高职院校21世纪新视野教材

高·等·数·学

GAODENG SHUXUE

（下册）

主编
张忠志　李宏平　杨建湘

湖南大学出版社

目　次

第5章　向量代数与空间解析几何

第 6 章 多元函数微分学

第 7 章 多元函数积分学

第 8 章 无穷级数

第5章　向量代数与空间解析几何

向量是解决许多数学、物理、力学及工程技术问题的有力工具. 本章前一部分侧重介绍如何在空间直角坐标系中，建立向量的坐标表示式，用代数的方法讨论向量的运算. 后一部分介绍空间解析几何的基本知识，首先以向量为工具讨论平面和直线，然后介绍常见的曲面和曲线.

5.1　空间点集

本节讨论的空间点集是指三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中的点集.

5.1.1　空间直角坐标系

在平面点集的讨论中，我们通过建立平面直角坐标系，将平面上的点 P 与一有序二维数组 (x,y) 对应起来，用代数的方法去讨论几何问题. 同样，我们通过建立空间直角坐标系，把空间点与一有序数组对应起来，对空间问题进行研究.

首先，我们根据问题的需要在一无限空间中选定一点 O，它称为原点，过原点 O 作三条相互垂直的数轴，分别称之为 x 轴、y 轴和 z 轴. 通常，将 x 轴和 y 轴置于水平平面上，x 轴的指向由里向外，y 轴由左向右，z 轴由下而上，我们也将 x 轴、y 轴和 z 轴分别称之为横轴、纵轴和立轴. 显然这种名称是就观察者所处的位置而言的，三轴的位置可以任意放置，但三轴必须按 x、y、z 次序作成右手系，即将右手伸平，使四指与拇指垂直，四指

弯曲由 x 轴正向转向 y 轴正向，则大拇指所指方向即为 z 轴正向(图 5.1-1).

三数轴 x、y、z 两两确定三个平面，分别称为 xOy 平面，yOz 平面和 zOx 平面. 三个坐标平面将空间分为八个部分，每一个部分称为一个卦限，八个卦限的位置按如下方法确定：三轴正半轴部位的卦限为第一卦限，从第一卦限开始，观察者从 z 轴正向向下看，按逆时针方向，排定为第二卦限、第三卦限、第四卦限；第一、二、三、四卦限下面的空间部分依次为第五、第六、第七、第八卦限. 这八个卦限分别用罗马字母Ⅰ，Ⅱ，…Ⅷ表示(图 5.1-2).

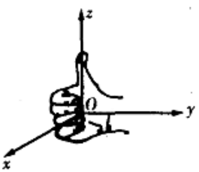

图 5.1-1

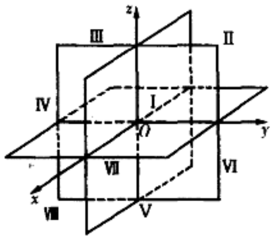

图 5.1-2

5.1.2　空间点的直角坐标

建立了空间直角坐标系 $Oxyz$ 后，空间任意一点 M 可与一有序数组一一对应.

如图 5.1-3，过点 M 分别作 x 轴、y 轴和 z 轴的垂直平面，分别交 x 轴、y 轴和 z 轴于点 A、B 和 C. 设 $OA=x$，$OB=y$，$OC=z$，这样，对于任意的点 M，有惟一的一组数 x、y、z 与之对应. 同样，按上述方法给定一有序数组 x、y、z，则在空间有惟一一点

M 与之对应. 这样,空间点 M 与有序数组(x,y,z)建立了一一对应关系,我们把 x、y、z 叫做点 M 的坐标,记为 $M(x,y,z)$.

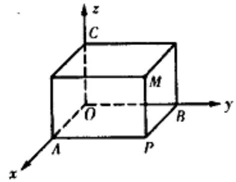

图 5.1-3

显然,原点 O 的坐标为$(0,0,0)$,在坐标轴上的点至少有两个坐标为零,在坐标平面上的点至少有一个坐标为零. 如图 5.1-3 中的 A,有 $y=z=0$,对于 P 有 $z=0$,图 5.1-3中的点 A、B、C、P 可看成是 M 分别在 x 轴、y 轴、z 轴及 xOy 平面上的投影.

有了点的坐标之后,我们能根据点的坐标特征判断它所处的位置,如点 $M_1(1,-2,1)$是处在第四卦限内的点;点 $M_2(0,2,3)$是处于 yOz 平面的第一象限内.

5.1.3 空间两点间的距离

设有空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$,我们要将 M_1 和 M_2 之间的距离 $d=|M_1M_2|$通过它们的坐标来表示.

