邱淦俤　编著

高等数学

GAODENG SHUXUE

GAODENG SHUXUE

G A O D E N G　S H U X U E

厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS

高 等 数 学

邱淦俤 编著

厦门大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/邱淦俤编著．—厦门:厦门大学出版社,2007.2
ISBN 978-7-5615-2717-7

Ⅰ.高…　Ⅱ.邱…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 020578 号

厦门大学出版社出版发行
(地址:厦门大学　邮编:361005)
http://www.xmupress.com
xmup @ public.xm.fj.cn
厦门昕嘉莹印刷有限公司印刷
2007 年 2 月第 1 版　2007 年 2 月第 1 次印刷
开本:787×960　1/16　印张:26.5
字数:460 千字　印数:0 001—5 000 册
定价:38.00 元

前　言

随着当前教育改革的不断深化，大学的高等数学教育已不单纯只是向学生传授基础知识，为相关学科和其他数学分支提供计算工具，更重要的是向学生灌输、渗透数学思想、数学方法，培养学生的创新精神、创新意识、创新思维与创新能力，提高学生的数学素质、数学思维能力和科学计算能力，着重提高学生发现问题与解决问题的实际应用能力，以便更好地在市场经济体制的新形势下实施有效的素质教育，培养适应社会需求、为经济发展服务的高素质应用型人才．为此，作者尝试编写了本书，旨在为高校教材建设之路作大胆的初步探索．

本书在内容组织上力求体现如下几个特色：

1．在不破坏知识与理论的科学性、系统性和严谨性的前提下，尽可能地深入浅出，通俗易懂地简明地解释抽象的数学概念．

2．重视数学知识的应用，充分展示数学理论的本质与实际意义，突出培养解决实际问题的数学思想、方法与能力，并配备大量的几何、物理、经济等方面的应用例题配合强化训练．

3．注重现代科技与数学的有机结合与相互渗透，适应现代数学的发展趋势．介绍了当前颇受关注且作用重大的数学建模与数学软件的相关知识，着力提高学生的综合运用能力．

4．本书为理工与经管类普适版，各专业可灵活根据不同需求有所侧重与删减．

本书在编写过程中得到数学系同仁陈大波、林秀清、周仙耕、赵小珍、刘芳、林影、许莉丽等老师的大力支持，没有他们无私的辛勤劳动，本书无法如此之快地与读者见面，在此，一并向他们表示诚挚谢意．此外，衷心地感谢厦门大学出版社的大力支持与帮助．

编写一本富有鲜明特色又符合广大师生需求的教材决非朝夕之功．虽然我们也已尽力而为，但奈于水平，加之时间仓促，遂不尽如人意之处恐在所难免，敬请专家、读者不吝指教．

编者

2006 年 9 月

目 录

第一章　函数

函数是高等数学研究的主要对象，本章将介绍函数的概念及基本初等函数与经济中常见的一些函数，这些内容是学习本课程必须掌握好的基本知识.

1.1　预备知识

1. 集合

集合是数学中的一个基本概念. 一般地说，所谓集合(或简称集)是指具有特定性质的一些事物的总体. 组成这个集合的事物称为该集合的元素.

例 1　06 级数学系的学生.

例 2　全体自然数.

例 3　某公司的全体员工.

通常以大写字母 A、B、C…表示集合，元素以小写字母 a、b、c…表示. 事物 a 是集合 A 的元素，记作 $a\in A$(读作 a 属于 A)；事物 a 不是集合 A 的元素，记作 $a\notin A$(读作 a 不属于 A).

由有限多个元素组成的集合称为有限集. 例如，由元素 a_1、a_2、a_3…a_n 组成的集合 A，可记作 $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$.

由无穷多个元素组成的集合称为无限集. 无限集通常用如下的记号表示：

$M=\{x|x$ 所具有的特性$\}$.

