

高 职 院 校 21 世 纪 新 视 野 教 材

高 · 等 · 数 · 学

GAODENG SHUXUE

(下册)

主 编

张忠志 李宏平 杨建湘

湖南大学出版社

目 次

第 5 章 向量代数与空间解析几何

5.1 空间点集	(1)
5.1.1 空间直角坐标系	(1)
5.1.2 空间点的直角坐标	(2)
5.1.3 空间两点间的距离	(3)
习题 5.1	(4)
5.2 向量	(5)
5.2.1 向量的概念	(5)
5.2.2 向量的运算	(6)
5.2.3 向量的分解与坐标	(9)
5.2.4 向量的数量积	(12)
5.2.5 向量的向量积	(15)
习题 5.2	(18)
5.3 空间平面及其方程	(20)
5.3.1 点的轨迹方程的概念	(20)
5.3.2 平面及其方程	(21)
习题 5.3	(25)
5.4 空间直线及其方程	(26)
5.4.1 空间直线的点向式方程和参数方程	(26)
5.4.2 空间直线的一般方程	(28)
5.4.3 空间直线的位置关系	(30)

习题 5.4	(30)
5.5 空间点集的描述	(32)
5.5.1 空间点集的一般描述	(32)
5.5.2 空间曲面	(33)
5.5.3 空间曲线	(39)
习题 5.5	(43)
本章小结	(44)
自测题	(49)

第 6 章 多元函数微分学

6.1 多元函数	(52)
6.1.1 区域的概念	(52)
6.1.2 二元函数	(54)
习题 6.1	(55)
6.2 二元函数的极限与连续	(56)
6.2.1 二元函数的极限	(56)
6.2.2 二元函数的连续性	(58)
习题 6.2	(60)
6.3 偏导数	(61)
6.3.1 多元函数的偏导数	(61)
6.3.2 多元函数的偏导数与连续性	(65)
6.3.3 高阶偏导数	(67)
习题 6.3	(70)
6.4 全微分	(71)
6.4.1 全微分	(71)
6.4.2 全微分在近似计算中的应用举例	(75)
习题 6.4	(77)

6.5 复合函数的求导法则	(78)
6.5.1 多元复合函数的求导法则	(78)
6.5.2 隐函数的求导法	(83)
习题 6.5	(86)
6.6 偏导数在几何上的应用	(88)
6.6.1 空间曲线的切线与法平面	(88)
6.6.2 曲面的切平面与法线	(90)
习题 6.6	(94)
6.7 多元函数的极值	(95)
6.7.1 极值与最大值和最小值	(95)
6.7.2 条件极值	(100)
习题 6.7	(104)
本章小结	(105)
自测题	(108)

第 7 章 多元函数积分学

7.1 二重积分	(111)
7.1.1 二重积分的概念	(111)
7.1.2 二重积分的性质	(114)
习题 7.1	(116)
7.2 二重积分的计算	(117)
7.2.1 利用直角坐标计算二重积分	(117)
7.2.2 利用极坐标计算二重积分	(123)
习题 7.2	(129)
7.3 二重积分应用举例	(130)
7.3.1 空间曲面的面积	(130)
7.3.2 曲顶柱体的体积	(131)

7.3.3 重心	(135)
习题 7.3	(139)
7.4 平面曲线积分	(140)
7.4.1 对弧长的曲线积分	(140)
7.4.2 对坐标的曲线积分	(144)
7.4.3 两类曲线积分之间的联系	(151)
习题 7.4	(153)
7.5 各类积分间的联系	(155)
7.5.1 格林公式	(155)
7.5.2 平面上曲线积分与路径无关的条件	(160)
习题 7.5	(165)
本章小结	(167)
自测题	(170)

第 8 章 无穷级数

8.1 常数项级数	(173)
8.1.1 常数项级数的概念	(174)
8.1.2 常数项级数的性质 收敛级数的必要条件	(177)
8.1.3 正项级数	(181)
8.1.4 一般常数项级数	(189)
习题 8.1	(191)
8.2 幂级数	(193)
8.2.1 函数项级数的一般概念	(193)
8.2.2 幂级数	(196)
8.2.3 函数展开成幂级数	(205)
* 8.2.4 函数的幂级数展开式的应用	(215)
习题 8.2	(220)

