

理 科 要 覽

代 數 學

(下)

桂叔超 金品編

代數學要覽下冊

目次

一元二次方程式.....	1	無理方程式 (消根法).....	27
一元二次方程式 (稍複雜者).....	3	無理方程式 (代法).....	29
一元二次方程式應用問題.....	5	一次與二次之二元聯立方程式.....	31
一元二次方程式應用問題.....	7	二次與二次之同次聯立方程式.....	33
一元二次方程式應用問題.....	9	二次與二次之對稱聯立方程式.....	35
一元二次方程式根之討論.....	11	雜二元二次聯立方程式.....	37
一元二次方程式根與係數之關係.....	13	二元高次聯立方程式.....	39
已知二根作方程式.....	15	多元高次聯立方程式.....	41
二次三項式之因數分解.....	17	二次聯立方程式應用問題 (一).....	43
求極大極小值.....	19	二次聯立方程式應用問題 (二).....	45
一元高次方程式 (一).....	21	二元一次不定方程式.....	47
一元高次方程式 (二).....	23	三元一次聯立不定方程式.....	49
一元高次方程式 (三).....	25	比及比例.....	51

比例式之證明.....	53	二項式定理.....	87
變數法.....	55	方程式之根.....	89
等差級數.....	57	綜合除法.....	91
等比級數.....	59	求方程式之有理根.....	93
無限等比級數.....	61	根與係數之關係.....	95
調和級數.....	63	知根作方程式.....	97
求輻級數之和.....	65	方程式之變形.....	99
對數.....	67	求方程式之無理根.....	101
指數方程式.....	69	一元三次方程式 (Cardan 氏公式).....	103
未定係數法.....	71	一元四次方程式 (Ferrari 氏解法).....	105
對稱式之因數分解.....	73	二次及三次行列式之展開.....	107
交代式之因數分解.....	75	二次及三次行列式之應用.....	109
部分分數 (分母無重複因數者).....	77	行列式之性質.....	111
部分分數 (分母有重複因數者).....	79	求高次行列式之值.....	113
排列.....	81	應用行列式解多元聯立方程式.....	115
配合.....	83	試驗無限級數之收斂.....	117
成然率.....	85	試驗無限級數之發散.....	119

一元二次方程式

(代數學下1)

法	則	問 題
定 義	方程式之單有一未知數，且其最高次數爲二次者，名曰一元二次方程式。	解下列方程式：
純二次方程式解法	$ax^2=b$ 稱純二次方程式。 例 解 $81x^2=25$. $x^2=\frac{25}{81} \quad \therefore x=\pm\frac{5}{9}.$	(1) $(x-3)^2-25=0$. (2) $x^2-3x-40=0$.
完全二次方程式解法	$ax^2+bx+c=0$ 稱完全二次方程式。 (1) 因數解法。 例 解 $2x^2-7x+3=0$. $(2x-1)(x-3)=0.$ 如 $2x-1=0$, $\therefore x=\frac{1}{2}$; 如 $x-3=0$, $\therefore x=3$. (2) 公式解法。 $ax^2+bx+c=0$ 之標準形，其根 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. 例 解 $6x^2+5x-56=0$. $x=\frac{-5\pm\sqrt{25-4\times 6\times(-56)}}{2\times 6}=\frac{-5\pm\sqrt{25+1344}}{12}$ $=\frac{-5\pm\sqrt{1369}}{12}=\frac{-5\pm 37}{12}=\frac{8}{3} \text{ 或 } -\frac{7}{2}.$	(3) $3x^2-4x+1=0$. (4) $35-3x-2x^2=0$. (5) $x^2-2x-2=0$. (6) $4x^2+8x=3$. (7) $x^2+3\sqrt{8}x-30=0$. (8) $abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0$. (9) $x^2+ax=a+x$. (10) $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$.

