

高 职 院 校 21 世 纪 新 视 野 教 材

高 · 等 · 数 · 学

GAODENG SHUXUE

(上册)

主 编

张忠志 李宏平 杨建湘

湖南大学出版社

前 言

本书系“高职院校 21 世纪新视野教材”之一,适合高职工科、文科师生使用。

本书依据教育部有关课程的教学大纲,联系高职实际,贯彻“以应用为目的,以必需、够用为度”的原则,注重高职学生科技教育与人文教育的结合;注重学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养,重视理论联系实际,减少数理论证,在表述上力求深入浅出,适应拓宽,便于自学;在吸收传统教材的优点的同时,又力求转变教育思想,体现教学改革精神。

本书分上、下两册,由湖南城市学院张忠志,湖南科技职业学院李宏平(上册),湖南交通职业技术学院杨建湘(下册)主编;长沙民政职业技术学院李占光,怀化医专丁超,湘潭职业技术学院李海军,湖南大学数学与计量经济学院孙学锋、任玉萍,湖南科技职业学院谭乐平任副主编;参加本书编写的有李效羽、廖仲春,全套教材由总主编张忠志修改、定稿,另有林立强、彭良、申丽云、龙彪、杨勇、莫琳、周立、廖昱、夏涛、马攸、罗莉、王友良、贺志林、彭春生、肖君等或参与编写,或提供资料,对他们辛勤劳作深表谢意!

新编教材是高职教材建设的一个尝试,书中引用了盛祥耀、周暂达、罗汉等专家的科研成果,囿于篇幅限制,未能一一列陈,敬请谅解;又由于我们水平有限,加之时间仓促,书中存在一些不妥之处,恳请读者和同行指正。

编 者

2003 年 4 月

目 次

第 1 章 函数 极限 连续

1.1 函数	(1)
1.1.1 一元函数的概念	(1)
1.1.2 函数的基本特性	(3)
1.1.3 反函数	(6)
1.1.4 基本初等函数及图形	(8)
1.1.5 复合函数与初等函数	(8)
1.1.6 分段函数	(12)
1.1.7 函数关系的进一步讨论	(13)
1.1.8 经济函数关系式	(15)
习题 1.1	(19)
1.2 极限	(23)
1.2.1 数列的极限	(23)
1.2.2 函数的极限	(31)
1.2.3 无穷小量与无穷大量	(37)
1.2.4 极限的运算	(41)
1.2.5 夹逼定理 两个重要极限	(46)
1.2.6 无穷小的比较	(51)
习题 1.2	(55)
1.3 函数的连续性	(58)
1.3.1 函数连续性的概念	(58)

1.3.2 函数的间断点·····	(61)
1.3.3 连续函数的运算与性质·····	(64)
1.3.4 初等函数的连续性·····	(65)
1.3.5 闭区间上连续函数的性质·····	(66)
习题 1.3 ·····	(69)
本章小结 ·····	(71)
自测题 ·····	(74)

第 2 章 一元函数微分学

2.1 导数的概念·····	(78)
习题 2.1 ·····	(90)
2.2 导数的运算法则·····	(92)
2.2.1 反函数的求导法则·····	(92)
2.2.2 导数的四则运算法则·····	(95)
2.2.3 复合函数的求导法则·····	(98)
2.2.4 高阶导数 ·····	(101)
习题 2.2 ·····	(104)
2.3 几类求导问题 ·····	(106)
2.3.1 隐函数的求导问题 ·····	(106)
2.3.2 参数方程所确定的函数的求导问题 ·····	(109)
2.3.3 幂指函数的求导问题 ·····	(112)
习题 2.3 ·····	(114)
2.4 函数的微分 ·····	(115)
2.4.1 微分的定义 ·····	(115)
2.4.2 函数可微的条件 ·····	(117)
2.4.3 微分运算法则 ·····	(118)
习题 2.4 ·····	(121)

2.5 微分学的应用	(123)
2.5.1 中值定理	(123)
2.5.2 函数的单调性	(128)
2.5.3 函数的凹凸性	(131)
2.5.4 柯西中值定理与洛必达法则	(136)
2.5.5 函数的极值与最值	(143)
2.5.6 函数图形的描绘	(152)
2.5.7 经济函数的边际	(158)
习题 2.5	(161)
本章小结	(165)
自测题	(166)