8.3 傅立叶级数	(221)
8.3.1 傅立叶级数	(222)
8.3.2 正弦级数和余弦级数	(230)
8.3.3 周期为 T 的周期函数的傅立叶级数	(234)
8.3.4 定义在任意有限区间上函数的傅立叶级数 ...	(240)
习题 8.3	(242)
本章小结	(244)
自测题	(245)
 习题答案	 (249)
参考文献	(266)

第5章 向量代数与空间解析几何

向量是解决许多数学、物理、力学及工程技术问题的有力工具. 本章前一部分侧重介绍如何在空间直角坐标系中, 建立向量的坐标表示式, 用代数的方法讨论向量的运算. 后一部分介绍空间解析几何的基本知识, 首先以向量为工具讨论平面和直线, 然后介绍常见的曲面和曲线.

5.1 空间点集

本节讨论的空间点集是指三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中的点集.

5.1.1 空间直角坐标系

在平面点集的讨论中, 我们通过建立平面直角坐标系, 将平面上的点 P 与一有序二维数组 (x, y) 对应起来, 用代数的方法去讨论几何问题. 同样, 我们通过建立空间直角坐标系, 把空间点与一有序数组对应起来, 对空间问题进行研究.

首先, 我们根据问题的需要在无限空间中选定一点 O , 它称为原点, 过原点 O 作三条相互垂直的数轴, 分别称之为 x 轴、 y 轴和 z 轴. 通常, 将 x 轴和 y 轴置于水平平面上, x 轴的指向由里向外, y 轴由左向右, z 轴由下而上, 我们也将 x 轴、 y 轴和 z 轴分别称之为横轴、纵轴和立轴. 显然这种名称是就观察者所处的位置而言的, 三轴的位置可以任意放置, 但三轴必须按 x 、 y 、 z 次序作成右手系, 即将右手伸平, 使四指与拇指垂直, 四指

弯曲由 x 轴正向转向 y 轴正向, 则大拇指所指方向即为 z 轴正向(图 5.1-1).

三数轴 x 、 y 、 z 两两确定三个平面, 分别称为 xOy 平面, yOz 平面和 zOx 平面. 三个坐标平面将空间分为八个部分, 每一个部分称为一个卦限, 八个卦限的位置按如下方法确定: 三轴正半轴部位的卦限为第一卦限, 从第一卦限开始, 观察者从 z 轴正向向下看, 按逆时针方向, 排定为第二卦限、第三卦限、第四卦限; 第一、二、三、四卦限下面的空间部分依次为第五、第六、第七、第八卦限. 这八个卦限分别用罗马字母 I, II, $\dots$ VIII 表示(图 5.1-2).

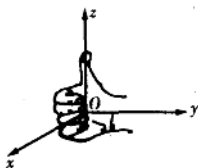


图 5.1-1

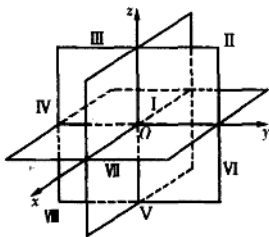


图 5.1-2

5.1.2 空间点的直角坐标

建立了空间直角坐标系 $Oxyz$ 后, 空间任意一点 M 可与一有序数组一一对应.

如图 5.1-3, 过点 M 分别作 x 轴、 y 轴和 z 轴的垂直平面, 分别交 x 轴、 y 轴和 z 轴于点 A 、 B 和 C . 设 $OA=x$, $OB=y$, $OC=z$, 这样, 对于任意的点 M , 有惟一的一组数 x 、 y 、 z 与之对应. 同样, 按上述方法给定一有序数组 x 、 y 、 z , 则在空间有惟一一点

M 与之对应. 这样, 空间点 M 与有序数组 (x, y, z) 建立了一一对应关系, 我们把 x, y, z 叫做点 M 的坐标, 记为 $M(x, y, z)$.

