中等专业学校试用教材

财经类专业通用

数学(第四册)
教学参考书

财经类中专数学教材编写组 编

高等教育出版社

关丁去

中等专业学校试用教材

财经类专业通用

数　　学

第四册

教学参考书

财经类中专数学教材编写组　编

高等教育出版社

(京)112号

本教学参考书是以1987年财经类专业通用的《中等专业学校数学教学大纲(试行草案)》为依据，为配合财经类中专数学教材编写组所编《数学》的教学而编写的，与教材相配套，分四册出版，本书是第四册。可供财经类中专数学教师参考。

中等专业学校试用教材
财经类专业通用

数　　学

第四册

教学参考书

财经类中专数学教材编写组　编

*

高等教育出版社出版
新华书店上海发行所发行
崇明红卫印刷厂印装

*

开本787×1092　1/32　印张9　　字数185,000
1992年2月第1版　1994年2月第3次印刷
印数7,807—11,856
ISBN 7-04-003730-0/O·1101
定价 3.85 元

序　言

本教学参考书是根据1987年国家教育委员会审定的财经类专业通用的《中等专业学校数学教学大纲(试行草案)》和财经类中专数学教材编写组所编的财经类专业通用《数学》教材编写的.

本教学参考书共分四册，可与上述教材配套使用. 主要内容包括上述教材各章的目的要求、教材内容说明、教学建议、各章小结、部分习题的提示或解答和一些参考题等.

本书是由国家教委组织的财经类中专数学教材编写组编写的. 第一、二两册由北京市供销学校贝虹编写，第三册由上海金融专科学校姚叠叁编写，第四册由南京铁路运输学校沈清编写，全书由主编沈清统稿.

本书由全国中专数学课程组组织审稿. 参加第四册教学参考书审稿会的有张又昌、吴伟贤、袁时中、刘建华、周建和、秦柏前.

在编写过程中，曾得到有关单位的大力支持和协助，谨在此表示衷心的感谢.

由于编者的水平所限，如有不当之处，恳请广大读者批评指正.

财经类中专数学教材编写组

一九九一年三月

目　录

第十七章　矩阵及其应用

本章教材包含行列式、矩阵、投入产出和线性规划四个部分. 由于财经类各专业的专业需求不同，所以后两个部分列为选学，供有关专业选用.

第一部分　行列式

一　目的要求

1. 理解行列式的意义，熟练掌握按对角线法则展开二阶、三阶行列式.

2. 理解行列式的性质. 理解代数余子式的概念和按行(列)展开定理. 掌握用降阶的方法求三阶和四阶行列式的值.

3. 了解克莱姆法则，并会运用它解线性方程组.

二　教材说明

这部分教材共分四节. 第一节为二阶、三阶行列式，第二节为三阶行列式的性质；第三节为高阶行列式展开举例，第四节为克莱姆法则.

教材从求二元、三元线性方程组的解出发引入二阶、三阶行列式的概念及对角线展开法则，接着又将二阶、三阶行列式运用于解线性方程组，使行列式与线性方程组有机地联系在

一起，让学生边学边用，易于接受和理解.

教材第二节着重讨论了三阶行列式的性质，它们不仅在理论上有很大的价值，而且简化了行列式的计算.

在一般线性代数教材中，高阶行列式是用其元素的排列方式及其奇偶性来定义，然后再研究行列式的性质，利用性质来简化行列式的计算，这样处理在理论上比较完整，但需要引进较多的新概念. 本教材采用先讨论三阶行列式的性质，然后仿照三阶行列式展开的性质，逐次降阶，用递推的方法来定义高阶行列式. 这种处理方法中专学生容易接受. 因此，在不违背科学性，尽量简化一些的前题下，我们采用这种处理方法.

第一部分的最后讲解克莱姆法则. 当未知数个数与方程个数相等，且系数行列式不为零时，应用克莱姆法则可求出这类特殊线性方程组的解，并且是用方程组的系数和常数项表出它的解，形式简明易记. 其不足之处是计算量大，而且当 $D=0$ 时不能直接使用，这些问题将在以后继续讨论.