第 3 章 一元函数积分学

3.1 一元不定积分	(170)
3.1.1 原函数与不定积分	(170)
3.1.2 不定积分的基本性质	(173)
3.1.3 不定积分的性质	(176)
3.1.4 不定积分的几何意义	(179)
习题 3.1	(181)
3.2 一元不定积分的计算	(182)
3.2.1 直接积分法	(182)
3.2.2 换元法	(184)
3.2.3 分部积分法	(193)
3.2.4 两种特殊函数的积分	(196)
3.2.5 积分表的使用	(200)
习题 3.2	(201)
3.3 一元函数定积分	(204)

3.3.1	定积分的概念	(204)
3.3.2	定积分的性质	(208)
	习题 3.3	(212)
3.4	微积分的基本定理	(213)
3.4.1	变上限定积分	(213)
3.4.2	牛顿-莱布尼茨公式	(216)
	习题 3.4	(217)
3.5	定积分的计算	(219)
3.5.1	换元法	(220)
3.5.2	分部积分法	(224)
3.5.3	定积分的近似计算	(227)
3.5.4	广义积分	(235)
	习题 3.5	(241)
3.6	一元定积分的应用	(243)
3.6.1	定积分的微元法	(243)
3.6.2	求平面图形的面积	(244)
3.6.3	求体积	(249)
3.6.4	求弧长	(253)
3.6.5	函数的平均值	(255)
3.6.6	均方根	(257)
3.6.7	功与液体压力	(258)
3.6.8	引力	(262)
3.6.9	重心	(263)
	习题 3.6	(267)
	本章小结	(269)
	自测题	(272)

第 4 章 常微分方程

4.1 微分方程的一般概念	(279)
习题 4.1	(285)
4.2 一阶微分方程的求解问题	(286)
4.2.1 可分离变量的微分方程	(286)
4.2.2 齐次方程	(288)
4.2.3 一阶线性微分方程	(292)
4.2.4 全微分方程	(297)
习题 4.2	(302)
4.3 高阶微分方程的求解问题	(304)
4.3.1 可降阶的高阶微分方程	(304)
4.3.2 高阶线性微分方程	(308)
习题 4.3	(326)
4.4 微分方程的应用举例	(327)
习题 4.4	(336)
本章小结	(337)
自测题	(341)
 附录 I 初等数学常用公式	 (346)
附录 II 几种常用的曲线	(351)
附录 III 积分表	(356)
 习题答案	 (368)

第1章 函数 极限 连续

函数是对现实世界中各种变量之间相互依赖关系的一种抽象描述,它是高等数学研究的主要对象.极限理论是高等数学的基础,它是这门课程的基本推理工具.连续则是函数的一个重要特性.本章将介绍函数,极限与连续的基本知识,为以后的学习奠定必要的基础.

1.1 函数

1.1.1 一元函数的概念

定义 1.1.1 设 E 是实数集 $\mathbf{R}$ 中的一个非空子集, f 是 E 到 $\mathbf{R}$ 中的一个对应:对于 $x \in E$,按 f 的对应法则,有惟一确定的 $y \in \mathbf{R}$ 与之对应,则称 y 是 x 的函数,记为 $y = f(x)$, x 称为自变量, y 称为因变量, E 称为函数 $y = f(x)$ 的定义域,通常记为 $D(f)$. 集 $\{y | y = f(x), x \in E\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的值域,通常用 $R(f)$ 表示.

若 E_1 是 E 中一非空真子集,函数 $y = f(x)$ 在 E_1 上的值域仍用 $R(f)$ 表示显然已不合适,我们将它记为 $f(E_1)$,按此记法, $R(f)$ 可表示为 $f(E)$.

在函数的研究中,若涉及的变量只有两个,即一个自变量和一个因变量,我们称这种函数为一元函数,上面给出的就是一元函数的定义.在本节里,我们主要讨论一元函数.对于多元函数

(即有多个自变量的情形)我们到本节末再作介绍.

一元函数关系描述的是两个实变量在变化过程中的相互依赖关系. 当需研究变量 y 随变量 x 变化而变化的规律时, 我们以 x 作为自变量, 以 y 作为因变量. 反之, 当需研究变量 x 随变量 y 变化而变化的规律时, 我们以 y 作为自变量, 而以 x 作为因变量.

在应用中, 我们说函数关系 $y=f(x)$ 已被建立, 是指函数的定义域与对应法则均已确定, 在具体问题里, 函数 $y=f(x)$ 的定义域由问题本身所决定; 当函数 $y=f(x)$ 无实际问题背景而仅是一解析式时, 其定义域是使函数有意义的一切 x 的全体, 如: 圆的面积 A 与其半径 r 之间的关系是 $A=\pi r^2$, 这个函数的定义域是 $(0, +\infty)$, 而 $y=\pi x^2$ 仅作为一解析式时, 其定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

设有函数 $y=f(x)$, 定义域为 $D(f)$, 若 $x_0 \in D(f)$, 我们说函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处有定义, 称 $f(x_0)$ 为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值. 函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值也记为 $f(x)|_{x=x_0}$ 、 $y|_{x=x_0}$ 等.

