

高等数学

练习册

G A O D E N G S H U X U E L I A N X I C E

余宏杰 编

安徽大学出版社

高等数学练习册

余宏杰 编

安徽大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学练习册 / 余宏杰编. —合肥:安徽
大学出版社, 2006. 9
ISBN 7-81110-197-1

I. 高... II. 余... III. 高等数学—高等
学校—习题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 098983 号

高等数学练习册

余宏杰 编

出版发行	安徽大学出版社	印刷	中国科学技术大学印刷厂
	(合肥市肥西路 3 号 邮编 230039)	开本	787×960 1/16
联系电话	编辑室 0551-5108458	印张	8
	发行部 0551-5107784	字数	130 千
责任编辑	徐建 鲍家全	版次	2006 年 9 月第 1 版
封面设计	孟献辉	印次	2006 年 9 月第 1 次印刷
经 销	新华书店		

ISBN 7-81110-197-1/O · 58

定价 9.50 元

如有影响阅读的印装质量问题,请与出版社发行部联系调换

目 录

第一章 函数与极限	1
第一节 函数	1
第二节 初等函数	2
第三节 数列的极限	2
第四节 函数的极限	3
第五节 无穷小与无穷大	4
第六节 极限运算法则	5
第七节 极限存在准则,两个重要极限	6
第八节 无穷小的比较	8
第九节 函数的连续性与间断点	9
第十节 连续函数的运算与初等函数的连续性	10
第十一节 闭区间上连续函数的性质	11
总习题	11
第二章 导数与微分	14
第一节 导数概念	14
第二节 函数的和、差、积、商的求导法则	16
第三节 反函数的导数、复合函数的求导法则	17
第四节 隐函数的导数	18
第五节 高阶导数	19
第六节 隐函数的导数,由参数方程所 确定的函数的导数相关变化率	20
第七节 函数的微分	22
总习题	23

第三章 中值定理与导数的应用	26
第一节 中值定理	26
第二节 洛必达法则	27
第三节 泰勒公式	28
第四节 函数单调性的判别法	28
第五节 函数的极值及其求法	29
第六节 最大值、最小值问题	31
第七节 曲线的凹凸与拐点	32
第八节 函数图象的描绘	33
总习题	33
第四章 不定积分	36
第一节 不定积分的概念与性质	36
第二节 换元积分法	37
第三节 分部积分法	39
总习题	40
第五章 定积分	42
第一节 定积分的概念	42
第二节 定积分的性质、中值定理	42
第三节 微积分的基本公式	43
第四节 定积分换法	45
第五节 定积分的分部积分法	47
第七节 广义积分	48
总习题	49
第六章 定积分的应用	52
第二节 平面图形的面积	52
第三节 体积	53
第四节 平面曲线的弧长	54
总习题	55
第七章 空间解析几何与向量代数	57
第一节 空间直角坐标系	57

第二节	向量及其加法, 向量与数的乘法	58
第三节	向量的坐标	58
第四节	数量积、向量积	59
第五节	曲面及其方程	60
第六节	空间曲线及其方程	61
第七节	平面及其方程	62
第八节	空间及其方程	63
第九节	二次曲面	65
总习题		66
第八章	多元函数微分法及其应用	69
第一节	多元函数的基本概念	69
第二节	偏导数	70
第三节	全微分及其应用	71
第四节	多元复合函数的求导法则	72
第五节	隐函数的求导法则	73
第六节	微分法在几何上的应用	75
第七节	微分法在物理上的应用	76
第八节	多元函数的极值及其求法	77
总习题		78
第九章	重积分	81
第一节	二重积分的概念与性质	81
第二节	二重积分的计算法	81
第三节	二重积分的应用	85
第四节	三重积分的概念及其计算法	85
第五节	利用柱面坐标和球面坐标计算三重积分	87
复习题		89
第十章	曲线积分与曲面积分	91
第一节	对弧长的曲线积分	91
第二节	对坐标的曲线积分	92
第三节	格林公式及其应用	93
第四节	对面积的曲面积分	95