解

答

$$(1) (x-3)^2=25. x-3=\pm 5. \therefore x=8 \text{ 或 } -2.$$

$$(2) (x-8)(x+5)=0. x-8=0 \text{ 或 } x+5=0. \\ \therefore x=8 \text{ 或 } -5.$$

$$(3) (3x-1)(x-1)=0. 3x-1=0 \text{ 或 } x-1=0. \\ \therefore x=\frac{1}{3} \text{ 或 } 1.$$

$$(4) 2x^2+3x-35=0. (2x-7)(x+5)=0. 2x-7=0 \\ \text{或 } x+5=0. \therefore x=\frac{7}{2} \text{ 或 } -5.$$

$$(5) \text{ 由公式, } x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times 1\times (-2)}}{2} \\ =\frac{2\pm\sqrt{4+8}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{2\pm 2\sqrt{3}}{2}=1\pm\sqrt{3}.$$

$$(6) 4x^2+8x-3=0.$$

$$\text{由公式, } x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\times 4\times (-3)}}{2\times 4} \\ =\frac{-8\pm\sqrt{64+48}}{8}=\frac{-8\pm\sqrt{112}}{8} \\ =\frac{-8\pm 4\sqrt{7}}{8}=-1\pm\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

$$(7) \text{ 由公式, } x=\frac{-3\sqrt{3}\pm\sqrt{(3\sqrt{3})^2-4\times 1\times (-30)}}{2}$$

$$=\frac{-3\sqrt{3}\pm\sqrt{27+120}}{2}=\frac{-3\sqrt{3}\pm\sqrt{147}}{2}$$

$$=\frac{-3\sqrt{3}\pm 7\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3} \text{ 或 } -5\sqrt{3}.$$

$$(8) (ax-b)(bx-a)=0. ax-b=0 \text{ 或 } bx-a=0$$

$$\therefore x=\frac{b}{a} \text{ 或 } \frac{a}{b}.$$

$$(9) x^2+(a-1)x-a=0. (x+a)(x-1)=0.$$

$$x+a=0 \text{ 或 } x-1=0. \therefore x=-a \text{ 或 } 1.$$

$$(10) \text{ 由公式, } x=\frac{a-c\pm\sqrt{(c-a)^2-4(b-c)(a-b)}}{2(b-c)}$$

$$=\frac{a-c\pm(a-2b+c)}{2(b-c)}=\frac{a-b}{b-c} \text{ 或 } 1.$$

法	則	問 題
整方程式	例 解 $(3x+1)(x-5)-x(2x-9)=0$. 去括號, $3x^2-14x-5-2x^2+9x=0$. 合併, $x^2-5x-5=0$. 由公式, $x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{25-4\times 1\times (-5)}}{2}$ $=\frac{5\pm\sqrt{25+20}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{45}}{2}=\frac{5\pm 3\sqrt{5}}{2}.$	解下列方程式: (1) $\left(\frac{3x+4}{5}\right)^2-\frac{12}{5}x=8\frac{1}{5}$. (2) $(x-6)(x-5)+(x-7)(x-4)=10$. (3) $(1-a^2)(x+a)-2a(1-x^2)=0$.
分式方程式	例 $\frac{2x-3}{3x-5}+\frac{3x-5}{2x-3}=\frac{5}{2}$. 去分母, $2(2x-3)^2+2(3x-5)^2=5(3x-5)(2x-3)$. $2(4x^2-12x+9)+2(9x^2-30x+25)=5(6x^2-19x+15).$ 移項合併, $4x^2-11x+7=0$. $(x-1)(4x-7)=0.$ $x-1=0$ 或 $4x-7=0$. $\therefore x=1$ 或 $\frac{7}{4}$.	(4) $\frac{x+1}{x+4}=\frac{2x-1}{x+6}$. (5) $\frac{x^2-3x}{x^2-1}+\frac{1}{x-1}+2=0$. (6) $\frac{x+1}{x+4}-\frac{x+4}{x+1}+\frac{x+1}{x-2}-\frac{x-2}{x+1}=\frac{2}{3}$.