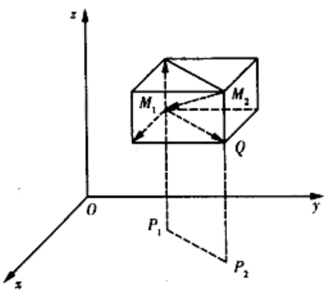

图 5.1-4

如图 5.1-4,通过 M_1 与 M_2 分别作三个坐标轴的垂直平面,一般可得一长方体,$\triangle M_1QM_2$ 为直角三角形,作 M_1 与 M_2 在 xOy 平面上的投影 P_1 和 P_2,其坐标分别为$(x_1,y_1,0)$和$(x_2,y_2,0)$,则

$$|M_1Q| = |P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$
$$|M_2Q| = |z_2-z_1|.$$

所以

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{|M_1Q|^2+|M_2Q|^2}$$
$$= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \quad (5.1.1)$$

由公式(5.1.1)可求得空间任意一点 $M(x,y,z)$ 到原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d = \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \quad (5.1.2)$$

例 1 过点 $M_0(1,2,3)$ 作关于 y 轴和原点 O 的对称点 M_0' 与 M_0''，求 $|M_0M_0'|$ 与 $|M_0M_0''|$.

解 $M_0(1,2,3)$ 关于 y 轴的对称点 M_0' 的坐标为 $M_0'(-1,2,-3)$，关于原点 O 的对称点 M_0'' 的坐标为 $M_0''(-1,-2,-3)$，于是由两点间的距离公式(5.1.1)得

$$d_1 = |M_0M_0'| = \sqrt{(-1-1)^2+(2-2)^2+(-3-3)^2}$$
$$= 2\sqrt{10},$$
$$d_2 = |M_0M_0''| = \sqrt{(-1-1)^2+(-2-2)^2+(-3-3)^2}$$
$$= 2\sqrt{14}.$$

习题 5.1

1. 在空间直角坐标系中，指出下列各点在哪个卦限？

$A(1,2,-3)$；$B(-2,-3,1)$；$C(2,-4,5)$；$D(4,-1,-2)$.

2. 在坐标面上和坐标轴上的点的坐标各有什么特征？指出下列各点的位置：

$A(3,2,0)$；$B(2,0,0)$；$C(0,1,-1)$；$D(0,2,0)$.

3. 求点(3,1,2)关于(1)各坐标面；(2)各坐标轴；(3)原点的对称点的

坐标.

4. 自点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$分别作各坐标面和各坐标轴的垂线,写出各垂足的坐标.

5. 求点(4,-3,5)到(1)坐标原点;(2)各坐标轴;(3)各坐标面的距离.

6. 试证明以 $A(4,1,9)$、$B(10,-1,6)$、$C(2,4,3)$为顶点的三角形是等腰三角形.

7. 在 xOy 坐标面上找一点,使它的 x 坐标为 1,且与点(1,-2,2)和点(2,-1,-4)等距离.

8. 在 yOz 坐标面上求与点 $A(3,1,2)$、$B(4,-2,-2)$和 $C(0,5,1)$等距离的点.

5.2 向 量

5.2.1 向量的概念

我们知道,为了说明事物的某一属性,可以用具有一定单位的量来表示,如长度、面积、体积、质量等,这种只有大小而没有方向的量,叫做标量或数量. 在物理、工程技术中还有另外一类量,它们不仅有大小,而且还有方向,如力、速度和加速度等. 我们把这类量称为向量或矢量.

图 5.2-1

在几何上,我们常用具有一定长度且标有方向的线段来表示向量. 起点为 A,终点为 B 的向量记为$\overrightarrow{AB}$(图 5.2-1). 在不必指出向量的起点与终点时,向量也可以用一个拉丁字母上面加一个箭头(书写时)或用一个黑体字母表示(印刷时),如向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{V}$、$\vec{F}$ 或 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{V}$、$\boldsymbol{F}$ 等等.

向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小称为该向量的模,记为$|\boldsymbol{a}|$;模为 1 的向量称

为单位向量，与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量记为 $\boldsymbol{a}^{\circ}$；模为零的向量称为零向量，记为 $\mathbf{0}$，其方向任意.

我们规定，两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不论起点是否一致，只要其方向相同和模相等，则称这两个向量相等. 记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 按此规定，将向量 $\boldsymbol{a}$ 在空中作平行移动到任何位置后向量保持不变. 我们把可以平行移动的向量称为自由向量，今后所说的向量都是指自由向量.