微积分中用到的集合主要是数集，即元素都是数的集合. 我们将全体自然数的集合记作 $\mathbf{N}$，全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$，全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$，全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即若 $x\in A$，则必 $x\in B$，就说 A 是 B 的子集，记作 $A\subset B$(读作 A 包含于 B 或读作 B 包含 A).

例如　$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，就称集合 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

不含任何元素的集合称为空集. 例如 $\{x \mid x \in R, x^2+1=0\}$ 是空集，因为满足条件 $x^2+1=0$ 的实数是不存在的. 空集记作 $\varnothing$，并规定空集为任何集合的子集.

2. 区间

设 a,b 为实数，且 $a<b$，数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为开区间，记作 (a,b)，即 $(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$，见图 1-1.

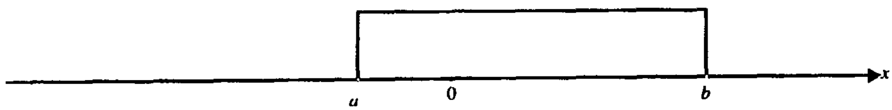


图 1-1

数集 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为闭区间，记作 $[a,b]$，即 $[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$，见图 1-2.

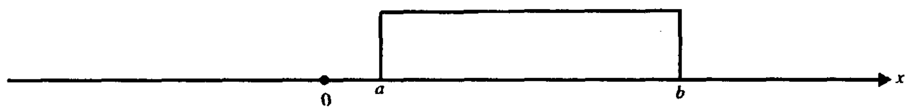


图 1-2

类似地 $[a,b)$，$(a,b]$ 称为半开区间，即 $[a,b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}$，见图 1-3；$(a,b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$，见图 1-4.

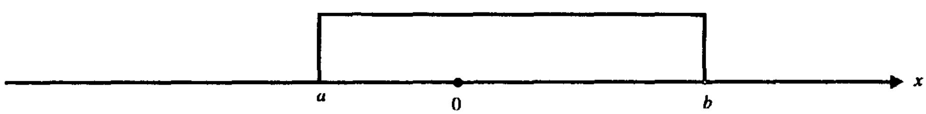


图 1-3

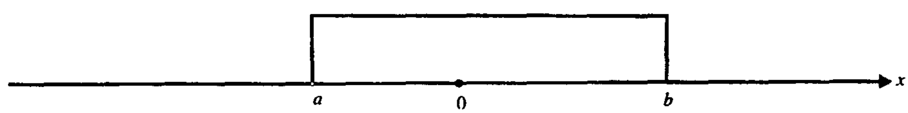


图 1-4

以上这些区间都称为有限区间，数 $b-a$ 称为这些区间的长度.

此外还有无限区间，引进 $+\infty$（读作正无穷大）及 $-\infty$（读作负无穷大），则可类似地表示 $[a,\infty)=\{x \mid a \leqslant x\}$，见图 1-5；$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$，见图 1-6；$\{-\infty,+\infty\}=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$，见图 1-7.

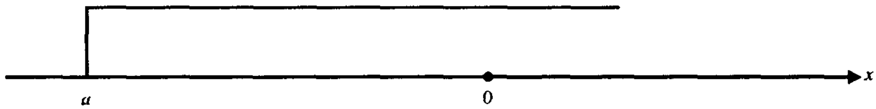


图 1-5

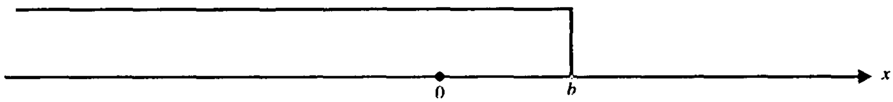


图 1-6

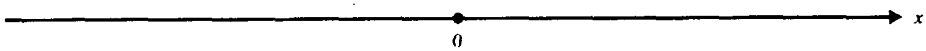


图 1-7

为了避免重复，今后用“区间 I”代表各种类型的区间.