为直观地研究函数 $y=f(x)$ 随自变量变化而变化的规律, 我们常通过平面直角坐标系 xOy 来讨论动点 (x, y) 的运动轨迹, 它称为函数 $y=f(x)$ 的图形. 易知, 这种图形与任意平行于 y 轴的直线的交点最多有一个.

例1 求函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-3}}+\ln(x^2-4)$ 的定义域.

解 函数 $f(x)$ 定义域中的 x 应满足

$$\begin{cases} x-3 > 0, \\ x^2-4 > 0. \end{cases}$$

解不等式组, 得

$$x > 3.$$

所以,函数 $f(x)$ 的定义域为 $(3, +\infty)$.

例 2 求函数 $f(x) = \frac{1}{1 - \ln|x|}$ 的定义域.

解 函数 $f(x)$ 定义域中的 x 应满足 $\ln|x| \neq 1$ 且 $x \neq 0$, 所以 $f(x)$ 的定义域为

$$(-\infty, -e) \cup (-e, 0) \cup (0, e) \cup (e, +\infty).$$

例 3 设 $f(x) = x^2 + x + 1, x \in \mathbf{R}$. 求 (1) $f(-2), f(2x)$ 与 $f(-x)$; (2) $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, 其中 x_0 及 Δx 为 $\mathbf{R}$ 中的实数.

解 (1) 将 -2 代入 $f(x)$ 得

$$f(-2) = (-2)^2 + (-2) + 1 = 3,$$

同理有 $f(2x) = (2x)^2 + 2x + 1 = 4x^2 + 2x + 1,$

$$f(-x) = (-x)^2 + (-x) + 1 = x^2 - x + 1;$$

(2) 在 $f(x)$ 中用 $x_0 + \Delta x$ 代入 x 得

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) &= (x_0 + \Delta x)^2 + x_0 + \Delta x + 1 \\ &= x_0^2 + x_0 + 1 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 + \Delta x, \end{aligned}$$

用 x_0 代 x 得

$$f(x_0) = x_0^2 + x_0 + 1,$$

所以有

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta x^2 + (2x_0 + 1)\Delta x.$$

1.1.2 函数的基本特性

对于不同的函数 $f(x)$, 它们可能具有不同的特性, 常遇到的有如下四种.

(1) 奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域 I 关于原点对称. 若对于一切的

$x \in I$, 都有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数; 如果 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数. 既非偶函数, 也非奇函数的函数称为非奇非偶函数. 常数 0 为惟一的既奇又偶的函数.

奇偶函数运算后的奇偶性具有如下规律(运算有意义的话):

两个偶函数的和、积、商仍为偶函数;

两个奇函数的和是奇函数;

两个奇函数的积、商是偶函数;

一个偶函数与一个奇函数的积与商是奇函数;

偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于原点对称.

(2) 周期性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 若存在正数 T , 使得对于一切实数 x , 都有

$$f(x+T) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数, T 称为 $f(x)$ 的周期.

若 $f(x)$ 为周期函数, 则 $f(x)$ 的周期有无穷个. 因为若 T 为 $f(x)$ 的一个周期, 那么 $-T, \pm 2T, \pm 3T, \dots$ 等都是 $f(x)$ 的周期. 若在这些周期中, 存在一个最小正数 a , 我们称它为 $f(x)$ 的最小正周期, 简称周期. 如: $y = \sin x$ 周期为 2π , $y = \cos \frac{x}{2}$ 周期为 4π .

(3) 单调性

设 $y = f(x)$ 定义域为 I , 若对于 I 中任意的 $x_1, x_2, x_1 < x_2$, 都有

$$f(x_1) \leq f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在 I 上单调递增; 若

$$f(x_1) \geq f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在 I 上单调递减.

若在上述不等式中将等号去掉, 这时称单调是严格的. 递增称为严格递增, 递减称为严格递减. 如 $y = \sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 内是严格递增函数, $y = e^{-x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是严格递减函数, 而 $y = x^2$ 在 $(-\infty, 0]$ 内严格递减, 在 $[0, +\infty)$ 内严格递增.

递增函数的图形沿 x 轴正方向保持上升趋势(图 1.1-1 (a)), 递减函数的图形沿 x 轴正方向保持下降趋势(图 1.1-1 (b)).