显然, 原点 O 的坐标为 $(0, 0, 0)$, 在坐标轴上的点至少有两个坐标为零, 在坐标平面上的点至少有一个坐标为零.

如图 5.1-3 中的 A , 有 $y=z=0$, 对于 P 有 $z=0$, 图 5.1-3 中的点 A, B, C, P 可看成是 M 分别在 x 轴、 y 轴、 z 轴及 xOy 平面上的投影.

有了点的坐标之后, 我们能根据点的坐标特征判断它所处的位置, 如点 $M_1(1, -2, 1)$ 是处在第四卦限内的点; 点 $M_2(0, 2, 3)$ 是处于 yOz 平面的第一象限内.

5.1.3 空间两点间的距离

设有空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 我们要将 M_1 和 M_2 之间的距离 $d = |M_1M_2|$ 通过它们的坐标来表示.

如图 5.1-4, 通过 M_1 与 M_2 分别作三个坐标轴的垂直平面, 一般可得一长方体, $\triangle M_1QM_2$ 为直角三角形, 作 M_1 与 M_2 在 xOy 平面上的投影 P_1 和 P_2 , 其坐标分别为 $(x_1, y_1, 0)$ 和 $(x_2, y_2, 0)$, 则

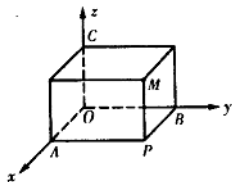


图 5.1-3

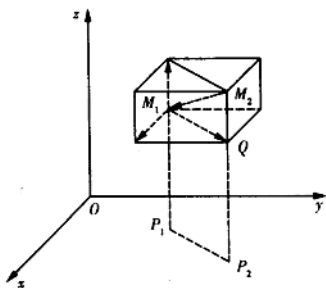


图 5.1-4

$$|M_1Q| = |P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$|M_2Q| = |z_2 - z_1|.$$

所以

$$\begin{aligned} d = |M_1M_2| &= \sqrt{|M_1Q|^2 + |M_2Q|^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

由公式(5.1.1)可求得空间任意一点 $M(x, y, z)$ 到原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (5.1.2)$$

例1 过点 $M_0(1, 2, 3)$ 作关于 y 轴和原点 O 的对称点 M_0' 与 M_0'' , 求 $|M_0M_0'|$ 与 $|M_0M_0''|$.

解 $M_0(1, 2, 3)$ 关于 y 轴的对称点 M_0' 的坐标为 $M_0'(-1, 2, -3)$, 关于原点 O 的对称点 M_0'' 的坐标为 $M_0''(-1, -2, -3)$, 于是由两点间的距离公式(5.1.1)得

$$\begin{aligned} d_1 = |M_0M_0'| &= \sqrt{(-1-1)^2 + (2-2)^2 + (-3-3)^2} \\ &= 2\sqrt{10}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_2 = |M_0M_0''| &= \sqrt{(-1-1)^2 + (-2-2)^2 + (-3-3)^2} \\ &= 2\sqrt{14}. \end{aligned}$$

习题 5.1

1. 在空间直角坐标系中, 指出下列各点在哪个卦限?
 $A(1, 2, -3); B(-2, -3, 1); C(2, -4, 5); D(4, -1, -2).$
2. 在坐标面上和坐标轴上的点的坐标各有什么特征? 指出下列各点的位置:
 $A(3, 2, 0); B(2, 0, 0); C(0, 1, -1); D(0, 2, 0).$
3. 求点 $(3, 1, 2)$ 关于(1)各坐标面; (2)各坐标轴; (3)原点的对称点的

坐标.

4. 自点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线, 写出各垂足的坐标.

5. 求点 $(4, -3, 5)$ 到 (1) 坐标原点; (2) 各坐标轴; (3) 各坐标面的距离.

6. 试证明以 $A(4, 1, 9)$ 、 $B(10, -1, 6)$ 、 $C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等腰三角形.

