五年制高等职业教育文化基础课教材

应用数学

主编 葛渭高

YINGYONG SHUXUE

语文出版社

前 言

目前，五年制高等职业技术教育（以下简称五年制高职）已经成为我国高等职业教育的重要形式之一．五年制高职是指招收初中毕业生，实行五年一贯制的高等职业教育，它便于统筹安排教学计划，实现了中等职业教育与高等职业教育的有机衔接．这种新形式的职业教育需要新的适用教材．为了满足五年制高职学校对教材的需求，语文出版社邀请11个省、市、自治区的高等职业学校的教师、教研员，有关专家，共同编写了这套五年制高职数学教材，共分三册．本册《应用数学》为第三册，主要供五年制高职的第三学年使用．第一册为《初等数学》，第二册为《高等数学》，三册内容前后衔接而又自成体系，可全套采用，也可单独选用．

一

教材编写的指导思想

1．突出“以学生为本”的教育理念，努力做好与九年义务教育的衔接，努力实现职业教育的培养要求，使不同层次的学生，都能得到发展，突出培养学生数学思维、应用意识及创新能力．

2．以近代数学教育思想方法作为指导，尽可能多地吸收国内外职业教育数学教材编写的先进思想、方法和经验，突出职教特色．

3．根据目前职业学校学生的实际，内容上强调对基础知识的掌握，同时加强教材的弹性．

4．教材内容注重应用性，富有时代气息，内容涉及学生日常生活、工农业生产各方面的信息．

二

教材的特色

1．重基础．精选在现代社会生活和各类专业学习中必需的、应用广泛的数学知识作为必学内容，注意渗透近代数学的思想方法，为学生的发展打好基础．

2．分层次．从五年制高职学生的实际出发，坚持因材施教的原则，

注意与初中教学内容的衔接. 教材突出基础知识，基本方法的教学.

3. 重训练. 教材精选了一定数量的练习、习题、复习题，使学生通过课内外的练习对所学知识充分地掌握.

4. 加强教材的可读性. 教材内容叙述简明，语言浅显易懂. 此外教材还在每章后附有“阅读空间”以拓宽学生的视野.

本套教材每册均配有教学参考用书和练习册，供教师备课和学生学习使用.

三

本教材参编院校如下：

北京理工大学

黑龙江省教育学院

辽宁机电职业技术学院

天津机电职业技术学院

贵阳市经济贸易学校

青岛市职业技术教研室

青岛电子学校

青岛华夏职教中心

河北机电职业技术学院

江西省现代职业技术学院

宁夏财经职业技术学院

内蒙古商贸职业学院

本教材由葛渭高任主编，张学莲任副主编.

参加编写方案讨论及教材编写的有葛渭高、张学莲、蔡果兰、高广志、王永琛、王德才、王琳、王霞、李广全、郭昌禄、李励信、韩启汉、黄海哨、赵宇、张刚民、方鸣、赵曾、张程等.

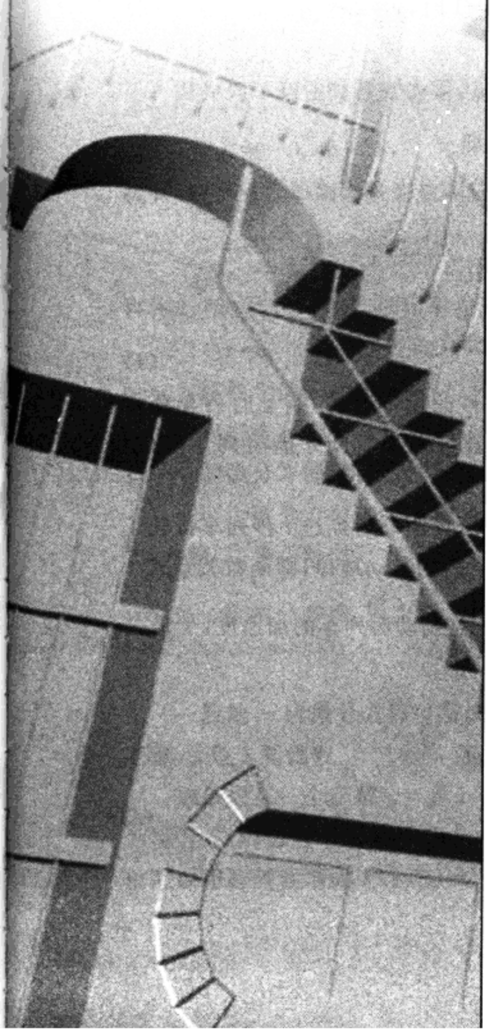
责任编辑　张程.