第一部分的重点：

1. 行列式的性质和计算；

2. 用克莱姆法则解线性方程组.

第一部分的难点：

利用行列式的性质计算行列式的值.

行列式的计算除二阶、三阶行列式可用对角线法则以外，四阶以上行列式的计算主要应用行列式的性质，因此，行列式的性质是这部分的主要内容之一，又是这部分的重点. 由于计算行列式的灵活性很大，所以利用性质计算行列式的值，也

是这部分的难点.

第一部分教学约需 8 课时,具体分配如下(仅供参考):

§17-1	二阶、三阶行列式	2 课时
§17-2	三阶行列式的性质	2 课时
§17-3	高阶行列式展开举例	2 课时
§17-4	克莱姆法则	2 课时

三 教学建议

§17-1 二阶、三阶行列式

1. 第一部分的主要内容是介绍行列式的概念、性质以及解线性方程组的克莱姆法则. 克莱姆法则只能适用于未知数个数和方程个数相等的情形. 但在实践中常会遇到未知数的个数与方程的个数不相等的情形, 因此线性方程组的行列式解法只是解线性方程组的一种方法, 在教学中可不必过分强调克莱姆法则的重要意义.

2. 在过去的学习中,未知数一般都是用字母 $x, y, z, \cdots$ 来表示. 方程组的系数一般是用 $a, b, c, \cdots$ 来表示. 但当未知数较多时,我们将常常使用 $x_j(j=1, 2, 3, \cdots, n)$表示未知数; 用 $a_{ij}(i=1, 2, 3, \cdots, m, j=1, 2, 3, \cdots, n)$表示方程组的系数; 用 $b_i(i=1, 2, 3, \cdots, m)$表示常数项(本部分主要讨论 $m=n$ 的情形). 在教材中,为了使学生集中精力理解行列式的概念,直到第四节讲解克莱姆法则时,才引进这些符号. 但如果学生接受情况比较好,可以尽早引入这些符号,使学生早日熟悉这种写法.

用 $a_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$表示行列式的元素时,应使学生

注意：每一个元素都带有两个下标，第一个下标表示这个元素所在行的位置，第二个下标表示这个元素所在列的位置.

3．引入二阶、三阶行列式的概念时，不必把过多的时间用于解线性方程组，以便集中精力解决主要问题．例如用加减消元法去解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, & (1) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, & (2) \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 & (3) \end{cases}$$

时，应按事先归纳好的步骤，即由

$$(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})\times(1)+(a_{32}a_{13}-a_{12}a_{33})\times(2) \\ +(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})\times(3)$$

消去 x_2，x_3 得 x_1，并用同样的方法求得 x_2，x_3.

§17-2　三阶行列式的性质

1．三阶行列式的性质是第一部分的重点．由于教材是用行列式的展开性质来定义高阶行列式，并且将三阶行列式的性质直接推广到高阶行列式，并用于高阶行列式的计算，因此要求学生正确理解这部分内容的意义，并能熟练掌握其计算.

2．行列式的性质1是一种保值变换，即变换后行列式的值不变．由于“行、列互换，其值不变”，所以虽然以后的几个性质都只涉及行，但对列都成立．例如性质2“行列式两行互换，行列式仅改变符号”．根据性质1，于是有“行列式两列互换，行列式仅改变符号”，余类推.

性质1和性质2都可用行列式的定义加以验证.

在教学中可以介绍转置行列式的概念. 将行列式 D 的行依次换为列，所得的一个新行列式 D^T 叫做行列式 D 的转置行列式. 于是性质 1 可叙述为“行列式与其转置行列式的值相等”. 转置的概念在矩阵中将会用到，可以在此处加以介绍.

3. 性质 3 中的某两行对应元素相同是指这两行对应于同一列的两元素相同. 性质 3 可视为性质 2 的推论.

事实上，设行列式 D 有两行相同，则根据性质 2 对换这两行后所得的行列式应等于 $-D$，又因为这两行是相同的，所以互换后的行列式与原行列式相同，故有

$$D=-D,$$

即

$$D=0.$$

4. 性质 4 又可理解为用数 k 乘行列式某一行的各元素等于用 k 乘此行列式. 利用性质 4 可简化行列式的计算，例如下列行列式的计算，应先化简再用对角线法则展开.