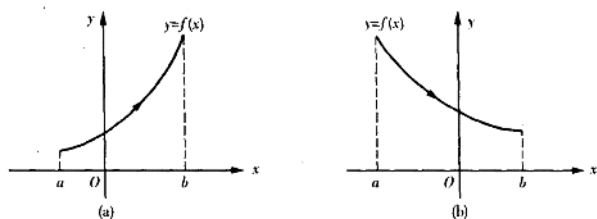


图 1.1-1

(4) 有界性

设函数 $y = f(x)$ 定义于 I 上, 若存在正数 M , 使对于一切的 $x \in I$, 都有

$$|f(x)| \leq M$$

成立, 则称 $f(x)$ 在 I 上是有界函数, 或称 $f(x)$ 在 I 上有界. 若不存在这样的正数 M , 则称函数 $f(x)$ 在 I 上无界. 例如 $y = \sin x$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的有界函数, 因为 $|\sin x| \leq 1$, 所以, 存在

正数 $M=1$, 使当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时, 有 $|\sin x| \leq M=1$.

例 4 证明 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上无界, 而在 $(a, +\infty)$ ($a > 0$) 上有界.

证 用反证法. 设 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界, 即存在正数 M , 使对于一切的 $x \in (0, +\infty)$, 都有

$$\left| \frac{1}{x} \right| \leq M,$$

可以证明这是不可能的. 因为取 $x_0 = \frac{1}{M+1}$ 时, 显然 $x_0 \in (0, +\infty)$, 而 $\left| \frac{1}{x_0} \right| = M+1 > M$, 所以, $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上无界.

当 $x \in (a, +\infty)$ ($a > 0$) 时, $x > a > 0$, 从而有 $\left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$. 故可取 $M = \frac{1}{a}$, 则当 $x \in (a, +\infty)$ 时, 恒有

$$\left| \frac{1}{x} \right| < M.$$

这就证明了 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(a, +\infty)$ ($a > 0$) 上是有界函数.

1.1.3 反函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 I , 值域为 A , 若对于任意的 $x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$, 都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 这也就是说, 对于任意的 $y \in A$, 在 I 中只有惟一的 x , 使 $f(x) = y$. 这样就存在着从 A 到 I 的一个对应法则 φ , 使 $x = \varphi(y)$, 即 x 是 y 的函数, 这个函数称为函数 $y = f(x)$ 的反函数. 常将这个反函数记为 $x = f^{-1}(y)$, 它的定义域是 A , 值域为 I .

习惯上,我们把 x 作为自变量,把 y 作为因变量,因此常把 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$.

在直角坐标系 xOy 中, $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 表示的是同一图形,而 $y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图形则是关于直线 $y=x$ 对称的.

例 5 证明:当 $x \geq 1$ 时,函数 $y = \frac{1}{x} + x$ 的反函数存在,并求反函数及其定义域.

解 容易看出,函数 $y = \frac{1}{x} + x$ 在 $[1, +\infty)$ 上的值域为 $[2, +\infty)$. 从方程 $\frac{1}{x} + x = y$ 中解出 x , 得

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}.$$

由于 $x \geq 1$, 故根号前应取正号(为什么?), 从而有

$$x = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2},$$

这说明:对于 $y \in [2, +\infty)$, 恰有惟一的 $x = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}$ 与之对应, 因而函数 $y = \frac{1}{x} + x$ 在 $[1, +\infty)$ 内存在反函数, 且反函数为

$$y = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2},$$

其定义域为 $[2, +\infty)$.

设 I 与 A 分别是 $y=f(x)$ 的定义域与值域, $y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$, 则有

$$f^{-1}(f(x)) = x, x \in I;$$

$$f(f^{-1}(x)) = x, x \in A.$$

1.1.4 基本初等函数及图形

下列五类函数统称为基本初等函数:幂函数 $y=x^a$; 指数函数 $y=a^x (a>0, \text{且 } a\neq 1)$; 对数函数 $y=\log_a x (a>0, \text{且 } a\neq 1)$; 三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$ 和反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$. 它们的图形如图 1.1-2、1.1-3 所示.