3. 邻域

设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$. 开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即 $U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}$. 其中 a 叫作这个邻域的中心，δ 称为这邻域的半径.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 在点 a 的邻域去掉中心后，称为点 a 的去心邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$.

1.2　函数

1.2.1　函数的概念

在研究某个自然现象或实际问题时，往往会发现问题中的变量并不是彼此独立地变化的，而是相互联系并遵循着一定的变化规律. 考虑以下几个例子.

例 1　半径为 R 的圆的面积为

$$A=\pi R^2$$

这就是两个变量 A 与 R 之间的关系，当半径 R 在区间 $(0,+\infty)$ 内任取一个

值时，由上式就可唯一确定 A 的一个值.

例 2 表 1-1 给出世界人口数量 P 与某些年份 t 之间的关系.

表 1-1

年度	人口/百万
1900	1 650
1910	1 750
1920	1 860
1930	2 070
1940	2 300
1950	2 560
1960	3 040
1970	3 710
1980	4 450
1990	5 280
2000	6 080

对于每一个年份 t，从表格中就可唯一地确定人口数量 P 的值.

例 3 图 1-8 是气温自动记录仪描出的某一天的气温变化曲线，它给出了时间 t 与气温 T 之间的关系.

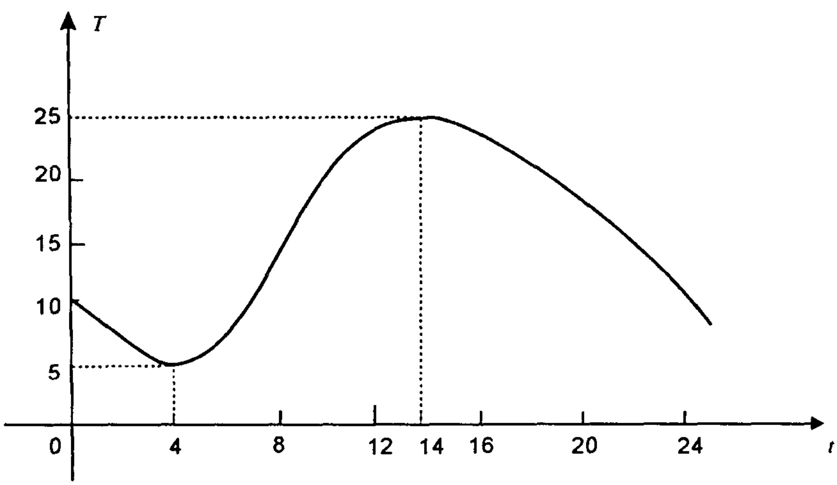


图 1-8

当时间 t 在区间[0,24]中任取一个值时，从图上可以唯一地确定 T 的值，如 $t=14$ 时，$T=25$ ℃.

从以上的例子看到，它们所描述的问题虽各不相同，但有共同的特征：

(1)每个问题中都有两个变量,它们之间不是彼此独立的,而是相互联系,相互制约的;

(2)当一个变量在它的变域中任意取定一值时,另一个变量按一定法则就有一个确定的值与之相对应.

具有这两个特征的变量之间的依存关系,称为函数关系.下面给出函数的定义.

定义1　设 A 是一个非空数集,如果存在一个对应关系 f,使得对 A 中任一 $x(\forall x\in A)$,通过 f 都对应唯一一个 $y\in\mathbf{R}$,则称 f 是确定在 A 上的一个函数,记作

$$f:A\to\mathbf{R}.$$

集合 A 称为函数的定义域,x 称为自变量,y 称为因变量,x 所对应的 y 称为 f 在 x 的函数值,记为 $y=f(x)$.全体函数值的集合

$$f(A)=\{y\mid y=f(x),x\in A\}$$

称为函数的值域.

在数学中,对于抽象的函数表达式,我们约定:函数的定义域就是使函数表达式有意义的自变量的取值范围.