语文出版社

2006 年 8 月

目　录

目 录



第一章 常微分方程

我们在前面几章已经研究过函数.函数反映了客观对象运动形式的内在数量关系.利用函数还可以对客观事物的规律性进行研究.但是在大量实际问题中,许多复杂的运动过程往往不能直接得到描述其运动规律的函数关系.这时根据问题所提供的情况,有可能列出含有要寻找的函数及其导数的关系式.这种含有待求函数导数的关系式就是微分方程.微分方程建立以后,对它进行研究,设法找出满足方程的函数来,就是解微分方程.微分方程是在实践的基础上产生和发展起来的一个重要的数学分支,本章主要介绍微分方程的一些基本概念和几种常见微分方程的解法,包括用拉普拉斯变换解微分方程.

§1.1　常微分方程的概念

下面通过几何、力学及物理学中的几个具体问题来了解微分方程及相关的概念.

例 1　一曲线通过点(1,2),且曲线上任一点 $M(x,y)$ 处切线的斜率为 $2x$,求该曲线的方程.

解:设所求曲线的方程为 $y=f(x)$,根据导数的几何意义,可知未知函数 $y=f(x)$,应满足关系式

$$\frac{dy}{dx}=2x. \tag{1}$$

此外,所求函数还应满足条件:当 $x=1$ 时,$y=2$.　　(2)

将方程(1)写成:

$$dy=2x\,dx,$$

对上式两端积分,得 $y=\int 2x\,dx$,　即

$$y=x^2+C. \tag{3}$$

其中 C 为任意常数.

又根据条件　$x=1$ 时,$y=2$,得

$$2=1^2+C,\text{即 } C=1,$$

故所求的曲线方程为 $y=x^2+1$.　　(4)

例 2　列车在直线轨道上以 20 米/秒的速度行驶,制动时列车获得加速度 -0.4 米/秒^2,求开始制动后要经过多长时间才能将列车停住?且在这段时间内列车行驶了多少路程?

解:将列车开始制动的时刻记为 $t=0$,设制动后经过 t 秒列车行驶了 s 米,解答此题,就是要给出列车在制动阶段的运动规律,即函数关系式 $s=s(t)$. 由二阶导数的物理意义可知,$\frac{d^2s}{dt^2}$是制动后列车的加速度,于是

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-0.4. \tag{5}$$

此外,未知函数 $s=s(t)$ 还应满足下列条件:

$$\text{当 } t=0 \text{ 时},s=0,v=\frac{ds}{dt}=20. \tag{6}$$

将(5)式两端积分,得

$$\frac{ds}{dt}=-0.4t+C_1, \tag{7}$$

再积分一次，得

$$s=-0.2t^2+C_1t+C_2. \tag{8}$$

其中 C_1、C_2 都是任意常数，它们可由条件(6)确定.

将 $t=0$ 时 $\frac{ds}{dt}=20$ 代入(7)式，得

$$C_1=20,$$

再将 $t=0$ 时 $s=0$ 代入(8)式，得

$$C_2=0,$$

于是，所求函数为 $s=-0.2t^2+20t$, (9)

它的导数为

$$\frac{ds}{dt}=-0.4t+20. \tag{10}$$

因为列车刹住时速度为零，在(10)式中，令 $v=\frac{ds}{dt}=0$，得

$$0=-0.4t+20,$$

所以，列车从开始制动到完全刹住的时间为

$$t=\frac{20}{0.4}=50(\text{秒}).$$

再将 $t=50$ 代入(9)式，得列车在制动后所行驶的路程为

$$s=-0.2\times50^2+20\times50=500(\text{米}).$$

上述两个例子中的方程(1)和(5)都含有未知函数的导数.

我们把含有未知函数导数(或微分)的方程叫做**微分方程**，自变量只有一个的微分方程，叫做**常微分方程**，简称为微分方程，或方程.

在一个微分方程中所出现的导数的最高阶数称为微分方程的**阶**. 例如，方程(1)是一阶微分方程，方程(5)是二阶微分方程，又如$(x^2+1)dy=ydx$ 是一阶微分方程. 因为它可化为$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x^2+1}$，其中导数的最高阶数是1.

