继续教育（函授）专科公共课系列教材

线性代数

Xianxing Daishu

邱启荣　主编

中国电力出版社
www.cepp.com.cn

继续教育（函授）专科公共课系列教材

线性代数

主　编　邱启荣

副主编　徐英凯　周继泉

内 容 提 要

本书是根据原教育部审定的《工程数学函授教学大纲》的内容进行编写的。本书的内容包括行列式、线性方程组、矩阵、线性空间与线性变换、矩阵的特征值和二次型。

为了适应高等函授教育的特点，本书对于定理和例题，尽可能地给出较为详细的证明与解法。此外本书还增加了 Matlab 在线性代数中的应用一章，通过计算机可以方便地求出问题的解。考虑到线性方程组理论比较具体，易于理解，而且由此引入矩阵的概念，秩及初等变换比较自然，因此在本书中采取了先讲线性方程组，后讲矩阵的方法。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/邱启荣主编．—北京：中国电力出版社，2005

（继续教育（函授）专科公共基础课系列教材）

ISBN 7－5083－3209－1

Ⅰ．线…　Ⅱ．邱…　Ⅲ．线性代数－函授大学－教材　Ⅳ．0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 024890 号

中国电力出版社出版、发行

（北京三里河路 6 号　100044　http://www.cepp.com.cn）

北京同江印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

2005 年 5 月第一版　　2005 年 5 月北京第一次印刷

787 毫米×1092 毫米　16 开本　11 印张　250 千字

印数 0001—4000 册　　定价 15.00 元

前 言

本书是根据原教育部审定的《工程数学函授教学大纲》的内容进行编写的。本书的内容包括行列式、线性方程组、矩阵、线性空间与线性变换、矩阵的特征值、二次型。

为了适应高等函授教育的特点，本书对于定理和例题，尽可能地给出较为详细的证明与解法。此外我们增加了 Matlab 在线性代数中的应用一章，通过计算机可以方便地求出问题的解。

考虑到线性方程组理论比较具体，比较易于理解，而且由此引入矩阵的概念，秩及初等变换比较自然。因此在本书中采取了先讲线性方程组，后讲矩阵的方法。

此外，由于应用正交变换化简二次型既方便，又清楚，因此在讲解化简二次型时，首先强调了正交化方法。

这本教材可以作为一般院校函授教学的教材，也可供自学线性代数的读者及工程技术人员参考。

本书的编写，第一章由周继泉执笔，第二章由徐英凯执笔，第三章由苑静执笔，第四章由赵文霞执笔，第五、第六章由邱启荣执笔。

在编写过程中，张之良教授给与了热情的指导与帮助，清华大学应用数学系李克群教授也提出了许多忠恳的意见，谷根代教授仔细审阅了全部稿件，在此深表谢意。在本书的编写、出版过程中，得到了朱勇华教授的帮助，在此也一并表示谢意。

由于编者的水平及经验所限，教材中肯定会有许多缺点及不当之处，希望读者多加指正，以便今后的修改。

编者

目 录

第一章
行　列　式

行列式是求解方程组的一个有力工具，它可以用来求解含有 n 个未知量、n 个方程的线性方程组。在中学我们已经讨论过应用二阶、三阶行列式求解含有两个与三个未知量的一次方程组。我们称一次方程组为线性方程组。

本章中我们讨论 n 阶行列式，着重讲解 n 阶行列式概念及其主要性质，并应用 n 阶行列式求解含有 n 个未知量、n 个方程的线性方程组。

§1-1　线性方程组与行列式

含有 n 个未知量，n 个方程的线性方程组可以表示如下：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1-1}$$

式中，x_1，x_2，…，x_n 是未知量，a_{ij}是系数（$i=1，2，\cdots，n$；$j=1，2，\cdots，n$），b_1，b_2，…，b_n 是常数项。如果在式（1-1）中，b_1，b_2，…，b_n 都等于零，我们就称式(1-1)为**齐次**线性方程组。如果在式（1-1）中，b_1，b_2，…，b_n 中至少有一个不为零，我们就称式（1-1）为**非齐次**线性方程组。

