高等學校教學用書

初等幾何學教程

上 卷

Д. И. ПЕРЕПЁЛКИН 著
馬 忠 林 譯

高等教育出版社

高等學校教學用書

初等幾何學教程

上卷

平面幾何學

Д. И. 别列標爾金著
馬　忠　林　譯
張　我　爲　校

高等教育出版社

本書係根據蘇聯國立技術理論書籍出版社（Государственное издательство техникотеоретической литературы）出版的別列標爾金（Д. И. Перепёлкин）著"初等幾何學教程"（Курс элементарной геометрии）上卷1948年版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲師範大學教科書。

全書分上下兩卷：上卷平面部份，下卷空間部份。上卷由東北師範大學馬忠林翻譯。

初等幾何學教程

上　卷

書號275(課253)

別列標爾金著

馬忠林譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號)

新華書店總經售

商務印書館印刷廠印刷

上海天通菴路一九〇號

開本850×1168 1/32　印張9 1/16　字數244,000

一九五五年三月上海第一版　印數10,001—11,500

一九五五年七月上海第二次印刷　定價(7)¥1.15

序

本書供師範學院物理數學系初等幾何學教程之用。全書分兩卷：上卷平面幾何，下卷立體幾何。內容新穎，敍述嚴密，都不同於一般的初等幾何學教科書。

在中等學校幾何教科書裏所熟知的，本書不再重述。但從教學觀點出發，我們幾乎將中學教科書的全部命題都敍述了，其中易爲讀者所知的，都不加證明地直接引用。在我們覺得適當的地方，就是讀者已知的定理，也採用與中學教本不同的方法進行證明。最後，中學教科書裏很多問題，在這裏都用最普遍的形式加以說明。本書在篇幅上有不少的對學生來說是新穎的材料。

材料選擇問題相當複雜。師範學院初等幾何學教學大綱不是最後確定了的。因此，本書根據需要包括了比較實際能夠學到的更多的材料。補充問題可以在講習所，不定期訓練班，以及專科研究班裏學習。我們首先選擇了那些具有原則性的理論。比如，各種幾何變換的理論和變換羣實質的探討，都佔據了很多篇幅(但爲了易於理解，未加入羣概念)。

爲了避免與射影幾何重複，我們完全未涉及射影幾何學的初等問題和截錐理論。與此相反，在不妨礙師範學院其他科目教學大綱的條件下，比較詳細地研究了圓幾何學。

其次，我們也對沒有原則性的幾個問題(例如，參看 §§ 27, 29, 71—73)儘可能地給予了關於初等幾何學方面的多樣性的概念。沒有疑問，作者個人的趣味，也能影響到本書內容的確定；但我們盡量地使其影響減少。

在本書裏，首先由於引用了完整的公理體系，和一般教科書比較，在敍述上達到了更高的嚴密性。在定理的證明時，我們盡量嚴格地論

證每一種情形，但却不是將這種嚴密性弄到拘泥小節的程度。在我們有意識地採用直觀表示(例如，在關於線段方向和角的方向的問題裏)代替了枯燥無味形式主義的推論時，都預先清楚地作了聲明。我們所採用的公理系統❶是很充分的。在選擇公理時，我們一方面保持了接近於海爾巴脫的公理系統；另一方面，我們儘可能採用了這樣的命題作爲公理：卽這些命題在一般學校講授中是"隱蔽的公理"而在幾何基礎課程中的被證明爲定理。例如，我們引進了"平面劃分"公理，也引用了直線與圓周相交和兩圓周相交的公理。在研究幾何基礎課程時，這樣選擇公理，我們覺得它能幫助我們對於傳統的初等幾何與它的公理之間的關係得到更好的理解。

這並不是使我們在本書各處都局限於歐幾里得幾何之內。基本概念的歷史批判性的分析，以及公理自身的問題(例如，公理的獨立性問題)都不在本書範圍之內。

這本幾何教程沒有包括練習和問題。我們認爲未來的教師不應當採用專爲本書所蒐集的問題集，而應研究現有問題的幾何參考書。但在本書的課文裏，在人所周知的意義上可以看作基本的或典型的作圖題(有六十多個)都已加以研究。在一系列的情況下，用幾個方法來解一個問題，以進行研究。