一般地，n 阶微分方程可写成 $F(x,y,y',y'',\cdots y^{(n)})=0$，其中 x 是自变量，y 是未知函数.

如果把某一个函数 $y=\varphi(x)$ 和它的导数代入微分方程，能使方程成为恒等式，那么这个函数 $y=\varphi(x)$ 就叫做该**微分方程的解**. 微分方程的解也可以用隐函数形式 $F(x,y)=0$ 给出，这样的解称为方程的**隐式解**.

例如，函数 $y=x^2+C$ 和 $y=x^2+1$ 都是微分方程(1)的解，而函数 $s=-0.2t^2+C_1t+C_2$ 和 $s=-0.2t^2+20t$ 都是微分方程(5)的解.

如果微分方程的解中含有任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，任意常数之间又不能合并，这样的解叫做**微分方程的通解**(或一般解). 当通解中的各任意常数都取特定值时的解，称为微分方程的**特解**.

例如，函数 $y=x^2+C$(C 是任意常数)是微分方程(1)的通解；$y=x^2$，$y=x^2+1$，$y=x^2-5$ 都是(1)的特解，函数 $s=-0.2t^2+C_1t+C_2$(C_1，C_2 是任意常数)与 $s=-0.2t^2+20t$ 分别是微分方程(5)的通解与特解.

由上述二例看到，当通解中的任意常数被某种特定条件确定后，就得到微分方程的特解. 如例 1 中的条件(2)及例 2 中的条件(6)都是用来确定通解中任意常数的特定条件. 一般地，当自变量取定某个特定值时，给出未知函数及其导数的已知值，这种特定条件称为微分方程的**初始条件**.

由于一阶微分方程 $y'=f(x,y)$ 的通解中只含一个任意常数，初始条件只需一个，这种初始条件是当 $x=x_0$ 时，$y=y_0$，或记做 $y|_{x=x_0}=y_0$. 这时叫做**一阶微分方程的初值问题**，记做

$$\begin{cases} y'=f(x,y), \\ y|_{x=x_0}=y_0. \end{cases}$$

二阶微分方程的初值问题，记做

$$\begin{cases} y''=f(x,y,y'), \\ y|_{x=x_0}=y_0, \\ y'|_{x=x_0}=y_1. \end{cases}$$

它有两个初值条件.

微分方程的解的图形是平面上的曲线，叫做微分方程的**积分曲线**. 由于微分方程的通解中含有任意常数，当这一常数取不同的值时，就得到不同的积分曲线. 所以通解的图形是一族积分曲线. 给定初始条件 $y(x_0)=y_0$，一阶微分方程初值问题的几何意义就是确定微分方程通过点(x_0,y_0)的特定积分曲线.

二阶微分方程的初值问题

$$\begin{cases} y''=f(x,y,y') \\ y|_{x=x_0}=y_0, y'|_{x=x_0}=y_1 \end{cases}$$

的几何意义，是求微分方程的通过点(x_0,y_0)且在该点处的切线斜率为 y_1 的那条积分曲线.

例 3 验证：函数

$$s(t)=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$$

是微分方程$\frac{d^2s}{dt^2}+\omega^2 s=0$的解.

解:因为 $\frac{ds}{dt}=-\omega C_1\sin\omega t+\omega C_2\cos\omega t$,

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-\omega^2C_1\cos\omega t-\omega^2C_2\sin\omega t$$

$$=-\omega^2(C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t).$$

把$\frac{d^2s}{dt^2}$及s的表达式代入方程$\frac{d^2s}{dt^2}+\omega^2s=0$的左方,得

$$-\omega^2(C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t)+\omega^2(C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t)\equiv 0.$$

所以 $s=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$ 是微分方程$\frac{d^2s}{dt^2}+\omega^2s=0$的解.

练 习

1. 什么叫微分方程? 下列等式中哪些是微分方程?

(1) $y''-3y'+2y=x$;　(2) $y^2-3y+2=0$;

(3) $y'=2x+3$;　(4) $y=2x+3$;

(5) $\frac{dy}{dx}=2x+6$;　(6) $\frac{d^2s}{dx^2}=\sin x$;

(7) $e^x dx=e^y dy$;　(8) $\sin xy'=1$.

2. 什么叫微分方程的阶? 说出下列微分方程的阶数.