线性方程组式（1-1）的一个解，就是指这样的一组数 k_1，k_2，…，k_n，如果将其代入式（1-1），式（1-1）中的每一个方程都成立。

研究线性方程组，主要讨论以下两个问题：

(1) 判定一个线性方程组是否有解？

(2) 在有解的情况下确定解的个数，并求出所有的解。

根据初等数学的理论，我们知道可以用二阶行列式来解含有两个未知量、两个方程的线性方程组，用三阶行列式来解含有三个未知量、三个方程的线性方程组。

二阶与三阶行列式的定义分别是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

对含有两个未知量，两个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1-2}$$

如果其系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$，则式（1-2）有解

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{D}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{D}$$

同理，对于含有三个未知量，三个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1-3}$$

当 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ 时，式（1-3）有解：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}$$

式中

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

现在，我们的想法是将二阶与三阶行列式推广到 n 阶行列式，然后利用 n 阶行列式来解含有 n 个未知量，n 个方程的线性方程组。

那么，如何定义 n 阶行列式呢？为此，首先要弄清楚二阶、三阶行列式的结构规律，比如在二阶、三阶行列式中有下面的情形：有的项取正号，有的项取负号，这里有什么规律呢？每一项是由行列式中的哪些元素相乘？二阶、三阶行列式的性质如何推广到 n 阶行列式呢？我们将分别进行讨论。首先看看符号的规律，这一规律可以用各种不同的方法给出，我们利用排列进行讨论，为此先研究全排列。

§1-2 全 排 列

n 个数码 1，2，3，…，n 的一个全排列是指由这 n 个数码组成的一个有序数组。如 52314 是 1，2，3，4，5 的一个全排列。

n 个数码 1，2，3，…，n 的全排列到底有多少？例如，有三个数字 1，2，3 可以组成多少个没有重复数字的三位数？

这个问题相当于说，把三个数字分别放在百位、十位与个位上，有多少种不同的排法？

在百位上可以从1，2，3三个数字中任选一个，一共有三种选法，由于在三个数中已有其一被百位选定，所以在十位上只剩下两种选择的可能，当百位，十位各选定了一个数字后，则在个位上就没有选择的余地，也就是说仅有一个可能了。由乘法原理可知共有$3\times2\times1=6$种排列方法，它们是：123，132，213，231，312，321。

以上是三个数码的全排列，这可以推广到 n 个数码的全排列。

从 n 个数字中任取一个放在第一个位置上，共有 n 种方法；再从剩下的 $n-1$ 个数字中任取一个放在第二个位置上，共有 $n-1$ 种方法；这样继续下去，直到最后只剩下一个数字放在第 n 个位置上，只有一种方法。于是共有

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1 = n! \quad \text{种排法。}$$

由这 n 个自然数所构成的诸多排列中，其排列次序以由小到大为标准次序，按标准次序的排列称为自然排列。如果在一个排列中有较大的数在较小的数的前面，比如132，3在2的前面，就说这两个数码之间构成一个逆序。在一个全排列中出现的逆序的总数，叫做这个全排列的逆序数。

一个全排列的逆序数若为奇（偶）数，就称这个全排列为奇（偶）排列。我们约定逆序数为0的自然排列为偶排列。

【例1-1】 问四个数字1，2，3，4的全排列4321和1324各是偶排列还是奇排列？

解：在排列4321中，因为4在1，2，3的前面，有3个逆序；3在1，2的前面，有2个逆序；2在1的前面，有一个逆序。逆序数为：$3+2+1=6$，所以排列4321是偶排列。

在排列1324中，因为3在2的前面有一个逆序，逆序数为1，所以排列1324是奇排列。

【例1-2】 求1，2，3三个数组成的全排列的奇偶性。

解：由1，2，3组成的全排列共有3！个，即6个，它们是：123，132，213，231，312，321。

其中123的逆序数为0；132的逆序数为1；213的逆序数为1；231的逆序数为2；312的逆序数为2；321的逆序数为3。所以在这三个数组成的全排列中，奇偶排列各有三个。