著者向審閱本書原稿的Н. Ф. Четверухину教授和А. М. Лопшицу教授表示謝意，也向出版局主編И. Н. Бронштейну講師致謝。他們的寶貴意見對於這本書的最後完成有很大的幫助。

1947年9月　　　　Д. 別列標爾金

❶ 這些公理在第3、4、6、23、28、46、48、62、122、126諸頁。

目　錄

緒　　論

讀者從中學課程裏已經有了足够的初等幾何學知識❶，對於幾何學的其他分科（如解析幾何學）也可能是熟悉的。在這種情況下，讀者更清楚地想到，我們要把幾何學知識的哪一部份列在初等幾何學範疇之內。雖然如此，我們並不企圖對初等幾何的內容加以規定。因爲它的內容不是由任何的一般理想所確定的，而從來都是以實際要求爲根據的。初等幾何學內容的決定，毫不影響對於它的研究。

與此不同的，關於幾何學方法的清晰的概念，對於深入研究幾何學則有重要的意義。這種方法就是以下所說的公理方法。

根據我們的經驗，我們所熟知的若干簡單的幾何概念，用來當作基本的概念。在本書裏我們認爲點、直線、平面、以及"點在直線上"、"點在平面上"、"有一點在其他兩點之間"、"兩線段相等"、"兩角相等"，都是基本概念。其他一切將要研究的概念，我們應該作恰當的規定。這就是爲什麼在這部書裏（如同在中學教科書裏），我們不會見到點或直線的定義，而會見到線段、角、三角形的定義；不會見到相等線段、相等角的定義，而會見到相等三角形的定義，如此等等。

從許多世紀人類實踐的基礎上，被我們所知道的很多的幾何事實之中，我們不加證明地採用了其中的若干事實。我們不加證明地採用作爲任何一種科學論述基礎的那些命題，我們將它們叫做公理。其他

❶ 我們想讀者對於初等幾何，譬如吉西列夫（Киселёв）所著的教科書[13]是熟悉的；還可以指出一本較新的教科書，卽格拉高列夫（Глаголев）的著作[9]。方括弧裏的數字，是書末附印的參考書目錄的號數。

一切幾何命題，我們甚至應該藉助於嚴格的邏輯推理從公理中把它導引出來，也就是說，我們必須加以證明。中學幾何教程裏，初等幾何的個別公理，讀者已經是熟知的了。至少如人所熟知的公理："通過兩個已知點，有一條且僅有一條直線"，"通過已知直線外一點，且平行於該直線的直線，不能多於一條"，可以作爲這樣的例子。

對於構成初等幾何學的足夠的公理條目，在中學幾何教科書中所列舉的遠不完備。譬如，"一點分直線爲兩部份"與其他許多命題，在中學裏是顯而易見的，那也是被認作公理的，卽使從來不曾把它叫做公理。與此不同，在本書上卷(§§ 1、2、3、9、11、15、16、21、44、45)對於構成平面幾何學足夠的公理條目都提供了出來(而在本書下卷也將要給出關於立體幾何的公理條目)。

公理的這種列舉法不是唯一可能的，這是極其重要的一點。譬如在我們的中學幾何教科書裏，提到構成平行線理論的時候，可以取上述的命題作爲公理，但也可以把命題"假若兩條直線與某一截線所交成的同側內角的和不等於 $2d$ 時，則這兩條直線相交"作爲公理。當然，假如兩命題之一取作公理，則其他便能夠得到證明，也卽是成爲定理。讀者閱讀這部書(§ 5 與 § 11)，還會遇到另外一些與此類似的例子。