(1) $\frac{dy}{dx}+\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}=0$;　(2) $y''+3y'+2y^3=\sin x$;

(3) $xy'''+2y'''+x^2y=0$;　(4) $(x+y)dy+(7x-6y)dx=0$.

习题 1.1

1. 验证下列已知函数是所给微分方程的解.

(1) $xy'-2y=0, y=5x^2$;

(2) $x\frac{dy}{dx}+3y=0, y=Cx^{-3}$;

(3) $\sin\varphi\cos\varphi\frac{dy}{d\varphi}+y=0, y=\cot\varphi$;

(4) $y''+y=0, y=3\sin x-4\cos x$.

2. 求下列微分方程的通解.

(1)$\frac{dy}{dx}=2$;　　　　(2)$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$.

3. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解.

(1)$\frac{dy}{dx}=\sin x, y|_{x=0}=1$;

(2)$\frac{d^2y}{dx^2}=6x, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=2$.

4. 已知一曲线通过点(1,0),且该曲线上任意点(x,y)处的切线斜率为x^2,求该曲线的方程.

5. 一质点由原点开始($t=0$)沿直线运动,已知在t时刻的加速度为t^2-1,而在$t=1$时速度为$\frac{1}{3}$,求位移s与时间t的函数关系.

§1.2 一阶微分方程

一、可分离变量的一阶微分方程

如果一个一阶微分方程可以把不同的两个变量及其微分分离在方程两边,就可以在等式两边分别进行积分,求得方程的通解.凡是具有这种特点的方程,称为**可分离变量**的方程,其一般形式为

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)f_2(y).$$

这里$f_1(x)f_2(y)$都是已知的连续函数,这种方程的求解步骤为:

1. 分离变量,把方程改写成

$$\frac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)dx,$$

即等式的每一边都是一个变量的已知函数和这个变量微分的乘积.

2. 两边进行积分,得

$$\int\frac{dy}{f_2(y)}=\int f_1(x)dx+C.$$

这样就得到变量x和y的关系式,其中含有一个任意常数,这就是方程的通解.

3. 如果要求特解,可根据问题给出的初始条件,定出常数C,得到满足初始条件的特解,这种方法称为**分离变量法**.

例 1 求方程$\frac{dy}{dx}=2xy$的通解.

解:这是一个可分离变量的方程.首先 $y=0$ 是它的解,当 $y\neq0$ 时分离变量,得

$$\frac{dy}{y}=2x\,dx,$$

两端分别积分,得 $\ln|y|=x^2+C_1$,

即 $|y|=e^{x^2+C_1}$,

或 $y=\pm e^{C_1}e^{x^2}$.

令$\pm e^{C_1}=C$,得 $y=Ce^{x^2}(C\neq0)$.

因为 $y=0$ 也是原方程的解,于是所求方程的通解为 $y=Ce^{x^2}$(C 为任意常数).

例 2 求方程$\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{(1+x^2)xy}$的通解.

解:这是一个可分离变量的方程,分离变量后,得

$$\frac{y\,dy}{1+y^2}=\frac{dx}{x(1+x^2)}=\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx,$$

两端分别积分,得

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1,$$

$$\ln(1+y^2)=2\ln|x|-\ln(1+x^2)+2C_1,$$

以 $\ln C$ 代替 $2C_1$,得

$$\ln[(1+x^2)(1+y^2)]=\ln(Cx^2),$$

$$(1+x^2)(1+y^2)=Cx^2.$$

这就是原方程的通解,它是用隐函数形式给出的.

练 习 1

用分离变量法求下列各方程的通解.

(1)$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$; (2)$3x^2+5x-5\frac{dy}{dx}=0$;

(3)$y\,dx=(x-1)dy$; (4)$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y\sqrt{1-x^2}}$.

二、一阶线性微分方程

一阶线性方程的一般形式为

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x), \tag{1}$$

其中未知函数 y 及其导数都以一次形式出现.

如果 $Q(x)\equiv 0$,那么方程(1)成为

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0, \tag{2}$$

它称为**一阶线性齐次微分方程**,而方程(1)称为**一阶线性非齐次微分方程**.