7. 在 xOy 坐标面上找一点, 使它的 x 坐标为 1, 且与点 $(1, -2, 2)$ 和点 $(2, -1, -4)$ 等距离.

8. 在 yOz 坐标面上求与点 $A(3, 1, 2)$ 、 $B(4, -2, -2)$ 和 $C(0, 5, 1)$ 等距离的点.

5.2 向 量

5.2.1 向量的概念

我们知道, 为了说明事物的某一属性, 可以用具有一定单位的量来表示, 如长度、面积、体积、质量等, 这种只有大小而没有方向的量, 叫做标量或数量. 在物理、工程技术中还有另外一类量, 它们不仅有大小, 而且还有方向, 如力、速度和加速度等. 我们把这类量称为向量或矢量.

在几何上, 我们常用具有一定长度且标有方向的线段来表示向量. 起点为 A , 终点为 B 的向量记为 $\overrightarrow{AB}$ (图 5.2-1). 在不必指出向量的起点与终



图 5.2-1

点时, 向量也可以用一个拉丁字母上面加一个箭头 (书写时) 或用一个黑体字母表示 (印刷时), 如向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{V}$ 、 $\vec{F}$ 或 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{V}$ 、 $\mathbf{F}$ 等等.

向量 $\mathbf{a}$ 的大小称为该向量的模, 记为 $|\mathbf{a}|$; 模为 1 的向量称

为单位向量,与 a 同向的单位向量记为 a^0 ;模为零的向量称为零向量,记为 0 ,其方向任意.

我们规定,两个向量 a 与 b 不论起点是否一致,只要其方向相同和模相等,则称这两个向量相等.记为 $a=b$.按此规定,将向量 a 在空中作平行移动到任何位置后向量保持不变.我们可以平行移动的向量称为自由向量,今后所说的向量都是指自由向量.

将两个非零向量 a 与 b 的起点移到一起后两向量之间的夹角规定为向量 a 与 b 之间的夹角.记为 $(\hat{a}, \hat{b})$,并规定 $0 \leq (\hat{a}, \hat{b}) \leq \pi$.当 $\theta=0$ 或 π 时,称向量 a 与 b 平行,记作 $a \parallel b$.当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时,称向量 a 与 b 正交或垂直,记作 $a \perp b$.类似地可以规定向量与数轴之间的夹角.

设非零向量 a 与三坐标轴 x 、 y 、 z 轴正向之间的夹角为 α 、 β 、 γ ($0 \leq \alpha$ 、 β 、 $\gamma \leq \pi$),它们称为向量 a 的方向角(图 5.2-2),而把 $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$ 称为向量 a 的方向余弦. $|a| \cos \alpha$ 、 $|a| \cos \beta$ 、 $|a| \cos \gamma$ 分别是 a 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的投影.易知 a 的方向余弦满足

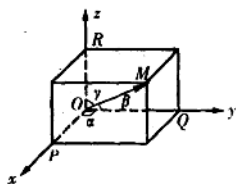


图 5.2-2

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (5.2.1)$$

5.2.2 向量的运算

1. 向量的加法与减法

由力学知识知道,作用于同一质点的两个力 F_1 与 F_2 的效果与将 F_1 、 F_2 按平行四边形法则所得合力 F 对质点的作用等效.我们

把这一合力 F 称为 F_1 与 F_2 的和.

定义 5.2.1 设有两个非零向量 a, b , 以 a, b 为边的平行四边形的对角线所表示的向量(图 5.2-3)称为两向量 a 与 b 的和向量, 记为 $a+b$.

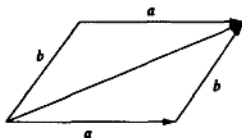


图 5.2-3

和向量也可以这样来得到: 过 a 的终点引向量 b , 连接 a 的起点与 b 的终点所得的向量即为 $a+b$.

当 a 与 b 平行时, 即 $\angle(a, b) = 0$ 或 π 时, a 与 b 的和按图 5.2-4 中的方法获得.