(代數學下4) 一元二次方程式(稍複雜者)之解答

解

答

$$(1) \frac{9x^2+24x+16}{25} - \frac{12x}{5} = \frac{41}{5}$$

$$9x^2+24x+16-60x=205.$$

$$9x^2-36x-189=0. \quad x^2-4x-21=0.$$

$$(x-7)(x+3)=0. \quad \therefore x=7 \text{ 或 } x=-3.$$

$$(2) x^2-11x+30+x^2-11x+28=10.$$

$$2x^2-22x+48=0. \quad x^2-11x+24=0.$$

$$(x-3)(x-8)=0. \quad \therefore x=3 \text{ 或 } x=8.$$

$$(3) (1-a^2)x+a(1-a^2)-2a+2ax^2=0.$$

$$2ax^2-(a^2-1)x-a(a^2+1)=0.$$

$$(x-a)[2ax-(a^2+1)]=0.$$

$$\therefore x=a \text{ 或 } x=\frac{a^2+1}{2a}.$$

$$(4) (x+1)(x+6)=(2x-1)(x+4).$$

$$x^2+7x+6=2x^2+7x-4.$$

$$x^2=10. \quad \therefore x=\pm\sqrt{10}.$$

$$(5) x^2-3x+x+1+2(x^2-1)=0.$$

$$3x^2-2x-1=0. \quad (3x+1)(x-1)=0.$$

$$\therefore x=-\frac{1}{3} \text{ 或 } 1 \text{ (增根)}.$$

如 $x=1$, 則原方程式之分母爲 0, 故 1 爲增根.

而僅有 $-\frac{1}{3}$ 之根.

$$(6) 1-\frac{3}{x+4}-\left(1+\frac{3}{x+1}\right)+1+\frac{3}{x-2}-\left(1-\frac{3}{x+1}\right)$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{3}{x+4}-\frac{3}{x+1}+\frac{3}{x-2}+\frac{3}{x+1}=\frac{2}{3}$$

$$-\frac{3}{x-2}-\frac{3}{x+4}=\frac{2}{3}.$$

去分母, $9(x+4)-9(x-2)=2(x-2)(x+4).$

去括號而整理, $2x^2+4x-70=0.$

$$x^2+2x-35=0.$$

$$(x-5)(x+7)=0. \quad \therefore x=5 \text{ 或 } -7$$

法

則

問

題

例 兩數的和是 18, 牠們的乘積是 77, 試求這兩數.

設一數為 x , 則他一數為 $18-x$, 故得

$$x(18-x)=77.$$

整理,

$$x^2-18x+77=0.$$

解之, 得

$$x=7 \text{ 或 } 11, 18-x=11 \text{ 或 } 7.$$

答: 兩數為 7 及 11.

例 有直角三角形, 其夾直角二邊之和為 21 寸, 斜邊較短邊多 6 寸, 求此二邊之長.

令短邊為 x 寸, 則長邊為 $(21-x)$ 寸, 斜邊為 $(x+6)$ 寸.

故

$$x^2+(21-x)^2=(x+6)^2.$$

去括號整理,

$$x^2-54x+405=0.$$

解之, 得

$$x=9 \text{ 或 } 45.$$

圖 45 不適用, 故所求二邊為 9 寸及 12 寸.

(1) 設相鄰兩整數 (連續數) 之積為 72, 求此兩數.

(2) 有甲乙兩數, 其和為 21, 其平方和為 233, 求兩數.

(3) 今有連續兩數, 其和之平方較其平方之和多 220, 問二數為何?

(4) 有長方形地, 其長較闊多 2 尺, 面積等於 180 方尺, 求長闊.

(5) 一長方形與一正方形的面積相等, 但長方形的長比正方形每邊的 2 倍少 6 方, 寬比正方形的邊少 4 方. 求長方地長寬各幾尺.

