高职院校21世纪新视野教材

高·等·数·学

GAODENG SHUXUE

（上册）

主编
张忠志 李宏平 杨建湘

湖南大学出版社

前　言

本书系“高职院校21世纪新视野教材”之一，适合高职工科、文科师生使用.

本书依据教育部有关课程的教学大纲，联系高职实际，贯彻“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，注重高职学生科技教育与人文教育的结合；注重学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养，重视理论联系实际，减少数理论证，在表述上力求深入浅出，适应拓宽，便于自学；在吸收传统教材的优点的同时，又力求转变教育思想，体现教学改革精神.

本书分上、下两册，由湖南城市学院张忠志，湖南科技职业学院李宏平（上册），湖南交通职业技术学院杨建湘（下册）主编；长沙民政职业技术学院李占光，怀化医专丁超，湘潭职业技术学院李海军，湖南大学数学与计量经济学院孙学锋、任玉萍，湖南科技职业学院谭乐平任副主编；参加本书编写的有李效羽、廖仲春. 全套教材由总主编张忠志修改、定稿，另有林立强、彭良、申丽云、龙彪、杨勇、莫琳、周立、廖昱、夏涛、马玟、罗莉、王友良、贺志林、彭春生、肖君等或参与编写，或提供资料，对他们辛勤劳作深表谢意！

新编教材是高职教材建设的一个尝试，书中引用了盛祥耀、周誓达、罗汉等专家的科研成果，囿于篇幅限制，未能一一列陈，敬请谅解；又由于我们水平有限，加之时间仓促，书中存在一些不妥之处，恳请读者和同行指正.

编　者

2003年4月

目　次

第 1 章　函数　极限　连续

第 2 章 一元函数微分学

第3章　一元函数积分学

第 4 章　常微分方程

第1章　函数　极限　连续

函数是对现实世界中各种变量之间相互依赖关系的一种抽象描述，它是高等数学研究的主要对象. 极限理论是高等数学的基础，它是这门课程的基本推理工具. 连续则是函数的一个重要特性. 本章将介绍函数，极限与连续的基本知识，为以后的学习奠定必要的基础.

1.1　函数

1.1.1　一元函数的概念

定义 1.1.1　设 E 是实数集 $\mathbf{R}$ 中的一个非空子集，f 是 E 到 R 中的一个对应：对于 $x\in E$，按 f 的对应法则，有惟一确定的 $y\in R$ 与之对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$，x 称为自变量，y 称为因变量，E 称为函数 $y=f(x)$ 的定义域，通常记为 $D(f)$. 集 $\{y|y=f(x),x\in E\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的值域，通常用 $R(f)$ 表示.

若 E_1 是 E 中一非空真子集，函数 $y=f(x)$ 在 E_1 上的值域仍用 $R(f)$ 表示显然已不合适，我们将它记为 $f(E_1)$，按此记法，$R(f)$ 可表示为 $f(E)$.

在函数的研究中，若涉及的变量只有两个，即一个自变量和一个因变量，我们称这种函数为一元函数，上面给出的就是一元函数的定义. 在本节里，我们主要讨论一元函数. 对于多元函数

(即有多个自变量的情形)我们到本节末再作介绍.

一元函数关系描述的是两个实变量在变化过程中的相互依赖关系.当需研究变量 y 随变量 x 变化而变化的规律时,我们以 x 作为自变量,以 y 作为因变量.反之,当需研究变量 x 随变量 y 变化而变化的规律时,我们以 y 作为自变量,而以 x 作为因变量.

在应用中,我们说函数关系 $y=f(x)$已被建立,是指函数的定义域与对应法则均已确定,在具体问题里,函数 $y=f(x)$ 的定义域由问题本身所决定;当函数 $y=f(x)$无实际问题背景而仅是一解析式时,其定义域是使函数有意义的一切 x 的全体,如:圆的面积 A 与其半径 r 之间的关系是 $A=\pi r^2$,这个函数的定义域是$(0,+\infty)$,而 $y=\pi x^2$ 仅作为一解析式时,其定义域为$(-\infty,+\infty)$.

设有函数 $y=f(x)$,定义域为 $D(f)$,若 $x_0\in D(f)$,我们说函数 $y=f(x)$在 x_0 处有定义,称 $f(x_0)$为函数 $y=f(x)$在 x_0 处的函数值.函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值也记为 $f(x)\big|_{x=x_0}$、$y\big|_{x=x_0}$ 等.