關於涉及幾何公理問題詳盡的研究，超出了初等幾何學的範圍，而是被列入"幾何基礎"的領域之內的。在本書下卷之末附有關於幾何公理的一些知識。

第一章 基本概念

§1. 點與直線的相互位置

點和直線的概念是平面幾何學的基本概念。我們用大楷拉丁字母：A、B、C、……表示點，用小楷拉丁字母：a、b、c、……表示直線。

點和直線彼此之間可以有各種不同的位置。點可以在直線上，可以不在直線上。"點在直線上"，也可以改說"直線通過點"。

我們從下列三條公理("結合公理")開始敘述點與直線的性質：

公理 1a. 通過兩個已知點，有一條且只有一條直線。

公理 1b. 每條直線通過無限多個點。

公理 1c. 有不在一直線上的一些點存在。

通過點 A 和 B 的直線，用 AB 或 BA 表示。

關於通過點 A 和 B 的直線，也可以說它連結點 A 和 B。

若兩直線通過同一點，則說它們交於該點。

這樣，我們可以看出，點和直線相互位置的同樣一個特殊情況，點和直線之間的同樣一種"關係"，用兩種不同的術語"在…上"和"通過…"來表達。為了避免術語的重複，在幾何學中有時利用"際合"一術語。不再說"點在直線上"，或"直線通過點"，而說"點和直線際合"，"點際合直線"，"直線際合點"。這樣，上述的公理 1a—1c 採用下列形式而有時叫做"際合公理"。

有一且只有一直線際合兩已知點。

每一直線際合無限多個點。

有不與一直線際合的一些點存在。

術語"際合"主要是用在高等幾何學以及專門研究上。在本書我們將使用普通的術語。

由公理 1a—1c 不難得出下列兩個定理：

定理 1. 兩直線不能有多於一的公共點。

定理 2. 通過每一點有無限多條直線。

為了進一步構成幾何學，已引用的概念和公理是不夠的，我們還應

當再採用一些別的概念。

§2. 直線上點的順序

我們已經把每條直線上有無限多個點當作了公理。我們的直觀概念告訴我們，這些"直線上的點排成某種一定的順序"。我們更正確地來說明這一句話所表示的意義。

如果在一直線上有兩個已知點，則我們往往藉"稍左，稍右""稍上，稍下"等辭來說明它們在直線上的位置，但是這類概念並不是幾何的概念，因爲由它們所確定的點的位置，乃是在對觀察者的關係上(稍左、稍右)或是對地面的關係上(稍上、稍下)而言。

現在設有共線的三個已知點。在此種情形下，其中有一點位於其餘兩點之間，而"位於……之間"這個概念已經不依靠點的位置，對任何別的對象(觀察者、地面)的關係了。可見概念"位於……之間"是幾何的概念。爲了在幾何研究中有利用概念"一點位於其他二點之間"的可能性，我們採取下列命題當作公理("順序公理")。

公理 2a. 共線的三個點裏，必有一點且僅有一點位於其餘兩點之間。

公理 2b. 若 A 和 B 是兩已知點，則在直線 AB 上，既有無限多個點位於 A 和 B 之間，又有無限多個這樣的點，使得點 B 位於點 A 和這些點中的每一點之間。

公理 2c. 直線上的每一點 O，將直線上的其餘諸點分爲兩組，於兩組中各任取一點，則點 O 位於所取兩點之間，但是，不能位於屬於同組的兩點之間。

(公理 2c 可以叫做"直線劃分公理"。)

順序公理 2a—2c 可以引出一些新的概念。

位於直線上任何兩點之間，有無限多個另外的點，這些點的集合，叫做線段。位於點 A 和 B 之間的所有點所組成的線段，記做 AB 或

BA。點 A、B 叫做線段的端點。關於以 A、B 爲端點的線段，可以說它結連點 A 和 B。線段 AB 也叫做 A 和 B 之間的距離。

註　概念"距離"在幾何學中有雙重意義，即，距離旣被理解爲線段的本身，又被理解爲按某種度量單位所表示的該線段長的數量。我們暫時僅取前一個意義來使用"距離"這個術語。至於線段長度的測量問題，我們將在後面(§§43—45)去論述。