解

答

- (1) 設相鄰兩整數為
- x
- 及
- $x+1$
- , 則

$$x(x+1)=72 \text{ 或 } x^2+x-72=0.$$

解之, 得 $x=8$ 或 -9 , $x+1=9$ 或 -8 .故兩數為 8 及 9 或 -9 及 -8 .

- (2) 設甲數為
- x
- , 則乙數為
- $21-x$
- , 而

$$x^2+(21-x)^2=233.$$

去括號整理, $x^2-21x+104=0$.解之, 得 $x=8$ 或 13 , $21-x=13$ 或 8 .

故兩數為 8 及 13.

- (3) 設連續兩數為
- x
- 及
- $x+1$
- , 則

$$(x+x+1)^2-220=x^2+(x+1)^2.$$

整理, 得 $x^2+x-110=0$.解之, 得 $x=10$ 或 -11 , $x+1=11$ 或 -10 .故兩數為 10 及 11 或 -11 及 -10 .

- (4) 設闊為
- x
- 尺, 則長為
- $x+3$
- 尺, 故

$$x(x+3)=180.$$

整理, $x^2+3x-180=0$.解之, 得 $x=12$ 或 -15 .因 -12 為不合理, 故 $x=12$, $x+3=15$.

所求之闊為 12 尺, 長為 15 尺.

- (5) 設正方形每邊長為
- x
- 尺, 則長方形之長為
- $(2x-6)$
- 尺, 寬為
- $(x-4)$
- 尺, 故

$$x^2=(2x-6)(x-4).$$

整理, $x^2-14x+24=0$.解之, 得 $x=12$ 或 2 .如 $x=12$, $2x-6=18$, $x-4=8$;如 $x=2$, $2x-6=-2$, $x-4=-2$, 不合理.

故長方地之長為 18 尺, 寬為 8 尺.

法	則	問	題
例 一事甲作之，其日數可比乙少 4 日；若甲乙共作此事一日後，甲去而乙留；又經 9 日中，而此事成。求各人獨作此事所需之日數。 令甲獨作此事需 x 日，則乙獨作需 $(x+4)$ 日，故 $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4}\right) \times 1 + 9 \cdot \frac{1}{x+4} = 1.$ 解之，得 $x=8$ 或 $-\frac{1}{2}$。 因 $-\frac{1}{2}$ 不合理，故甲需 8 日，乙需 12 日。 例 兩車同行 200 里，甲車比乙車每小時快 7 里，而先到 1 小時 45 分鐘，求兩車的速度。 設乙車速度每小時為 x 里，則甲車速度為 $(x+7)$ 里，故 $\frac{200}{x} = \frac{200}{x+7} + 1\frac{3}{4}.$ 解之，得 $x=25$ 或 -32 (不合理)。 故甲車速度 32 里，乙車速度 25 里。		(1) 甲乙二人合作 20 日可成之工程，如令乙獨作之，則比甲獨作之要多 9 日，問甲乙獨作時各要幾日？ (2) 一水桶有甲乙二水管，若單用乙管注水，比單用甲管須多費 6 小時，若同時用兩管注水，則 4 小時可以注滿，求單用一管注水滿桶之時間。 (3) 有甲乙二列車，直行 36 里長之鐵道，甲比乙每時快 15 里，追達至終點，比乙達到之時間少 12 分鐘。求二列車每時之速度。 (4) 甲往返相距 14 里之某村，這出發 40 分鐘之後，乙往追之，追到之後仍返出發地，同時甲亦恰至某村。知乙每時之速度 4 里，求甲每時之速度。	

解

答

- (1) 設甲獨作需
- x
- 日, 則乙獨作需
- $(x+9)$
- 日, 故

$$\frac{20}{x} + \frac{20}{x+9} = 1.$$

去分母整理, $x^2 - 31x - 180 = 0$.解之, 得 $x = 36$ 或 -5 (不合理).

故甲需 36 日, 乙需 45 日.