将两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点移到一起后两向量之间的夹角规定为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角. 记为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，并规定 $0\leqslant(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\leqslant\pi$. 当 $\theta=0$ 或 π 时，称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时，称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 正交或垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 类似地可以规定向量与数轴之间的夹角.

设非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与三坐标轴 x、y、z 轴正向之间的夹角为 α、β、γ（$0\leqslant\alpha$、β、$\gamma\leqslant\pi$），它们称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角（图 5.2-2），而把 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦. $|\boldsymbol{a}|\cos\alpha$、$|\boldsymbol{a}|\cos\beta$、$|\boldsymbol{a}|\cos\gamma$ 分别是 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影. 易知 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦满足

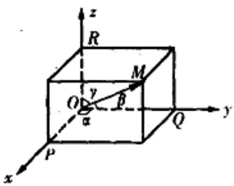

图 5.2-2

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \tag{5.2.1}$$

5.2.2　向量的运算

1. 向量的加法与减法

由力学知识知道，作用于同一质点的两个力 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 的效果与将 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 按平行四边形法则所得合力 $\boldsymbol{F}$ 对质点的作用等效. 我们

把这一合力 $\boldsymbol{F}$ 称为 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 的和.

定义 5.2.1 设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的对角线所表示的向量（图 5.2-3）称为两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

和向量也可以这样来得到：过 $\boldsymbol{a}$ 的终点引向量 $\boldsymbol{b}$，连接 $\boldsymbol{a}$ 的起点与 $\boldsymbol{b}$ 的终点所得的向量即为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

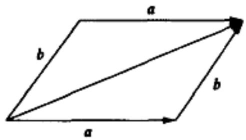

图 5.2-3

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行时，即 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$ 或 π 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和按图 5.2-4 中的方法获得.

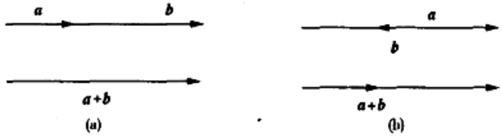

图 5.2-4

根据定义，向量的加法满足如下运算规律：

1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$； 交换律

2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$. 结合律

（图 5.2-3、图 5.2-5）.

与向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小相等、方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记为 $-\boldsymbol{a}$，我们定义 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差，记为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$（图 5.2-6）.

2. 数与向量的乘积

定义 5.2.2 设 $\boldsymbol{a}$ 为一非零向量，λ 为一非零实数，λ 与 $\boldsymbol{a}$ 的乘积记为 $\lambda\boldsymbol{a}$，称为数乘向量，它是一向量，其大小、方向按如下方法确定：

1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；

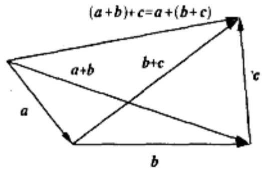

图 5.2-5

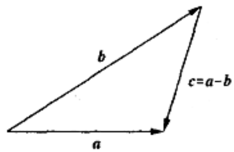

图 5.2-6

2) $\lambda \boldsymbol{a}$ 的方向：当 $\lambda>0$ 时，$\lambda \boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda \boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向.

当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，规定 $\lambda \boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. 因此，若 $\lambda \boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则有 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

由数乘定义知

$$1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a};\ -1 \cdot \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}.$$

数乘还具有如下一些性质：

1) $\lambda(\mu \boldsymbol{a})=\mu(\lambda \boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；　　　　结合律

2) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda \boldsymbol{a}+\lambda \boldsymbol{b}$；　　　　分配律

3) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda \boldsymbol{a}+\mu \boldsymbol{a}$.　　　　分配律

若 $\boldsymbol{a}\neq 0$，则 $\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ 为与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，记为 $\boldsymbol{a}^{\circ}$，即

$$\boldsymbol{a}^{\circ} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}.$$

从数乘定义立即可得：向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$($\boldsymbol{a}\neq 0$)平行(也称共线)的充要条件是存在惟一实数 λ，使

$$\boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{a}.$$

若向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 平行于同一平面，称 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面. 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行，则三向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件为存在惟一实数对 λ、μ，(图 5.2-7)**使**

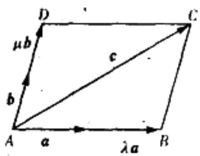

图 5.2-7

$$c = \lambda a + \mu b.$$

(读者自己证)

5.2.3 向量的分解与坐标

为了实现向量加法与数乘的代数化运算，我们把向量按三个坐标轴方向分解.