點 O 劃分一直線所成的每一組，叫做自點 O 引出的射線(或半直線)。自點 O 引出並且合起來(點 O 算在內)組成一直線的兩射線之一，叫做他一射線從點 O 所引出的延長線。

對於射線的記號，用字母 h、k、l、……表示。自點 O 引出且通過點 A 的射線，常用"射線 OA"表示。

現在我們引入下面兩個命題，作爲從上引公理推出的關於直線上點的順序定理。

1) 若 C 是線段 AB 上的一點，而 D 是線段 AC 上的一點，則點 D 必是線段 AB 上的一點。換句話說 線段 AC 在這種情形是線段 AB 的一部分。

2) 直線上兩點 A 和 B 將直線上其餘的點分成三組，即線段 AB 及分別自 A、B 引出的兩射線。這兩射線叫做線段 AB 從點 A 及 B 所引出的延長線。

這兩個命題的證明，我們不再詳述，留給讀者。

§3. 直線劃分平面

我們至此所研究的點和直線相互位置的性質，無論在平面上，無論在空間，都一樣的成立。現在我們應當轉來研究平面幾何學所特有的點與直線的性質。劃分平面成兩個半平面，是直線的特性之一，爲了正確地敍述這個特性，我們引入一些新的概念。

有限個已知點 A、B、C、……、K、L 及線段 AB、BC、……、KL 的全體叫做折線 $ABC\cdots\cdots KL$；所有的已知點及上述各線段上的點統叫做

折線上的點。點 A 和 L 叫做折線的端點；B、C、……、K 叫做折線的頂點；線段 AB、BC、……、KL 叫做折線的節(或邊)❶。如果折線以 A、L 爲端點，則說它連結點 A 和 L。線段連同它的端點可以看做是折線的一部份(一節)。

其次我們說，某一圖形 $\mathbf{F}$ (卽平面上某些點的集合)劃分平面成兩個區域 D_1 和 D_2，假如這個圖形能夠將所有不屬於它的點分爲具有下列特性的兩組：1) 同一組任意兩點能夠用與圖形 $\mathbf{F}$ 無公共點的折線來連接；2)不同組的任何兩點不能用這樣的折線連接。假若這時，其中任何兩點可以用與 $\mathbf{F}$ 無公共點的線段連接時，則把區域 D_1 (或 D_2)叫做凸區域。將平面劃分成任意(有限的)個區域，都可以類似地下定義。

現在我們可以敍述下面的命題作爲公理("平面劃分公理")。

公理 3. 某平面上的任何一條直線，都將該平面分成兩個凸區域❷。

直線 a 將平面分成兩區域，每個這樣的區域叫做以直線 a 爲界的半平面，或叫做自直線 a 所引出的半平面。

關於在自直線 a 所引出的同一半平面中的兩點，就說它們在直線 a 的同側；關於在不同的兩半平面中的兩點，則說它們是在直線 a 的異側。

設已知某射線 h，該射線屬於某直線 a。直線 a 將平面上其餘的點分成兩半平面，它們也各叫做自射線 h 所引出的半平面。

應用公理 3，可以證明下面的定理。

定理 3. 兩相交直線將平面分成四個凸區域。

---

❶ 爲適於一般研究起見，當折線中相連續的某幾節同在一直線上時，我們也不把這種情形除外。

❷ 我們在這裏對這個公理作這樣的敍述，它在立體幾何學中也仍然有効，若僅限於平面幾何學時，我們可以把這公理更簡短地敍述作：

任一直線將平面分成兩個區域。

證明　假設 a 和 b(圖 1)是兩已知直線,O 是它們的公共點。用 h 和 h_1 表示點 O 劃分直線 a 所成的兩射線,又用 k、k_1 表示點 O 劃分直線 b 所成的兩射線。直線 a 決定兩個半平面。這時射線 k 和 k_1 必分別在不同的半平面中,因爲連結射線 k 上的任意點與射線 k_1 上的任意點的線段與直線 a 有公共點 O(公理 2c)。在這兩半平面中,把射線 k 所在的半面記做 η, k_1 所在的半平面記做 η_1。同樣,把自直線 b 所引出而分別含有射線 h 及 h_1 的兩半平面記做 $\varkappa$ 及 $\varkappa_1$。用下面的方法,把不在直線 a、b 上的點分成四組。