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 6 & 12 & 15 \\ 4 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\times1 & 2\times4 & 2\times2 \\ 3\times2 & 3\times4 & 3\times5 \\ 4\times1 & 4\times1 & 4\times2 \end{vmatrix}$$

$$=2\times3\times4\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=24(8+4+20-8-5-16)$$

$$=24\times3=72.$$

要提醒学生注意，利用性质 4 时常会犯的错误：当每一行均有因子 k 提出时，行列式前只乘以 k. 例如

$$\begin{vmatrix} 58 & 62 & 60 \\ 32 & 30 & 28 \\ 6 & 4 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\times 29 & 2\times 31 & 2\times 30 \\ 2\times 16 & 2\times 15 & 2\times 14 \\ 2\times 3 & 2\times 2 & 2\times(-3) \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} 29 & 31 & 30 \\ 16 & 15 & 14 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

是错误的．正确的结果应在行列式前乘以 $2\times 2\times 2=2^3$，即

$$\begin{vmatrix} 58 & 62 & 60 \\ 32 & 30 & 28 \\ 6 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 2^3\begin{vmatrix} 29 & 31 & 30 \\ 16 & 15 & 14 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$$

将行列式的某一行(列)同加(减)一个数，也是学生易犯的错误，例如

$$\begin{vmatrix} 68 & 72 & 70 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 68-70 & 72-70 & 70-70 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$=\begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & 6 \end{vmatrix}.$$

这是学生错误认为“行列式的同一行(列)减去同一个数后行列式不变”得出的．

5．讲解性质 5 时要强调，“某一行的各元素是两数之和”时，可按这两数分成两个行列式．有的学生错误认为“行列式的各元素是两数之和”，因此有时会出现如下的错误，例如

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+d \\ b+c & c+d & d+e \\ c+d & d+e & e+f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & d \\ c & d & e \\ d & e & f \end{vmatrix}.$$

它正确的解法是:

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+d \\ b+c & c+d & d+e \\ c+d & d+e & e+f \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b+c & c+d & d+e \\ c+d & d+e & e+f \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & c & d \\ b+c & c+d & d+e \\ c+d & d+e & e+f \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c+d & d+e & e+f \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & d & e \\ c+d & d+e & e+f \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} b & c & d \\ b & c & d \\ c+d & d+e & e+f \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & c & d \\ c & d & e \\ c+d & d+e & e+f \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ d & e & f \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & d & e \\ c & d & e \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & d & e \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

$$+0+\begin{vmatrix} b & c & d \\ c & d & e \\ c & d & e \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & c & d \\ c & d & e \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ d & e & f \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & d & e \\ d & e & f \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & c & d \\ c & d & e \\ d & e & f \end{vmatrix}.$$

6. 性质 6 也是一种保值变换,对于行列式的化简和计算是很有用的,应多作练习,使学生能熟练掌握. 利用性质 6 进

行计算时，应注意行列式某一行(列)的各元素加上另一行(列)对应元素的 k 倍进行变换时，另一行(列)的各元素不变．例如，将行列式的第3行乘以 k，加到第1行上时，第3行不变，即"改变第1行，保留第3行"．所以在进行变换时，要注意每一次变换保留哪一行(列)，变动哪一行(列)．

学生还会出现如下的错误，例如：

$$\begin{vmatrix}7 & 2 & 3\\ 5 & -1 & 3\\ 8 & 7 & 2\end{vmatrix} \xlongequal[\text{②行}+\text{①行}\times(-1)]{\text{①行}+\text{②行}\times(-1)} \begin{vmatrix}2 & 3 & 0\\ -2 & -3 & 0\\ 8 & 7 & 2\end{vmatrix}=0.$$