设有向量 $\boldsymbol{a}$，起点为原点，终点为 M，M 的坐标为 (x,y,z). 过 M 作三坐标轴的垂直平面，分别交 x 轴于 A、交 y 轴于 B，交 z 轴于 C，垂直平面在 xOy 平面上交于一点 P，则

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC},$$

$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$分别称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴三坐标轴上的分向量.

现在，在 x 轴、y 轴、z 轴上分别取一与坐标轴方向一致的三个单位向量，记为 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，它们称为基本单位向量，易知：$\overrightarrow{OA}=x\,\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OB}=y\,\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OC}=z\,\boldsymbol{k}$，于是

$$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \tag{5.2.2}$$

(5.2.2)称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标分解式，其中 x、y、z 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，它们是向量 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的投影(图 5.2-8). 当 $\boldsymbol{a}$ 的起点为原点 O 时，$\boldsymbol{a}$ 的坐标即为 $\boldsymbol{a}$ 的终点 M 的坐标.

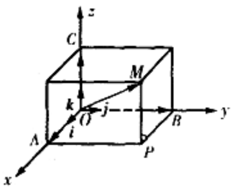

图 5.2-8

任一向量 $\boldsymbol{a}$ 与其坐标是一一对应的，因此向量 $\boldsymbol{a}$ 也可用它的坐标来表示. (5.2.2)可以写成

$$\boldsymbol{a} = \{x,y,z\}.$$

例 1 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$为已知两点，求向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标表示式.

解　$\overrightarrow{OM_1}=\{x_1,y_1,z_1\}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$,

$\overrightarrow{OM_2}=\{x_2,y_2,z_2\}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$.

于是,由向量运算的性质,得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}&=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}-x_1\boldsymbol{i}-y_1\boldsymbol{j}-z_1\boldsymbol{k}\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\\&=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}.\end{aligned}$$

从例1看到起点不在原点的向量,其坐标为向量终点与起点的对应坐标之差(图5.2-9).

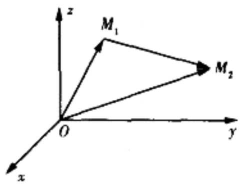

图 5.2-9

在坐标表示下,向量的运算归结为向量坐标的运算.

设$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$,

$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$,

则
$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z\},$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}.$$

向量$\boldsymbol{a}$的模及方向余弦可表示为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \tag{5.2.3}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\\\cos\beta&=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\\\cos\gamma&=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.\end{aligned}\right\} \tag{5.2.4}$$

例2　设有三点$A(1,2,1)$、$B(-1,2,0)$和$C(1,-2,3)$,求(1) $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$,(2) $\overrightarrow{AB}$的模及方向余弦.

解　(1) 因$\overrightarrow{AB}=\{-1-1,2-2,0-1\}=\{-2,0,-1\}$,$\overrightarrow{AC}=\{0,-4,2\}$,$2\overrightarrow{AB}=\{-4,0,-2\}$,$3\overrightarrow{AC}=\{0,-12,6\}$,所以

$2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}=\{-4,0,-2\}-\{0,-12,6\}=\{-4,12,-8\}$.

(2) 因$\overrightarrow{AB}=\{-2,0,-1\}$，由(5.2.3)及(5.2.4)得$\overrightarrow{AB}$的模及方向余弦

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-2)^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{5};$$

$$\cos\alpha=\frac{-2}{\sqrt{5}},\cos\beta=0,\cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{5}}.$$

例 3 已知 $A(1,2,0)$、$B(0,2,4)$及 $C(0,0,3)$. 求$\triangle ABC$ 的重心坐标.

解 如图 5.2-10. 设 D、E 分别是 BC、AC 的中点，则 AD 与 BE 的交点 G 为$\triangle ABC$ 的重心. 由平面几何知道，$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$，而

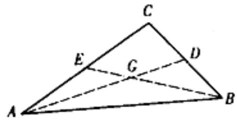

图 5.2-10

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}CB=\{-1,-2,3\}+\frac{1}{2}\{0,2,1\}$$

$$=\{-1,-1,\frac{7}{2}\}.$$

故 $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG}=\{1,2,0\}+\frac{2}{3}\{-1,-1,\frac{7}{2}\}=\{\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\}$，所以$\triangle ABC$ 重心的坐标为$(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3})$.

例 4 作用于一质点的两个力为$\boldsymbol{F}_1=\{-1,2,-3\}$，$\boldsymbol{F}_2=\{4,1,3\}$，求作用力的合力的大小与方向.

解 因 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=\{-1,2,-3\}+\{4,1,3\}=\{3,3,0\}$，所以由公式(5.2.3)及(5.2.4)得

$$|\boldsymbol{F}|=3\sqrt{2},$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}},\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}},\cos\gamma=0,$$