- (2) 設單用甲管需
- x
- 小時, 則單用乙管需
- $(x+6)$
- 小時, 故

$$\frac{4}{x} + \frac{4}{x+6} = 1.$$

去分母整理, $x^2 - 2x + 24 = 0$.解之, 得 $x = 6$ 或 -4 (不合理).

故甲管需 6 小時, 乙管需 12 小時.

- (3) 令乙每時之速度為
- x
- 里, 則甲每時之速度為
- $(x+15)$
- 里, 故

$$\frac{36}{x+15} = \frac{36}{x} - \frac{12}{60}.$$

去分母整理, $x^2 + 15x - 2700 = 0$.解之, 得 $x = 45$ 或 -60 (不合理).

$$45 + 15 = 60.$$

故甲列車速度 60 里, 乙 45 里.

- (4) 令甲每時之速度為
- x
- 里, 則乙每時比甲多走
- $(4-x)$
- 里, 故

$$\frac{14 - \frac{40}{60}x}{x} = \frac{\frac{40}{60}x}{4-x} \times 2.$$

去分母整理, $x^2 - 25x - 84 = 0$.解之, 得 $x = 3$ 或 -28 (不合理).

故甲每時之速度 3 里.

法	則	問 題
例 一人以 900 元買進綢若干疋,若此人能以此 900 元多買三疋,則每疋可賤 15 元.問此人原買進幾疋? 設此人原買進 x 疋,則原買價等於 $\frac{900}{x}$ 元,而 $\frac{900}{x+3} + 15 = \frac{900}{x}.$ 去分母整理, $x^2 - 3x - 180 = 0.$ 解之,得 $x = 15$ 或 -12 (不合理). 故此人原買綢 15 疋. 例 船夫在靜水中每時行舟 4 里,現往返於 12 里之河流須 8 小時,問水於 3 小時間下流若干里? 令水流之速度為 x 里,則 $\frac{12}{4+x} + \frac{12}{4-x} = 8.$ 解之, $x = \pm 2 \text{ 或 } -2 \text{ (不合理).}$ $\therefore x = 2.$ 所求之里數 $= 2 \text{ 里} \times 3 = 6 \text{ 里}.$	(1) 用現款 850 元買牛若干頭,死去 2 頭,將其餘之牛,每頭擡高 10 元賣去,可得利 50 元. 問原買入牛若干頭? (2) 某人以現款 24 元買布若干疋,留 2 疋自用,其餘賣去,每疋得利益 2 角,共賣得 25 元 2 角.求其原買入布之疋數. (3) 聚餐費 80 元,按人攤派,有 4 人未到不攤,其餘之人每人多派 1 元.求原定人數. (4) 有河流每時之速度為 2 里,今沿此河行舟,往返於 3 里半之距離,須費時間 100 分.問此舟在靜水中每小時之速度為若干里?	

(代數學下10) 一元二次方程式應用問題之解答

解

答

- (1) 設買牛有 x 頭, 則買價每頭為 $\frac{850}{x}$ 元, 而賣價為

$$\left(\frac{850}{x} + 10\right) \text{ 元, 故}$$

$$\left(\frac{850}{x} + 10\right)(x - 2) = 850 + 50.$$

去分母整理, $10x^2 - 70x - 1700 = 0.$

或 $x^2 - 7x - 170 = 0.$

解之, 得 $x = 17$ 或 -10 (不合理).

故買牛 17 頭.

- (2) 令所求之正數為 x , 則每疋之買價為 $\frac{24}{x}$ 元, 故

$$\left(\frac{24}{x} + 0.2\right)(x - 2) = 25.2.$$

解之, 得 $x = 20$ 或 -12 (不合理).

故原買入布為 20 疋.

- (3) 設原定人數為 x 人, 則原應每人攤派 $\frac{80}{x}$ 元, 而

$$\frac{80}{x} + 1 = \frac{80}{x - 4}.$$

去分母整理, $x^2 - 4x - 320 = 0.$

解之, 得 $x = 20$ 或 -16 (不合理).