这主要是由于①行＋②行×(－1)时，变动的是第1行，保留的是第2行．第1行已经变动了，就不能再使用原有的第1行．

正确的变换应是

$$\begin{vmatrix}7 & 2 & 3\\ 5 & -1 & 3\\ 8 & 7 & 2\end{vmatrix} \xlongequal{\text{①行}+\text{②行}\times(-1)} \begin{vmatrix}2 & 3 & 0\\ 5 & -1 & 3\\ 8 & 7 & 2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{②行}+\text{①行}\times(-1)} \begin{vmatrix}2 & 3 & 0\\ 3 & -4 & 3\\ 8 & 7 & 2\end{vmatrix}.$$

7．讲解了上述性质后，需要通过例题来加以巩固．可以选择一些综合使用各种性质的例题

例 利用行列式性质证明

$$\begin{vmatrix}a+b & c & -a\\ a+c & b & -c\\ b+c & a & -b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b & a & c\\ a & c & b\\ c & b & a\end{vmatrix}.$$

证 $$\begin{vmatrix} a+b & c & -a \\ a+c & b & -c \\ b+c & a & -b \end{vmatrix} \xlongequal{\text{①列}+\text{③列}} \begin{vmatrix} b & c & -a \\ a & b & -c \\ c & a & -b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{提③列的负号}} -\begin{vmatrix} b & c & a \\ a & b & c \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{③列与②列对换}} \begin{vmatrix} b & a & c \\ a & c & b \\ c & b & a \end{vmatrix}.$$

为了使学生能切实掌握上述性质，要求学生在每一个变换的等号上方加注理由.

8. 在讨论性质 7 之前，要先讲清余子式和代数余子式的概念. 可以利用下述表格作辅助练习，帮助学生掌握这些概念.

例 写出行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -5 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

中诸元素的余子式和代数余子式.

解

元素 a_{ij}	余子式 D_{ij}	代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}D_{ij}$
a_{12}	$D_{12}=\begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=19$	$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-19$
a_{22}	$D_{22}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-11$	$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-11$
a_{32}	$D_{32}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -4 \end{vmatrix}=-2$	$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -4 \end{vmatrix}=2$

$(-1)^{i+j}$实际上是由元素a_{ij}在行列式中的位置来确定，也可用图

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

来帮助记忆．因此可由a_{11}的代数余子式的符号为"+"开始，往后顺序改变符号．

9．由于性质7是一个重要的性质，而教材未加证明，因此可以考虑利用对角线法则予以证明，使学生理解得更为深刻．

例如，行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

按第一行展开有

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.$$

证明

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{12}(a_{23}a_{31}$$

$$-a_{21}a_{33})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.$$

其余可类推.

10. 行列式可按任意一行(列)展开，从而一个三阶行列式一共可以写出六个等式(教材中只写出其中的三个等式)，它们是:

按行展开有三个

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13},$$

$$D=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23},$$

$$D=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33},$$

这三个等式又可表达成

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}$$

$$=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}A_{ik},\quad (i=1,\ 2,\ 3).$$

按列展开有三个

$$D=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31},$$

$$D=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32},$$

$$D=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33},$$

这三个等式又可表达成

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}$$

$$=\sum_{k=1}^{3}a_{kj}A_{kj},\quad (j=1,\ 2,\ 3).$$

在后继课程中，这些写法使用较多. 因此，让学生熟悉这

些写法，可以较早地掌握下标的运用，这对以后的学习是有好处的．

11．按行列式的某一行（列）展开是一种降阶运算的方法．用这种方法计算时，如果行列式某行（列）的零元素较多，使用起来比较方便．在展开行列式之前，一般应利用性质 6 进行保值变换，使行列式的某行（列）中仅有一个非零元素，将会使计算更为简便，但实质上还是利用性质 7 将行列式按某一行（列）展开．

12．为了简化行列式的计算，将行列式化为三角行列式，也是一种常用的方法．

上三角行列式（三阶）

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

或下三角行列式

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_4=\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

按对角线法则展开，可得

$$D_1=D_3=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33},$$

$$D_2=D_4=-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

它们的计算都比较简单．

可以证明任一行列式都可利用行列式的性质化为一个与其等值的三角行列式．化为三角行列式对高阶行列式的计算作用较大．