一阶线性齐次方程(2)是可分离变量的方程.分离变量后,得

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx,$$

两端分别积分,得

$$\ln|y|=-\int P(x)dx+C_1,$$

即 $|y|=e^{C_1}e^{-\int P(x)dx}$,

$y=\pm e^{C_1}e^{-\int P(x)dx}$

令 $C=\pm e^{C_1}\ (C\neq 0)$,得到

$y=Ce^{-\int P(x)dx}$.

由于 $y=0$ 也是方程的解,所以

$$\boxed{y=Ce^{-\int P(x)dx}\ (C\text{ 为任意常数})}$$

这是对应一阶线性齐次方程(2)的通解.

现在我们用**常数变易法**来求非齐次线性微分方程(1)的通解,方法是把(2)的通解中的 C 换成 x 的未知函数 $C(x)$,即作变换

$$y=C(x)e^{-\int P(x)dx} \tag{3}$$

后,再对(3)式求导,得

$$\frac{dy}{dx}=C'(x)e^{-\int P(x)dx}-C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} \tag{4}$$

将(3)和(4)一起代入方程(1),得

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx}-C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}+P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x).$$

于是 $C'(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$,

$C'(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx}$,

两端积分,得

$$C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C.$$

再将上式代入(3)，便得到一阶非齐次线性微分方程(1)的通解

$$\boxed{y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]} \tag{5}$$

由于这个解中含有一个任意常数 C，所以它是方程(1)的通解.

把通解公式(5)改写成两项之和的形式，即为

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)d(x)}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

可以看出，y 是由两项构成，其中第二项是在(5)式中令 $C=0$ 得到的，所以它是非齐次微分方程的一个特解，而第一项是对应齐次微分方程(2)的通解. 于是我们得到线性非齐次微分方程解的结构：**线性非齐次微分方程的通解等于它的一个特解加上与它对应的齐次微分方程的通解.**

例 3 求方程 $\dfrac{dy}{dx}+y=x$ 的通解.

解：先求对应的齐次方程 $\dfrac{dy}{dx}+y=0$ 的通解.

分离变量后，得 $\dfrac{dy}{y}=-dx$，

两端积分，得 $\ln|y|=-x+C_1$，

所以，齐次方程的通解为 $y=Ce^{-x}$.

再用常数变易法求原非齐次方程的通解.

设 $y=C(x)e^{-x}$，从而

$$y'=-C(x)e^{-x}+C'(x)e^{-x},$$

代入原方程，得

$$-C(x)e^{-x}+C'(x)e^{-x}+C(x)e^{-x}=x,$$

$$C'(x)e^{-x}=x,$$

$$C'(x)=xe^{x},$$

于是有 $C(x)=\int xe^{x}dx=xe^{x}-e^{x}+C.$

代回 $y=C(x)e^{-x}$，原方程通解为

$$y=e^{-x}(xe^{x}-e^{x}+C),$$

即 $y=x-1+Ce^{-x}.$

所以 $y=Ce^{-x}+x-1$ 为原方程通解.

例 4 求微分方程

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$$

的通解,并求满足初始条件 $y|_{x=0}=\frac{2}{3}$ 的特解.

解:直接利用公式(5),这里 $P(x)=-\frac{2}{x+1}$,$Q(x)=(x+1)^{\frac{5}{2}}$,则通解为

$$\begin{aligned}
y&=e^{-\int p(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]\\
&=e^{\int\frac{2}{x+1}dx}\left[\int (x+1)^{\frac{5}{2}}e^{-\int\frac{2}{x+1}dx}dx+C\right]\\
&=e^{2\ln(x+1)}\left[\int (x+1)^{\frac{5}{2}}e^{-2\ln(x+1)}dx+C\right]\\
&=e^{\ln(x+1)^2}\left[\int (x+1)^{\frac{5}{2}}e^{\ln(x+1)^{-2}}dx+C\right]\\
&=(x+1)^2\left[\int (x+1)^{\frac{5}{2}}\cdot(x+1)^{-2}dx+C\right]\\
&=(x+1)^2\left[\int (x+1)^{\frac{1}{2}}dx+C\right]\\
&=(x+1)^2\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\right]\\
&=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{7}{2}}+C(x+1)^2.
\end{aligned}$$

又由 $y|_{x=0}=\frac{2}{3}$,得 $C=0$,故所求特解为 $y=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{7}{2}}$.

练 习 2

1. 求下列方程的通解:

(1) $\frac{dy}{dx}-2y=x+2$; (2) $\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}$.