为直观地研究函数 $y=f(x)$随自变量变化而变化的规律,我们常通过平面直角坐标系 xOy 来讨论动点(x,y)的运动轨迹,它称为函数 $y=f(x)$的图形.易知,这种图形与任意平行于 y 轴的直线的交点最多有一个.

例1 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}+\ln(x^2-4)$的定义域.

解 函数 $f(x)$定义域中的 x 应满足

$$\begin{cases}x-3>0,\\x^2-4>0.\end{cases}$$

解不等式组,得

$$x > 3.$$

所以，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(3,+\infty)$.

例 2 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-\ln|x|}$ 的定义域.

解 函数 $f(x)$ 定义域中的 x 应满足 $\ln|x|\neq 1$ 且 $x\neq 0$，所以 $f(x)$ 的定义域为

$$(-\infty,-\mathrm{e}) \cup (-\mathrm{e},0) \cup (0,\mathrm{e}) \cup (\mathrm{e},+\infty).$$

例 3 设 $f(x)=x^2+x+1, x\in\mathbf{R}$. 求(1) $f(-2)$、$f(2x)$ 与 $f(-x)$；(2) $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，其中 x_0 及 Δx 为 $\mathbf{R}$ 中的实数.

解 (1) 将 -2 代入 $f(x)$ 得

$$f(-2)=(-2)^2+(-2)+1=3,$$

同理有
$$f(2x)=(2x)^2+2x+1=4x^2+2x+1,$$
$$f(-x)=(-x)^2+(-x)+1=x^2-x+1;$$

(2) 在 $f(x)$ 中用 $x_0+\Delta x$ 代入 x 得

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x) &= (x_0+\Delta x)^2+x_0+\Delta x+1 \\ &= x_0^2+x_0+1+2x_0\Delta x+\Delta x^2+\Delta x, \end{aligned}$$

用 x_0 代 x 得

$$f(x_0)=x_0^2+x_0+1,$$

所以有

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta x^2+(2x_0+1)\Delta x.$$

1.1.2 函数的基本特性

对于不同的函数 $f(x)$，它们可能具有不同的特性，常遇到的有如下四种.

(1)奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 I 关于原点对称. 若对于一切的

$x\in I$,都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数;如果 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数. 既非偶函数,也非奇函数的函数称为非奇非偶函数. 常数 0 为惟一的既奇又偶的函数.

奇偶函数运算后的奇偶性具有如下规律(运算有意义的话):

两个偶函数的和、积、商仍为偶函数;

两个奇函数的和是奇函数;

两个奇函数的积、商是偶函数;

一个偶函数与一个奇函数的积与商是奇函数;

偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

(2)周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,若存在正数 T,使得对于一切实数 x,都有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数,T 称为 $f(x)$ 的周期.

若 $f(x)$ 为周期函数,则 $f(x)$ 的周期有无穷个. 因为若 T 为 $f(x)$ 的一个周期,那么 $-T$、$\pm 2T$、$\pm 3T$、… 等都是 $f(x)$ 的周期. 若在这些周期中,存在一个最小正数 a,我们称它为 $f(x)$ 的最小正周期,简称周期. 如:$y=\sin x$ 周期为 2π,$y=\cos\dfrac{x}{2}$ 周期为 4π.

(3)单调性

设 $y=f(x)$ 定义域为 I,若对于 I 中任意的 x_1、x_2,$x_1<x_2$,都有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在 I 上单调递增;若

$$f(x_1) \geqslant f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在 I 上单调递减.

若在上述不等式中将等号去掉,这时称单调是严格的. 递增称为严格递增,递减称为严格递减. 如 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$内是严格递增函数,$y=e^{-x}$在$(-\infty,+\infty)$内是严格递减函数,而 $y=x^2$ 在$(-\infty,0]$内严格递减,在$[0,+\infty]$内严格递增.

递增函数的图形沿 x 轴正方向保持上升趋势(图 1.1-1 (a)),递减函数的图形沿 x 轴正方向保持下降趋势(图 1.1-1 (b)).