由这两个例子可见，要求一个排列的逆序数，只需先求出在该排列中每个数前面分别有几个数比它大，再将这些个数加起来即可。

【例1-3】 求排列3425761的逆序数。

解：在排列3425761中，3前面比3大的数0个，4前面比4大的数0个，2前面比2大的数2个，5前面比5大的数0个，7前面比7大的数0个，6前面比6大的数1个，1前面比1大的数6个，因此，排列3425761的逆序数是$0+0+2+0+0+1+6=9$。

由［例1-2］可知，在由3个数组成的全排列中奇、偶排列各占一半。这个现象并

不是偶然的。一般地，对于 n 个数所有的$n!$ 个全排列，奇、偶排列各占一半。为了证明这个性质，还需要进一步地讨论。

在 n 个数的一个排列中，将其中任意两个数 i 与j 对调，其余的数不动，就得到一个新的排列。对排列施行的这样一个对调，叫做一个对换。用符号（i，j）表示。显然对于 n 个数的任意一个全排列$j_1j_2\cdots j_n$，总可以通过一系列对称得到自然排列 $123\cdots n$。

例如：排列 356214 中，先施行对换（4，6）则有 354216，再施行对换（1，5）得 314256；再施行对换（2，4）得 312456；再施行对换（2，3）得 213456；最后施行对换（1，2）得 123456。

由此，有以下的结论。

定理 1 设 $i_1i_2\cdots i_n$ 和$j_1j_2\cdots j_n$ 是n 个数的任意两个排列，那么总可以通过一系列对换由 $i_1i_2\cdots i_n$ 得出$j_1j_2\cdots j_n$。

证明：由前面的讨论可知，$i_1i_2\cdots i_n$ 可以通过一系列对换得到自然排列 $123\cdots n$。现在只要能证明自然排列 $123\cdots n$ 可以通过一系列对换得到$j_1j_2\cdots j_n$ 即可。然而已知 $j_1j_2\cdots j_n$ 可以通过一系列对换得到自然排列 $123\cdots n$，因此，只要按相反的次序施行这些对换，就可以由 $123\cdots n$ 得到$j_1j_2\cdots j_n$。

对一个排列施行一个对换，排列的奇偶性有什么变化呢？

我们先看一个特殊的情形，就是对换相邻的两个数。例如在 13245768 这个偶排列中。做对换（2，4）后，其他位置上的数没有变化。因此这些数所构成的逆序数没有变化，并且 2，4 这两个数与其它数所构成的逆序数也没有改变。但是因为 $2<4$，所以对换后就增加了一个逆序。因此逆序数为 2 的偶排列 13245768 就变形逆序数为 3 的奇排列 13425768 了。如果对换（i，j）中 $i>j$，则逆序数将减少一个。［读者可试做对换（7，6）看看］因此，不论是哪种情形，原排列的奇偶性都有改变。

其次，我们再看一般情形，就是对换不相邻的两个数。假设 i 与j 之间有 s 个数，为 $k_1k_2\cdots k_s$。此时给定的排列为

$$\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots$$

作对换（i，j）也就是将 i 向后移 s 个位置，将 j 向前移 $s+1$ 个位置。而我们知道每移一个位置就改变原排列的奇偶性，在此我们共做了 $2s+1$ 次换位，而 $2s+1$ 为奇数，所以原排列的奇偶性在经过对换（i，j）后已经改变。

由此我们有以下的定理。

定理 2 对换改变排列的奇偶性。

定理 3 当 $n\geqslant 2$ 时，n 个数的奇排列与偶排列的个数相等，均为$\frac{n!}{2}$个。

证明：因为当 $n\geqslant 2$ 时，n 个数的全排列共有 $n!$ 个。所以，只要能证明 n 个数的奇排列与偶排列个数相同即可。

设在 n 个数的全排列中，奇排列为 p 个，偶排列为 q 个。对这不同的 p 个奇排列施行同一个对换（i，j）就得到了 p 个偶排列。这时我们还要考虑以下 p 个偶排列是否互不相同。对这 p 个偶排列再施行对换（i，j），又得到原来那些互不相同的 p 个奇排列，所