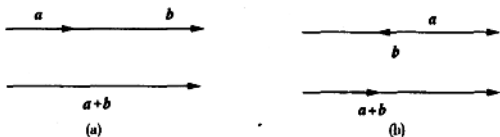


图 5.2-4

根据定义, 向量的加法满足如下运算规律:

$$1) a+b=b+a;$$

交换律

$$2) (a+b)+c=a+(b+c).$$

结合律

(图 5.2-3、图 5.2-5).

与向量 a 的大小相等、方向相反的向量称为 a 的负向量, 记为 $-a$, 我们定义 $a+(-b)$ 为 a 与 b 之差, 记为 $a-b$ (图 5.2-6).

2. 数与向量的乘积

定义 5.2.2 设 a 为一非零向量, λ 为一非零实数, λ 与 a 的乘积记为 λa , 称为数乘向量, 它是一向量, 其大小、方向按如下方法确定:

$$1) |\lambda a| = |\lambda| |a|;$$

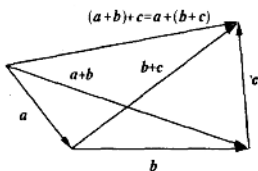


图 5.2-5

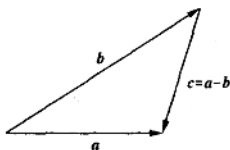


图 5.2-6

2) λa 的方向: 当 $\lambda > 0$ 时, λa 与 a 同向; 当 $\lambda < 0$ 时, λa 与 a 反向.

当 $\lambda = 0$ 或 $a = 0$ 时, 规定 $\lambda a = 0$. 因此, 若 $\lambda a = 0$, 则有 $\lambda = 0$ 或 $a = 0$.

由数乘定义知

$$1 \cdot a = a; -1 \cdot a = -a.$$

数乘还具有如下一些性质:

- | | |
|--|-----|
| 1) $\lambda(\mu a) = \mu(\lambda a) = (\lambda\mu)a$; | 结合律 |
| 2) $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$; | 分配律 |
| 3) $(\lambda+\mu)a = \lambda a + \mu a$. | 分配律 |

若 $a \neq 0$, 则 $\frac{1}{|a|}a$ 为与 a 同方向的单位向量, 记为 a° , 即

$$a^\circ = \frac{1}{|a|}a.$$

从数乘定义立即可得: 向量 b 与向量 $a (a \neq 0)$ 平行 (也称共线) 的充要条件是存在惟一实数 λ , 使

$$b = \lambda a.$$

若向量 a, b, c 平行于同一平面, 称 a, b, c 共面. 设 a 与 b 不平行, 则三向量 a, b, c 共面的充要条件为存在惟一实数对 λ, μ , (图 5.2-7) 使

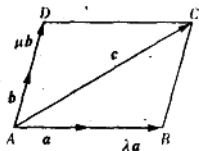


图 5.2-7

$$c = \lambda a + \mu b.$$

(读者自己证)

5.2.3 向量的分解与坐标

为了实现向量加法与数乘的代数化运算,我们把向量按三个坐标轴方向分解.

设有向量 a , 起点为原点, 终点为 M , M 的坐标为 (x, y, z) . 过 M 作三坐标轴的垂直平面, 分别交 x 轴于 A , 交 y 轴于 B , 交 z 轴于 C , 垂直平面在 xOy 平面上交于一点 P , 则

$$a = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC},$$

$\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ 、 $\overrightarrow{OC}$ 分别称为向量 a 在 x 轴、 y 轴、 z 轴三坐标轴上的分向量.

现在, 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上分别取一与坐标轴方向一致的三个单位向量, 记为 i, j, k , 它们称为基本单位向量, 易知: $\overrightarrow{OA} = xi$, $\overrightarrow{OB} = yj$, $\overrightarrow{OC} = zk$, 于是

$$a = xi + yj + zk. \quad (5.2.2)$$

(5.2.2) 称为向量 a 的坐标分解式, 其中 x, y, z 称为向量 a 的坐标, 它们是向量 a 在三个坐标轴上的投影 (图 5.2-8). 当 a 的起点为原点 O 时, a 的坐标即为 a 的终点 M 的坐标.