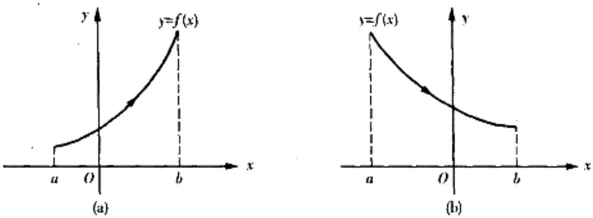

图 1.1-1

(4)有界性

设函数 $y=f(x)$定义于 I 上,若存在正数 M,使对于一切的 $x\in I$,都有

$$|f(x)| \leqslant M$$

成立,则称 $f(x)$在 I 上是有界函数,或称 $f(x)$在 I 上有界. 若不存在这样的正数 M,则称函数 $f(x)$在 I 上无界. 例如 $y=\sin x$是$(-\infty,+\infty)$上的有界函数,因为$|\sin x|\leqslant 1$,所以,存在

正数 $M=1$,使当 $x\in(-\infty,+\infty)$时,有$|\sin x|\leqslant M=1$.

例 4 证明 $y=\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上无界,而在$(a,+\infty)(a>0)$上有界.

证 用反证法.设 $y=\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上有界,即存在正数 M,使对于一切的 $x\in(0,+\infty)$,都有

$$\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant M,$$

可以证明这是不可能的.因为取 $x_0=\frac{1}{M+1}$时,显然 $x_0\in(0,+\infty)$,而 $\left|\frac{1}{x_0}\right|=M+1>M$,所以,$y=\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上无界.

当 $x\in(a,+\infty)(a>0)$时,$x>a>0$,从而有 $\left|\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{x}<\frac{1}{a}$.故可取 $M=\frac{1}{a}$,则当 $x\in(a,+\infty)$时,恒有

$$\left|\frac{1}{x}\right|<M.$$

这就证明了 $y=\frac{1}{x}$在$(a,+\infty)(a>0)$上是有界函数.

1.1.3 反函数

设函数 $y=f(x)$的定义域为 I,值域为 A,若对于任意的 x_1、$x_2\in I$,$x_1\neq x_2$,都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$,这也就是说,对于任意的 $y\in A$,在 I 中只有惟一的 x,使 $f(x)=y$. 这样就存在着从 A 到 I 的一个对应法则 φ,使 $x=\varphi(y)$,即 x 是 y 的函数,这个函数称为函数 $y=f(x)$的反函数.常将这个反函数记为 $x=f^{-1}(y)$,它的定义域是 A,值域为 I.

习惯上,我们把 x 作为自变量,把 y 作为因变量,因此常把 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$.

在直角坐标系 xOy 中,$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 表示的是同一图形,而 $y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图形则是关于直线 $y=x$ 对称的.

例 5 证明:当 $x\geqslant 1$ 时,函数 $y=\dfrac{1}{x}+x$ 的反函数存在,并求反函数及其定义域.

解 容易看出,函数 $y=\dfrac{1}{x}+x$ 在 $[1,+\infty)$ 上的值域为 $[2,+\infty)$. 从方程 $\dfrac{1}{x}+x=y$ 中解出 x,得

$$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4}}{2}.$$

由于 $x\geqslant 1$,故根号前应取正号(为什么?),从而有

$$x=\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2},$$

这说明:对于 $y\in[2,+\infty)$,恰有惟一的 $x=\dfrac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}$ 与之对应,因而函数 $y=\dfrac{1}{x}+x$ 在 $[1,+\infty)$ 内存在反函数,且反函数为

$$y=\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2},$$

其定义域为 $[2,+\infty)$.

设 I 与 A 分别是 $y=f(x)$ 的定义域与值域,$y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$,则有

$$f^{-1}(f(x)) = x,x \in I;$$
$$f(f^{-1}(x)) = x,x \in A.$$

1.1.4 基本初等函数及图形

下列五类函数统称为基本初等函数：幂函数 $y=x^{\mu}$；指数函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$；对数函数 $y=\log_a x(a>0$，且 $a\neq1)$；三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$和反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$. 它们的图形如图 1.1-2、1.1-3 所示.

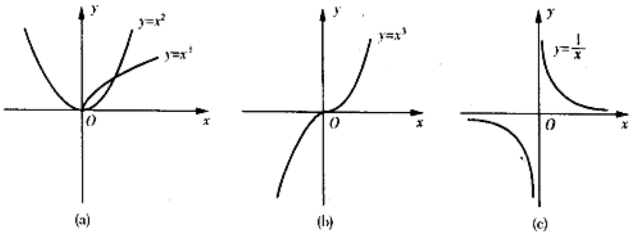

图 1.1-2

1.1.5 复合函数与初等函数

1. 复合函数

定义 1.1.2 设函数 $y=f(u)$的定义域为 E，函数 $u=\varphi(x)$的定义域为 I，记 $R(\varphi)\cap E=A$. 若 A 非空，则有 I 中的非空子集 I_1 使 $\varphi(I_1)=A$，这样，在 I_1 与 $R(f)$之间通过连续两次对应：