以，这 p 个偶排列是互不相同的。

但我们已假设偶排列共有 q 个，所以有 $p \leqslant q$，同理可得 $q \leqslant p$，所以 $p=q$。定理得证。

§1-3 n 阶行列式

在给出 n 阶行列式定义之前，再来看一下二阶和三阶行列式的定义。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1-4}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \tag{1-5}$$

从二阶和三阶行列式的定义中可以看出，它们都是一些乘积的代数和，而每一项都是由行列式中位于不同的行和不同的列的元素相乘构成的。如果行标号按自然顺序排列，则列标号在 $n=2$ 时分别是 12、21，在 $n=3$ 时分别是 123，132，213，231，312，321，他们恰好分别是 1，2 和 1，2，3 的所有不同的全排列。这是二阶、三阶行列式的特征的一个方面。另一方面，每一项乘积都带有符号，这个符号是按什么原则决定呢？我们不妨观察一下三阶行列式的展开式（1-5），其中每一项的一般形式可以写成

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} \tag{1-6}$$

这里行标号是按自然排列，而列标号 $j_1j_2j_3$ 是 1，2，3 的一个全排列。可以看出当 $j_1j_2j_3$ 是偶排列时，对应的项在式（1-5）中带有正号，即以下三项

$$a_{11}a_{22}a_{33},\ a_{12}a_{23}a_{31},\ a_{13}a_{21}a_{32}$$

当 $j_1j_2j_3$ 是奇排列时，对应的项在式（1-5）中带有负号，即以下三项

$$a_{13}a_{22}a_{31},\ a_{12}a_{21}a_{33},\ a_{11}a_{23}a_{32}$$

二阶行列式显然也符合这个原则。

根据二阶和三阶行列式的结构特征，并将它们推广，我们引入 n 阶行列式的如下定义。

定义 1 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-7}$$

等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1},a_{2j_2},\cdots,a_{nj_n} \tag{1-8}$$

的代数和，这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 1，2…，n 的一个排列，每一项式（1－8）都按下列规则带有符号：当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，式（1－8）带有正号；当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，式（1－8）带有负号。

这一定义可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\varphi(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-9}$$

此处 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 的全排列求和，$\varphi(j_1j_2\cdots j_n)$ 为排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数。

定义 1 表明，为了计算 n 阶行列式，首先做所有可能的由位于不同行不同列元素构成的乘积。把构成这些乘积的元素按行指标排成自然排列（$12\cdots n$），然后由列指标（j_1，j_2，…，j_n）所成的排列的奇偶性来决定这一项的符号。由定义立即看出，n 阶行列式的值是这 n！项的和。

【例 1－4】 六阶行列式中，含 $a_{12}a_{31}a_{54}a_{26}$的项有哪些？它们分别带什么符号？

解：由定义，六阶行列式的一般项是 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}a_{6j_6}$，含 $a_{12}a_{31}a_{54}a_{26}$的项是 $a_{12}a_{26}a_{31}a_{4j_4}a_{54}a_{6j_6}$，它的列标号是 $261j_44j_6$。因 $261j_44j_6$ 是 123456 的全排列，因此，$j_4=3$，$j_6=5$ 或 $j_4=5$，$j_6=3$，故在六阶行列式中，含 $a_{12}a_{31}a_{54}a_{26}$的项有 $a_{12}a_{26}a_{31}a_{43}a_{54}a_{65}$、$a_{12}a_{26}a_{31}a_{45}a_{54}a_{63}$。前者的逆序数是 $0+0+2+1+1+1=5$，后者的逆序数是 $0+0+2+1+2+3=8$，因此，它们分别带负号和正号。

利用行列式的定义，可得下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

和上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

虽然有了 n 阶行列式的定义，但是要按定义来计算一个阶数较高的行列式的值是十分困难的。因此，我们要进一步讨论行列式的性质以简化计算。

设行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

若把行列式 D 的行与列互换则得到另一个行列式

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D^T 称为 D 的转置行列式（有的书上记 D^T 为 D'）。