任一向量 a 与其坐标是一一对应的, 因此向量 a 也可用它的坐标来表示. (5.2.2) 可以写成

$$a = \{x, y, z\}.$$

例 1 设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 、 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为已知两点, 求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标表示式.

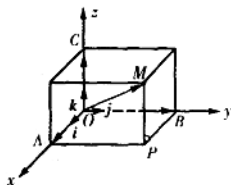


图 5.2-8

$$\text{解 } \overrightarrow{OM_1} = \{x_1, y_1, z_1\} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k},$$

$$\overrightarrow{OM_2} = \{x_2, y_2, z_2\} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}.$$

于是,由向量运算的性质,得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2} &= \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k} - x_1\mathbf{i} - y_1\mathbf{j} - z_1\mathbf{k} \\ &= (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k} \\ &= \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.\end{aligned}$$

从例1看到起点不在原点的向量,其坐标为向量终点与起点的对应坐标之差(图5.2-9):

在坐标表示下,向量的运算归结为向量坐标的运算.

$$\text{设 } \mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\},$$

$$\mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\},$$

$$\text{则 } \mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\},$$

$$\lambda \mathbf{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}.$$

向量 $\mathbf{a}$ 的模及方向余弦可表示为

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (5.2.3)$$

$$\left. \begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{a_x}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \\ \cos \beta &= \frac{a_y}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \\ \cos \gamma &= \frac{a_z}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.\end{aligned}\right\} \quad (5.2.4)$$

例2 设有三点 $A(1,2,1)$ 、 $B(-1,2,0)$ 和 $C(1,-2,3)$, 求
(1) $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$, (2) $\overrightarrow{AB}$ 的模及方向余弦.

解 (1) 因 $\overrightarrow{AB} = \{-1-1, 2-2, 0-1\} = \{-2, 0, -1\}$, $\overrightarrow{AC} = \{0, -4, 2\}$, $2\overrightarrow{AB} = \{-4, 0, -2\}$, $3\overrightarrow{AC} = \{0, -12, 6\}$, 所以

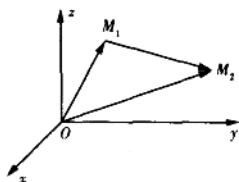


图 5.2-9

$$2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = \{-4, 0, -2\} - \{0, -12, 6\} = \{-4, 12, -8\}.$$

(2) 因 $\overrightarrow{AB} = \{-2, 0, -1\}$, 由 (5.2.3) 及 (5.2.4) 得 $\overrightarrow{AB}$ 的模及方向余弦

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{5};$$

$$\cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}}, \cos \beta = 0, \cos \gamma = \frac{-1}{\sqrt{5}}.$$

例3 已知 $A(1, 2, 0)$ 、 $B(0, 2, 4)$ 及 $C(0, 0, 3)$. 求 $\triangle ABC$ 的重心坐标.

解 如图 5.2-10. 设 D 、 E 分别是 BC 、 AC 的中点, 则 AD 与 BE 的交点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心. 由平面几

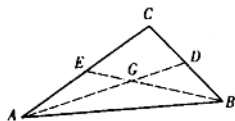


图 5.2-10

何知道, $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$, 而

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \{-1, -2, 3\} + \frac{1}{2}\{0, 2, 1\} \\ &= \{-1, -1, \frac{7}{2}\}.\end{aligned}$$

故 $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} = \{1, 2, 0\} + \frac{2}{3}\{-1, -1, \frac{7}{2}\} = \{\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\}$, 所以 $\triangle ABC$ 重心的坐标为 $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3})$.

例4 作用于一质点的两个力为 $F_1 = \{-1, 2, -3\}$, $F_2 = \{4, 1, 3\}$, 求作用力的合力的大小与方向.

解 因 $F = F_1 + F_2 = \{-1, 2, -3\} + \{4, 1, 3\} = \{3, 3, 0\}$, 所以由公式 (5.2.3) 及 (5.2.4) 得

$$|F| = 3\sqrt{2},$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \gamma = 0,$$