故原有 20 人.

- (4) 令所求之速度為 x 里, 則

$$\frac{3.5}{x - 2} + \frac{3.5}{x + 2} = \frac{100}{60}.$$

整理, $5x^2 - 21x - 20 = 0.$

解之, 得 $x = 5$ 或 $-\frac{4}{5}$ (不合理).

故此舟在靜水中之速度為 5 里.

法	則	問	題
判別式	$ax^2+bx+c=0$ 之根爲 $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. 此處 b^2-4ac 稱判別式.	(1) 設方程式 $x^2+k(x+1)+3=0$ 之兩根相等, 求 k 之值.	
根之性質	(1) 判別式爲正數, 且爲平方數, 則兩根爲實數, 且爲不相等之有理數. (2) 判別式爲正數, 但非平方數, 則兩根爲實數, 且爲不相等之無理數. (3) 判別式爲零, 則兩根爲實數, 且爲相等之有理數. (4) 判別式爲負數, 則兩根爲虛數而不等.	(2) k 爲何數, 則方程式 $(k-4)x^2+(k-2)x+2=0$ 有相等之實根? (3) 方程式 $(m+2)x^2-2mx+1=0$ 之根爲虛或爲實或相等, 與 m 之值有何關係, 試詳論之. (4) $(x-p)(x-q)=5$, 試證其有實根, 但 p, q 爲實數. (5) 設方程式 $2x^2+2(p+q)x+p^2+q^2=0$ 有實根, 則 p, q 之關係如何?	

例 判別 $x^2+7=4x$ 之根之性質.

將方程式寫爲 $x^2-4x+7=0$,

則判別式 $=(-4)^2-4 \times 7 = -12$, 故根是不相等之虛數.

例 方程式 $kx^2-(3k-2)x+4-k=0$ 之二根相等, 求 k 之值.

如二根相等, 則判別式爲零, 故

$$(3k-2)^2-4k(4-k)=0.$$

解之, 得

$$k=2 \text{ 或 } k=\frac{2}{13}.$$

(代數學下12) 一元二次方程式根之討論之解答

解

答

(1) 將方程式寫為 $x^2 + kx + (k+3) = 0$.

$$\text{判別式} = k^2 - 4(k+3) = 0.$$

$$k^2 - 4k - 12 = 0. \quad \therefore k = 6 \text{ 或 } -2.$$

(2) 判別式 $= (k-2)^2 - 8(k-4) = 0$.

$$k^2 - 12k + 36 = 0. \quad \therefore k = 6.$$

(3) 判別式 $= (2m)^2 - 4(m+2) = 4m^2 - 4m - 8$

$$= 4(m-2)(m+1).$$

(i) 如 $(m-2)(m+1) > 0$,
即 $m > 2$ 或 $m < -1$, 則根為實數.

(ii) 如 $(m-2)(m+1) = 0$,
即 $m = 2$ 或 -1 , 則兩根相等.

(iii) 如 $(m-2)(m+1) < 0$,
即 $-1 < m < 2$, 則根為虛數.

(4) 將方程式寫為

$$x^2 - (p+q)x + (pq-5) = 0.$$

$$\text{判別式} = (p+q)^2 - 4(pq-5)$$

$$= (p-q)^2 + 20.$$

因 p, q 為實數, 故上式永為正而根必為實數.