2. 求下列各方程满足初始条件的特解:

(1) $y'+y=e^x$, $y|_{x=0}=2$;

(2) $y'-y\tan x=\sec x$, $y|_{x=0}=0$.

习 题 1.2

1. 求下列方程通解:

(1) $x\frac{dy}{dx}-y\ln y=0$;　　(2) $3x^2+5x-5\frac{dy}{dx}=0$;

(3) $\sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-y^2}$;　　(4) $\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}=a\left(y^2+\frac{dy}{dx}\right)$;

(5) $\sec^2 x\tan y dx+\sec^2 y\tan x dy=0$;

(6) $\frac{dy}{dx}=10^{x+y}$;

(7) $(e^{x+y}-e^x)dx+(e^{x+y}+e^y)dy=0$;

(8) $\cos x\sin y dx+\sin x\cos y dy=0$.

2. 求下列方程的通解:

(1) $xy'+y=x^2+3x+2$;

(2) $\frac{dy}{dx}+2xy=4x$;

(3) $y'+y\tan x=\sin 2x$;

(4) $(x-2)\frac{dy}{dx}=y+2(x-2)^3$.

3. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

(1) $1+y^2-xyy'=0, y|_{x=1}=0$;

(2) $y'=e^{2x-y}, y|_{x=0}=0$;

(3) $y'+y=e^x, y|_{x=0}=2$;

(4) $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x}, y|_{x=\pi}=1$.

§ 1.3　二阶常系数线性齐次微分方程

前面两节,介绍了一阶微分方程及解法.然而在机械振动、电磁振荡、人造卫星运行等许多领域中,反映事物运动规律的方程常常是二阶微分方程.本节主要讨论二阶常系数线性微分方程的性质、解法和应用.

在一个微分方程中,如果未知函数的最高阶导数都是二阶,且未知函数及其导数项在方程中都是一次幂出现,再加上每一项的系数都是常数,那么这个微分方程就叫做二阶常系数线性微分方程.其中,形如

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0 \tag{1}$$

(式中 a,b,c 都是常数,且 $a\neq 0$)的方程(也可以写成 $y''+py'+qy=0$(p,

q 为常数)叫做**二阶常系数线性齐次微分方程**. 形如,

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=f(x) \qquad (2)$$

(式中 a,b,c 都是常数,$a\neq0$,$f(x)$是已知函数)的方程叫做**二阶常系数非齐次线性微分方程**.

一、二阶线性齐次微分方程的特性

微分方程列出后,我们的目的是求出它的解 $y(x)$,在具体讨论解法前,先说明二阶线性齐次微分方程的两个基本性质:

> **性质 1:如果 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是二阶线性齐次微分方程的两个解,那么 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 也是方程(1)的解,其中 C_1,C_2 是任意常数.**

证明:∵ $y_1(x)$和 $y_2(x)$都是微分方程 $a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0$ 的解,

$$\therefore\quad a\frac{d^2y_1}{dx^2}+b\frac{dy_1}{dx}+cy_1=0,$$

$$a\frac{d^2y_2}{dx^2}+b\frac{dy_2}{dx}+cy_2=0.$$

现将 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$代入二阶线性齐次微分方程的左边,得

$$\begin{aligned}&a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+Cy\\&=a\frac{d^2(C_1y_1+C_2y_2)}{dx^2}+b\frac{d(C_1y_1+C_2y_2)}{dx}+c(C_1y_1+C_2y_2)\\&=C_1\left(a\frac{d^2y_1}{dx^2}+b\frac{dy_1}{dx}+cy_1\right)+C_2\left(a\frac{d^2y_2}{dx^2}+b\frac{dy_2}{dx}+cy_2\right)\\&\equiv0.\end{aligned}$$

∴ $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$也是二阶线性齐次微分方程的解.

线性齐次方程解的这一性质,称为**解的叠合性**.

定义:设 $y_1(x)$与 $y_2(x)$是定义在区间 I 上的两个函数,如果有不全为 0 的两个常数 k_1,k_2,使得当 x 属于 I 时,有 $k_1y_1(x)+k_2y_2(x)\equiv0$ 成立,那么就称这两个函数在区间 I 上是线性相关的,否则就说它们是线性无关的.

例如,函数 $y_1=e^x$ 与 $y_2=2e^x$ 是线性相关的,而 $y_1=e^x$ 与 $y_2=e^{-x}$ 是