$$\varphi: x\rightarrow u;\quad f: u\rightarrow y.$$

建立了一个函数关系，我们称它为由函数 $y=f(u)$和函数 $u=\varphi(x)$构成的复合函数，记为

$$y=f[\varphi(x)],$$

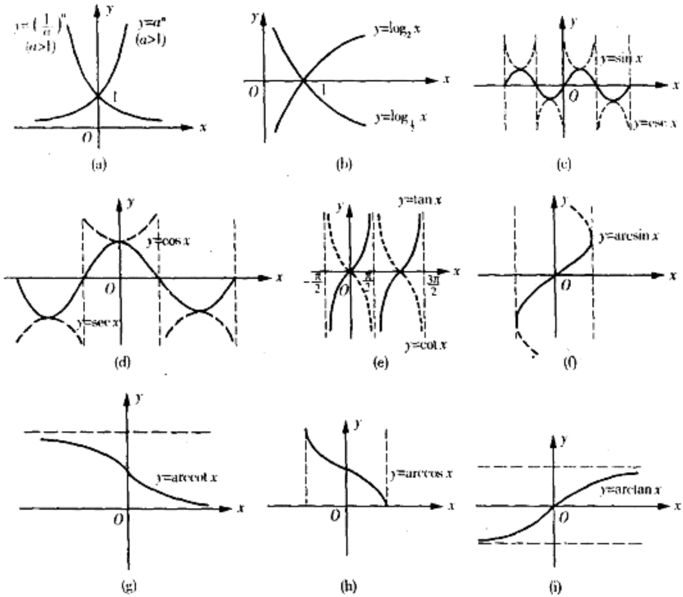

图 1.1-3

其中 u 称为中间变量.

例 6　求函数 $y=f(u)$与函数 $u=\varphi(x)$构成的复合函数.

(1) $y=\sqrt{u}, u=x^2-1$,

(2) $y=\lg u, u=\arcsin x$.

解　(1) 将 $u=x^2-1$ 代入 $y=\sqrt{u}$中得所求复合函数为 $y=\sqrt{x^2-1}$,其定义域为$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$,它是 $u=x^2-1$ 的定义域的一部分.

(2) 将 $u=\arcsin x$代入 $y=\lg u$中得所求复合函数为 $y=$

$\lg \arcsin x$，其定义域$(0,1]$.

例7 设 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$，$\varphi(x)=\cos x$，求 $f[\varphi(x)]$和$\varphi[f(x)]$.

解 $f[\varphi(x)]$即为 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$的复合，而 $f(u)=\sqrt{1-u^2}$，$u=\cos x$，于是有

$$f[\varphi(x)]=\sqrt{1-\cos^2 x}=|\sin x|.$$

一般地，在求 $f[\varphi(x)]$时，只需将 $f(x)$中的 x 用$\varphi(x)$代入即得. 同理我们有

$$\varphi[f(x)]=\cos\sqrt{1-x^2}.$$

例8 设 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$，求 $f[f(x)]$.

解 因 $f(x)$的定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,1]$，因此，$f[f(x)]$是有意义的. 将 $f(x)$中的 x 用 $f(x)$代入，得

$$f[f(x)]=\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}.$$

注意 若将上面的复合函数的结果写成$|x|$而不指明自变量 x 的变化范围是不对的，因为 $f[f(x)]$的定义域为$[-1,1]$，并非全体实数. 上面的复合函数化简后应表示为

$$f[f(x)]=|x| \quad x\in[-1,1].$$

例9 下列函数是由哪些基本初等函数复合而成的，试写出它们的复合关系.

(1) $y=2^{\tan^2 \ln x}$，(2) $y=\lg \arctan x^3$.

解 (1) 从最外层开始，首先是一个指数函数，记 $y=2^u$，而 $u=\tan^2 \ln x$，它的最外层是一个幂函数，记 $u=v^2$，而 $v=\tan \ln x$，它的最外层是一个正切函数，记 $v=\tan t$，而 $t=\ln x$. 所以，函数 $y=2^{\tan^2 \ln x}$的复合关系是 $y=2^u$，$u=v^2$，$v=\tan t$，$t=\ln x$.

(2) 函数 $y=\lg \arctan x^3$ 的复合关系是