(5) 判別式 $= 4(p+q)^2 - 8(p^2+q^2)$

$$= 4[-p^2 + 2pq - q^2] = -4(p-q)^2.$$

如方程式有實根, 則 $-4(p-q)^2 \geq 0$, 然

$$(p-q)^2 \geq 0, \quad -4(p-q)^2 > 0$$

不能成立, 只有

$$-4(p-q)^2 = 0. \quad \therefore p = q.$$

一元二次方程式根與係數之關係 (代數學下13)

法	則	問 題
令 $ax^2+bx+c=0$ 之二根爲 α, β, 則 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \alpha\beta=\frac{c}{a}.$ (注意) 令 $x^2+px+q=0$ 之二根爲 α, β, 則 $\alpha+\beta=-p, \alpha\beta=q$. 例 已知一方程式二根之和爲 m, 積爲 n, 作其方程式, 并求其二根之值. 所求之方程式爲 $x^2-mx+n=0.$ 其二根爲 $\frac{m \pm \sqrt{m^2-4n}}{2}.$ 例 設 α, β 爲 $3x^2+4x+1=0$ 之根, 求 $\alpha^2+\beta^2$ 之值. 因 $\alpha+\beta=-\frac{4}{3}, \alpha\beta=\frac{1}{4}.$ $\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(-\frac{4}{3}\right)^2-2\times\frac{1}{4}$ $=\frac{16}{9}-\frac{2}{3}=\frac{10}{9}.$		(1) 設方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根爲 α, β, 試以 a, b, c 表 (i) $(\alpha-\beta)^2$. (ii) $\alpha^3+\beta^3$. (2) 設方程式 $x^2+px+q=0$ 之二根爲 α, β, 試以 p, q 表 (i) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$. (ii) $\frac{1}{2\alpha+\beta}+\frac{1}{\alpha+2\beta}$. (3) 於 $x^2-9x+a=0$ 之方程式中, 與 a 以何值, 則二根立方之和爲 0? (4) 有甲乙二人解 $x^2+px+q=0$, 甲誤書第二項之係數而得 3 與 -8 之二根, 乙誤書第三項而得 5 與 -7 之二根, 問真正之方程式之根爲何?

(代數學下14) 一元二次方程式根與係數之關係之解答

解

答

$$\begin{aligned} (1) \quad i. \quad (a-\beta)^2 &= a^2 - 2a\beta + \beta^2 = a^2 + 2a\beta + \beta^2 - 4a\beta \\ &= (a+\beta)^2 - 4a\beta = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{4c}{a} \\ &= \frac{b^2 - 4ac}{a^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii. \quad a^3 + \beta^3 &= (a+\beta)(a^2 - a\beta + \beta^2) \\ &= (a+\beta)\left[(a+\beta)^2 - 3a\beta\right] \\ &= \left(-\frac{b}{a}\right)\left[\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{3c}{a}\right] \\ &= \frac{-b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2} = \frac{3abc - b^3}{a^3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad i. \quad \frac{a}{\beta} + \frac{\beta}{a} &= \frac{a^2 + \beta^2}{a\beta} = \frac{(a+\beta)^2 - 2a\beta}{a\beta} \\ &= \frac{(-p)^2 - 2q}{q} = \frac{p^2 - 2q}{q}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii. \quad \frac{1}{2a+\beta} + \frac{1}{a+2\beta} &= \frac{a+2\beta+2a+\beta}{(2a+\beta)(a+2\beta)} \\ &= \frac{3a+3\beta}{2a^2+5a\beta+2\beta^2} \\ &= \frac{3(a+\beta)}{2(a+\beta)^2+a\beta} = \frac{3(-p)}{2p^2+q} \\ &= \frac{-3p}{2p^2+q}. \end{aligned}$$

(3) 設二根為 α, β , 則 $\alpha^3 + \beta^3 = 0$.

$$(\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = 0.$$

$$(\alpha+\beta)[(\alpha+\beta)^2 - 3\alpha\beta] = 0.$$

$$9(81 - 3a) = 0.$$

$$3a = 81, \therefore a = 27.$$

(4) 因甲誤書第二項之係數, 而得 3 與 -8 二根, 故

$$q = 3 \times (-8) = -24.$$

又因乙誤書第三項, 而得 5 與 -7 二根, 故

$$p = -(5-7) = 2.$$

因此真正方程式是 $x^2 + 2x - 24 = 0$, 而二根為 4 及 -6.