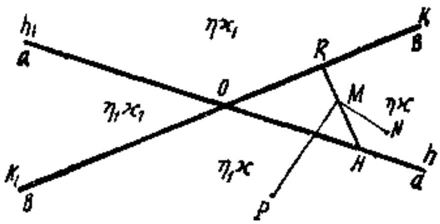

圖 1.

屬於半平面 η 同時屬於半平面 $\varkappa$ 的那些點我們把它列入第一組;這一組我們用 $\eta\varkappa$[1] 來表示。這樣的點必存在;線段 HK 的端點 H 及 K 恰巧各在射線 h 及 k 上,在取線段 HK 上的任意點 M,那麼我們便得到第一組的一點。用類似的方法可確定點組 $\eta\varkappa_1$、$\eta_1\varkappa$ 及 $\eta_1\varkappa_1$。

我們所規定的四個點組是四個凸區域。事實上,同一組的兩點 M、N 既在直線 a 的同側,同時也在直線 b 的同側,所以線段 MN 與直線 a、b 都沒有公共點。再根據這些組的規定,不同組的兩點 M 和 P 對於直線 a 或 b 來說應在不同的半平面中,因此連結 M 和 P 的線段(或折線)至少與這兩直線之一有公共點。定理便已得證。

§4. 角

我們轉來研究角的概念。

[1] 熟習集合論初步的讀者,就會注意到,以 η 乘 $\varkappa$ 在這裏有集合理論的意義。

某點及自該點所引出的兩射線的總體叫做角；該點叫做角的頂點，兩射線叫做它的邊。所謂角的點，我們理解爲它的頂點及它的邊上所有點。

由射線 h 和 k 所組成的角，我們用 $\angle hk$ 或 $\angle kh$ 來表示；由點 A 引出且分別通過點 B 及 C 的兩射線所組成的角，常叫做兩線段間的角❶，而記做 $\angle BAC$ 或 $\angle CAB$。若只有以 A 爲頂點的一個角被考察，則可以用 $\angle A$ 來表示它。如果角的兩邊合成(包括頂點在內)一條直線時，這個角就叫做平角。

角的基本性質用下面的定理來表明。

定理 4 非平角的角，將平面分成兩個區域，其中之一是凸區域，他一則否。

證明 用 h_1，k_1 來表示已知角的兩邊 h、k 自角的頂點所引出的延長線(圖 2)。再用 η、η_1 表示自射線 h 所引出的兩個半平面，用 $\varkappa$、$\varkappa_1$ 表示自射線 k 所引出的兩個半平面。我們選擇這些記號時，要使射線 k 在半平面 η 上，而射線 h 在半平面 $\varkappa$ 上。

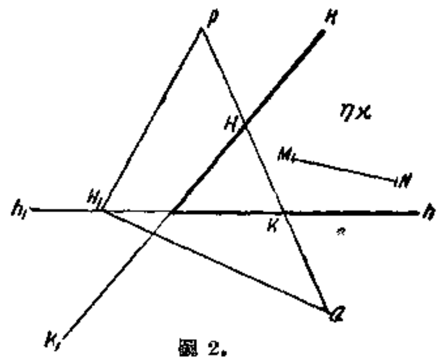

圖 2.

現在我們將所有不屬於角的點分做兩組。

把同時既在半平面 η 中又在半平面 $\varkappa$ 中的所有點歸做第一組 $\eta\varkappa$。

❶ 如"兩半徑間"，"兩弦間"，"兩邊間"的角，也是這樣的說法。