例4　函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为$[-1,1]$.

例5　函数 $y=\lg(5x-4)$ 的定义域应满足 $5x-4>0$,故定义域为$(\frac{4}{5},+\infty)$.

例6　函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$ 的定义域应满足 $x^2-x-2>0$,即$(x-2)(x+1)>0$,故定义域为$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.

例7　函数 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域应满足 $\left|\dfrac{x-1}{5}\right|\leqslant1$ 且 $x^2<25$,即为$-5\leqslant x-1\leqslant5$ 且$-5<x<5$,故定义域为$[-4,5)$.

在函数关系中,定义域、对应规则和值域是确定函数关系的三个要素.如果两个函数的对应规则和定义域、值域相同,则认为这两个函数是相同的,至于自变量和因变量用什么字母表示则无关紧要.

例8　下列各对函数是否相同?

(1) $f(x)=x+1,g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$;

(2) $f(x)=|x|,g(x)=\sqrt{x^2}$.

解　(1)不相同.$f(x)=x+1$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$的定

义域为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，因此$f(x)$和$g(x)$的定义域不相同，故不是相同的函数.

(2)相同.因$f(x)$和$g(x)$的定义域相同，均为$(-\infty,+\infty)$，而且对应规则、值域也相同，所以是相同的函数.

1.2.2 函数的表示法

由于函数的对应法则是多种多样的，所以表示一个函数要采取适当的方法.从上面所举的三个例子可见：在例1中，函数的对应法则用一个公式或叫作解析式来表示，所以称为**解析法**；在例2中，函数的对应法则用一张表格来表示，称为**表格法**；在例3中，函数的对应法则用一条曲线来表示，称为**图示法**.一般说来，函数的常用表示法就是上述三种.这三种表示法各有优缺点.

解析法的优点是形式简明，便于作理论研究与数值计算；缺点是不如图示法来得直观.

表格法的优点是表中有对应数据，可以直接查用；缺点是不便于作理论研究，也不直观.

图示法的优点是直观，并可从图形看出函数的变化情况；缺点是不便于作理论研究.尽管如此，今后在研究函数时仍常常借助于它的图形，从直观上去了解它的变化情况.

在实用上有些函数不能用单独一个解析式来表示，往往当自变量在某一个区间上取值时，可用这个解析式来表示，而在另一个区间上取值时，就得用另一个解析式来表示.这种在不同区间上用不同解析式来表示的函数称为**分段函数**.例如在电子技术中经常用到的单位阶跃函数就是一个分段函数：

$$u_a(t)=\begin{cases}0, & t<a\\1, & t>a\end{cases}\qquad(a\geqslant 0)$$

它的定义域为$(-\infty,a)\cup(a,+\infty)$，图形如图1-9所示.

1.2.3 函数的性质

1.函数的有界性

设函数$f(x)$的定义域为D，数集$A\subset D$，如果存在一个常数$M>0$，使得对于一切$x\in A$，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

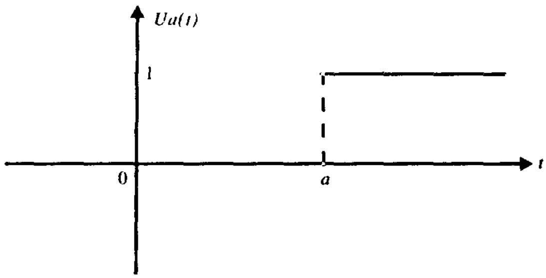


图 1-9

则称函数 $f(x)$在 A 上有界. 否则称函数 $f(x)$在 A 上无界,也就是说,对无论多大的 M,总可以找到 A 中的点 x_1,使$|f(x_1)|>M$.

