1)| = \left| \frac{1}{x_1} \right| = 2M > M$. 因此, 同一个函数在不同的区间上有界性可能不同.

当一个函数是有界函数时, 它的图形是介于两条水平直线 $y = M$ 及 $y = -M (M > 0)$ 之间的曲线.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$, 若对任意两点 $x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 总有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ (或 $f(x_1) \geq f(x_2)$) 成立, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加 (或单调减少) 的.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数. 当函数单调增加时, 它的图形是随 x 的增加而上升的曲线; 而函数单调减少时, 它的图形是随着 x 的增大而下降的曲线.

例如, 函数 $y = x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调增加, 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是单调减少的, 所以在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内, 函数 $y = x^2$ 不是单调函数, 见图 1-10. 又例如, 函数 $y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的函数, 见图 1-11.

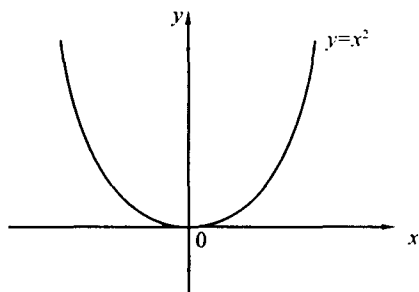


图 1-10

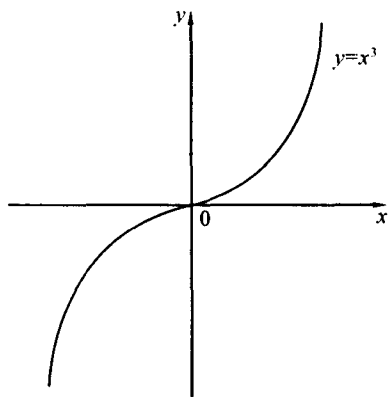


图 1-11

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 如果对于任一个 $x \in D$, 总有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数; 如果对于任一个 $x \in D$, 总有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴是对称的, 如图 1-12(a) 所示. 奇函数的图形关于原点对称的, 如图 1-12(b).

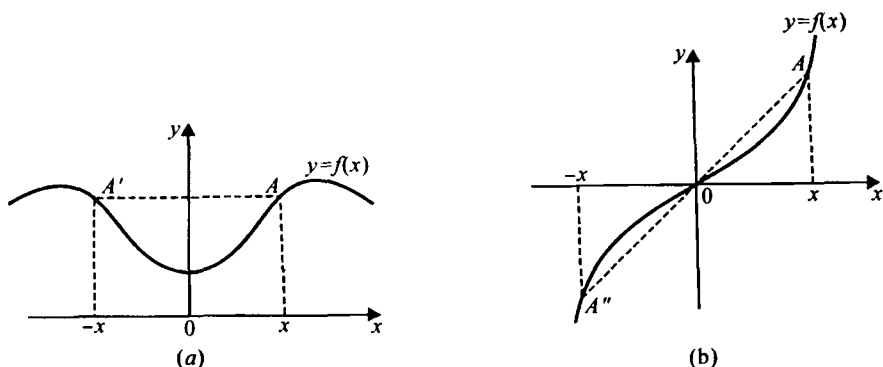


图 1-12

函数 $y = x^2 + 1$, $y = \cos x$, $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 等皆为偶函数; 而函数 $y = x^2 \sin x$, $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 等皆为奇函数. 函数 $y = \sin x + \cos x$ 及 $y = x + x^2$ 既非奇函数, 也非偶函数.