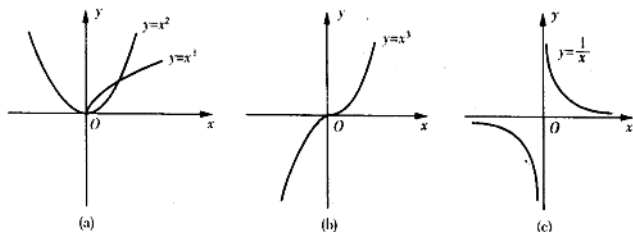


图 1.1-2

1.1.5 复合函数与初等函数

1. 复合函数

定义 1.1.2 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 E , 函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 I , 记 $R(\varphi) \cap E = A$. 若 A 非空, 则有 I 中的非空子集 I_1 使 $\varphi(I_1)=A$, 这样, 在 I_1 与 $R(f)$ 之间通过连续两次对应:

$$\varphi: x \rightarrow u; \quad f: u \rightarrow y.$$

建立了一个函数关系, 我们称它为由函数 $y=f(u)$ 和函数 $u=\varphi(x)$ 构成的复合函数, 记为

$$y = f[\varphi(x)],$$

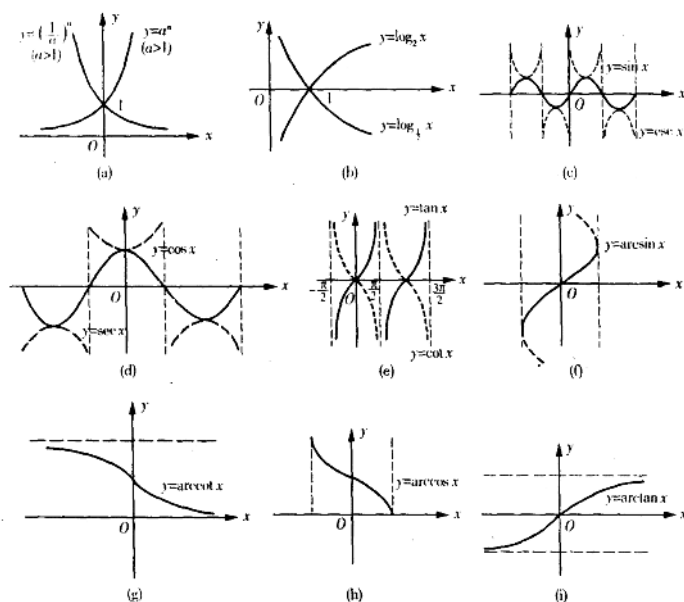


图 1.1-3

其中 u 称为中间变量.

例 6 求函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=\varphi(x)$ 构成的复合函数.

(1) $y=\sqrt{u}, u=x^2-1$,

(2) $y=\lg u, u=\arcsin x$.

解 (1) 将 $u=x^2-1$ 代入 $y=\sqrt{u}$ 中得所求复合函数为 $y=\sqrt{x^2-1}$, 其定义域为 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, 它是 $u=x^2-1$ 的定义域的一部分.

(2) 将 $u=\arcsin x$ 代入 $y=\lg u$ 中得所求复合函数为 $y=$

$\lg \arcsin x$, 其定义域 $(0, 1]$.

例 7 设 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $\varphi(x) = \cos x$, 求 $f[\varphi(x)]$ 和 $\varphi[f(x)]$.

解 $f[\varphi(x)]$ 即为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的复合, 而 $f(u) = \sqrt{1-u^2}$, $u = \cos x$, 于是有

$$f[\varphi(x)] = \sqrt{1-\cos^2 x} = |\sin x|.$$

一般地, 在求 $f[\varphi(x)]$ 时, 只需将 $f(x)$ 中的 x 用 $\varphi(x)$ 代入即得. 同理我们有

$$\varphi[f(x)] = \cos \sqrt{1-x^2}.$$

例 8 设 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, 求 $f[f(x)]$.

解 因 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[0, 1]$, 因此, $f[f(x)]$ 是有意义的. 将 $f(x)$ 中的 x 用 $f(x)$ 代入, 得

$$f[f(x)] = \sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}.$$

注意 若将上面的复合函数的结果写成 $|x|$ 而不指明自变量 x 的变化范围是不对的, 因为 $f[f(x)]$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 并非全体实数. 上面的复合函数化简后应表示为

$$f[f(x)] = |x| \quad x \in [-1, 1].$$

例 9 下列函数是由哪些基本初等函数复合而成的, 试写出它们的复合关系.

$$(1) y = 2^{\tan^2 \ln x}, (2) y = \lg \arctan x^3.$$

解 (1) 从最外层开始, 首先是一个指数函数, 记 $y = 2^u$, 而 $u = \tan^2 \ln x$, 它的最外层是一个幂函数, 记 $u = v^2$, 而 $v = \tan \ln x$, 它的最外层是一个正切函数, 记 $v = \tan t$, 而 $t = \ln x$. 所以, 函数 $y = 2^{\tan^2 \ln x}$ 的复合关系是 $y = 2^u$, $u = v^2$, $v = \tan t$, $t = \ln x$.

(2) 函数 $y = \lg \arctan x^3$ 的复合关系是