性质 1 行列式 D 与它的转置行列式 D^T 相等，即 $D=D^T$。

这个性质表明，在行列式中行与列的地位是相同的，因此凡是有关行的性质，对列也同样成立。性质 1 的证明比较繁琐，这里就不证明了（证明见：谢邦杰编《线性代数》）。

性质 2 互换行列式的两行（列），行列式的值变号。

例如记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\mu} & \cdots & a_{1v} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\mu} & \cdots & a_{2v} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\mu} & \cdots & a_{nv} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1v} & \cdots & a_{1\mu} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2v} & \cdots & a_{2\mu} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nv} & \cdots & a_{n\mu} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则有 $D_1=-D$。

证明：因为在 D 中，列标为 $j_1j_2\cdots j_\mu\cdots j_v\cdots j_n$，在 D_1 中变为 $j_1j_2\cdots j_v\cdots j_\mu\cdots j_n$，相当于对这些列指标施行了一个对换（$j_\mu$，$j_v$），其奇偶性改变了。因此，在 D 中的各项与在 D_1 中相应的各项的绝对值相等，其值则相差一个负号。所以 $D_1=-D$。

推论 1 如果行列式有两行（列）完全相同，那么行列式的值为零。

证明：将这个行列式的相同的两行（列）互相调换位置则同不调换一样，但由性质 2，调换后的行列式应改变符号，即 $D=-D$。

所以 $$2D=0$$

故必有 $$D=0$$

性质 3 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘这个行列式。

即
$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{\mu 1} & & ka_{\mu 2} & \cdots & ka_{\mu n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=kD$$

证明：由行列式定义，其中的各项包含有各个不同的行或列所在的元素作为其因子，故各项均含有 k 的因子，即

$$D_1=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\varphi(j_1j_2\cdots j_n)}ka_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}k(-1)^{\varphi(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=kD$$

推论 2 行列式中某一行（列）的所有元素的公因子可以提到行列式号的外面。

即 $D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{\mu 1} & & \lambda a_{\mu 2} & \cdots & \lambda a_{\mu n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\lambda D$。

性质 4 行列式中如果有两行（列）元素对应成比例，那么这个行列式等于零。

证明：设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \cdots & a_{\mu n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{v1} & a_{v2} & \cdots & a_{vn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

式中 $a_{\mu j}=\lambda a_{vj}$ $(j=1,2,\cdots,n)$

则
$$D=\lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{v1} & a_{v2} & \cdots & a_{vn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{v1} & a_{v2} & \cdots & a_{vn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由推论 1 有 $D=0$。

性质 5 如果行列式的某一行（列）的元素都是两数之和

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu 1}+b_{\mu 1} & a_{\mu 2}+b_{\mu 2} & \cdots & a_{\mu n}+a_{\mu n} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

那么

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \cdots & a_{\mu n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{\mu 1} & b_{\mu 2} & \cdots & b_{\mu n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D_1+D_2$$

证明：因为 $D=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\varphi(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(a_{\mu j_i}+b_{\mu j_i})\cdots a_{nj_n}$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\varphi(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{\mu j_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$+\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\varphi(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots b_{\mu j_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$=D_1+D_2$$

性质 6 把行列式的某一行（列）的各元素乘上同一个常数加到另一行（列）对应的元素上去，行列式的值不变。

证明：设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \cdots & a_{\mu n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{v1} & a_{v2} & \cdots & a_{vn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，

则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu 1}+\lambda a_{v1} & a_{\mu 2}+\lambda a_{v2} & \cdots & a_{\mu n}+\lambda a_{vn} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots & \cdots\ \cdots \\ a_{v1} & a_{v2} & \cdots & a_{vn} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots & \cdots\ \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \cdots & a_{\mu n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{v1} & a_{v2} & \cdots & a_{vn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
+\lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \cdots & a_{\mu n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{v1} & a_{v2} & \cdots & a_{vn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D + \lambda \cdot 0 = D
$$