函数 $y=\sin x$ 无论 x 取任何实数,总有$|\sin x|\leqslant 1$ 成立,所以 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的. 又如函数 $f(x)=\frac{1}{x}$在半开区间$[1,+\infty)$上是有界的,因为对一切 $x\in[1,+\infty)$,总有$|f(x)|=\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$. 但 $f(x)=\frac{1}{x}$在开区间$(0,1)$内是无界的,因为对于任意取定的正数 M,不妨设 $M>1$,则$\frac{1}{2M}\in(0,1)$,当取$x_1=\frac{1}{2M}$时,$|f(x_1)|=\left|\frac{1}{x_1}\right|=2M>M$. 因此,同一个函数在不同的区间上有界性可能不同.

当一个函数是有界函数时,它的图形是介于两条水平直线 $y=M$ 及 $y=-M(M>0)$之间的曲线.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$的定义域为 D,区间 $I\subset D$,若对任意两点 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,总有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$(或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$)成立,则称函数 $f(x)$在区间 I 上是单调增加(或单调减少)的.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数. 当函数单调增加时,它的图形是随 x 的增加而上升的曲线;而函数单调减少时,它的图形是随着 x 的增大而下降的曲线.

例如,函数 $y=x^2$ 在区间$[0,+\infty)$上单调增加,在区间$(-\infty,0]$上是单调减少的,所以在区间$(-\infty,+\infty)$内,函数 $y=x^2$ 不是单调函数,见图 1-10. 又例如,函数 $y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的函数,见图 1-11.

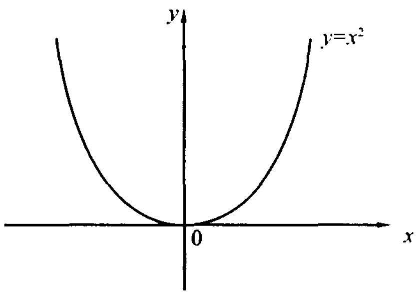


图 1-10

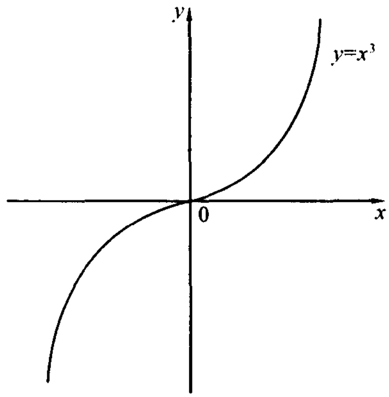
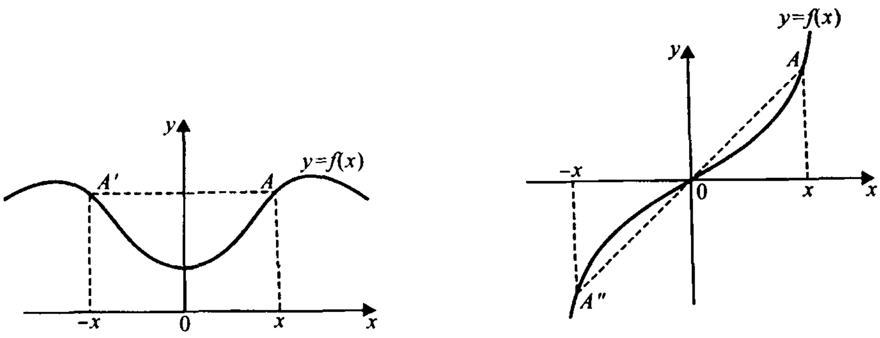


图 1-11

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任一个 $x\in D$，总有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对于任一个 $x\in D$，总有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴是对称的，如图 1-12(a)所示. 奇函数的图形关于原点是对称的，如图 1-12(b).



(a)　　(b)

图 1-12

函数 $y=x^2+1$，$y=\cos x$，$y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 等皆为偶函数；而函数 $y=x^2\sin x$，$y=\dfrac{1}{1+x^2}$，$y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 等皆为奇函数. 函数 $y=\sin x+\cos x$ 及 $y=x+x^2$ 既非奇函数，也非偶函数.