以下我们利用行列式的定义与性质讨论一些问题。

【例 1－5】 计算四阶行列式

$$
D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}
$$

的值。

解： 由性质 6，将 D 的第 2，3，4 行加到第一行的对应元素上，则

$$
D = \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}
$$

再由推论 2，将第一行元素的公因子 6 提到行列式符号的外面

即
$$
D = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}
$$

再由性质 6，将 D 的第一行元素乘以（－1）后加到第 2，3，4 行对应元素上，

即
$$
D = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 = 48
$$

【例 1－6】 计算行列式

$$
D = \begin{vmatrix} 1 + a_1 & 2 + a_1 & 3 + a_1 \\ 1 + a_2 & 2 + a_2 & 3 + a_2 \\ 1 + a_3 & 2 + a_3 & 3 + a_3 \end{vmatrix}
$$

解： 由性质 6，将 D 中第一列的元素乘以（－1）加到第 2，3 列上，有

$$D=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 2\\1+a_2 & 1 & 2\\1+a_3 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

根据性质 4，在 D 中 2，3 列元素对应成比例，因此 $D=0$。

【例 1-7】 计算 $D=\begin{vmatrix}246 & 427 & 327\\1014 & 543 & 443\\-342 & 721 & 621\end{vmatrix}$。

解：把第二、三列都加到第一列，得

$$D=\begin{vmatrix}1000 & 427 & 327\\2000 & 543 & 443\\1000 & 721 & 621\end{vmatrix}$$

从第一列中提出公因子 1000，得

$$D=1000\times\begin{vmatrix}1 & 427 & 327\\2 & 543 & 443\\1 & 721 & 621\end{vmatrix}$$

第二列减去第三列，得

$$D=1000\times\begin{vmatrix}1 & 100 & 327\\2 & 100 & 443\\1 & 100 & 621\end{vmatrix}$$

再从第二列中提出公因子 100，得

$$D=10^5\times\begin{vmatrix}1 & 1 & 327\\2 & 1 & 443\\1 & 1 & 621\end{vmatrix}$$

第二行减去第一行的 2 倍，第三行减去第一行的 1 倍，得

$$D=10^5\times\begin{vmatrix}1 & 1 & 327\\0 & -1 & -211\\0 & 0 & 294\end{vmatrix}=-294\times10^5。$$

【例 1-8】 一个 n 阶行列式，如果它的元素满足

$$a_{ij}=-a_{ji}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

则此行列式称为反对称行列式。试证明：当 n 为奇数时，此行列式的值为零。

证明：由 $a_{ij}=-a_{ji}$ 即可推知 $a_{ii}=-a_{ii}$，所以 $2a_{ii}=0$。故

$$a_{ii}=0\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

因此，此行列式写出来为

$$D=\begin{vmatrix}0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0\end{vmatrix}$$

由性质 1 和推论 2，有

$$D=D^T=\begin{vmatrix}0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n}\\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n}\\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & -a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n\begin{vmatrix}0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0\end{vmatrix}=(-1)^nD$$

因为 n 为奇数，所以 $D=-D$，所以 $D=0$。

【例 1－9】 求 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a & b & b & \cdots & b\\ b & a & b & \cdots & b\\ b & b & a & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b & b & b & \cdots & a\end{vmatrix}\text{的值。}$$

解 1：将每一列拆成两个子列之和

$$D_n=\begin{vmatrix}b+(a-b) & b+0 & \cdots & b+0\\ b+0 & b+(a-b) & \cdots & b+0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b+0 & b+0 & \cdots & b+(a-b)\end{vmatrix}$$

由性质 5，原行列式可以写成 2^n 个行列式之和。但是，若有两列选取第一子列，则该行列式中有两列相同，行列式为零，所以只要计算剩下的 $n+1$ 个行列式即可。

第一，各列不取第一子列，行列式的值为 $(a-b)^n$，即

$$\begin{vmatrix}a-b & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a-b & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & a-b\end{vmatrix}=(a-b)^n$$

第二，仅有一列取第一子列，这一列可以是第一列，第二列，…，第 n 列，共有 n