第五节 对坐标的曲面积分	96
第六节 高斯公式	97
总习题	98
第十一章 无穷级数	101
第一节 常数项级数的概念与性质	101
第二节 常数项级数的审敛法	102
第三节 幂级数	104
第四节 函数展开成幂级数	105
第五节 傅立叶级数	106
总习题	107
第十二章 微分方程	110
第一节 微分方程的基本概念	110
第二节 可分离变量的微分方程	111
第三节 齐次方程	112
第四节 一阶线性微分方程	113
第五节 全微分方程	115
第七节 可降阶的高阶微分方程	116
第八节 高阶线性微分方程	117
第九节 二阶常系数齐次线性微分方程	117
第十节 二阶常系数非齐次线性微分方程	119
总习题	120

第二章 函数

第一章

函数与极限

第一节 函数

1. 函数 $y = \begin{cases} x^2 - 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 + 1 & -1 \leq x < 0 \end{cases}$ 的反函数 $x = \varphi(y) =$ _____,
即 $y = \varphi(x) =$ _____.

2. 试证: 定义在对称区间 $(-l, l)$ 上的任意函数 $f(x)$ 均可表示为一个奇函数与一个偶函数之和.

3. 设 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 及 $f(x)$ 是单调增函数, 且 $\varphi(x) < f(x) < \psi(x)$. 证明: $\varphi[\varphi(x)] < f[f(x)] < \psi[\psi(x)]$.

第三章 数列

1. 设 x_n 是实数, $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n})$, 证明: x_n 收敛.

2. 设 x_n 是实数, $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n})$, 证明: x_n 收敛.

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{x_n^2} \right)$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right)$$

第二节 初等函数

1. 设 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $x \neq -1$, 则 $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(-x) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(x+1) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(x^{-1}) = \underline{\hspace{2cm}}$, $(f(x))^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 0)$, 则下列函数()的定义域是 $(0, 1)$.

(a) $f(x^{-1})$ (b) $[f(x)]^2$ (c) $f(-x)$ (d) $f(x-1)$

3. 设 $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| = 1 \\ -1 & |x| > 1 \end{cases}$, $g(x) = e^x$, 则 $f[g(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$,

$g[f(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 一球的半径为 r , 作外切于球的圆锥, 试将其体积 V 表示为高 h 的函数, 并指明定义域.

5. 证明: $\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}$.

第三节 数列的极限

1. 观察下列数列的变化趋势, 用线将其与相应结果连接起来.

1) $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

(a) 极限为 1

2) $x_n = 1 + (-1)^n$

$$3) x_n = n \sin \frac{n\pi}{2}$$

(b) 极限为 0

$$4) x_n = \begin{cases} \frac{2^n - 1}{2^n} & n \text{ 为奇数} \\ \frac{2^n + 1}{2^n} & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

(c) 极限不存在

2. 根据数列极限的定义证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+1} = \frac{3}{2}$.

3. 设数列 x_n 有界, 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$.

第四节 函数的极限

1. 根据函数极限的定义证明: $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1-4x^2}{2x+1} = 2$.

2. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{x^2+3} = 1$, 问 X 等于多少, 可使 $|x| > X$ 时有

$$\left| \frac{x^2-1}{x^2+3} - 1 \right| < 0.01 \text{ 成立?}$$

3. 设 $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x-1} & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x & 0 < x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$, 则 $f(0-0) = \underline{\hspace{2cm}}$,
 $f(0+0) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(1-0) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(1+0) = \underline{\hspace{2cm}}$,
 问 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 是否存在?

第五节 无穷小与无穷大

1. 根据定义证明: $y = x \sin$ 当 $x \rightarrow 0$ 时为无穷小.

2. 函数 $y = x \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是否有界? 又当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 这个函数是否为无穷大? 为什么?

3. 函数 $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时极限存在吗? 何时是无穷大? 何时是无穷小?

第六节 极限运算法则

1. 计算下列极限.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^n}}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^n}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+n} \right)$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(x + \frac{2}{n} \right) + \left(x + \frac{4}{n} \right) + \cdots + \left(x + \frac{2n}{n} \right) \right]$$

2. 计算下列极限.

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x}$$

第七节 极限存在准则, 两个重要极限

1. 计算下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} x \cot x$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$$

2. 计算下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{3x}$$

3. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b\right) = 0$, 求 a, b .

4. 利用极限存在准则证明极限或求极限.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + \pi} + \frac{n}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n\pi}\right) = 1$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n}\right)$$

(4) 设数列 $\{x_n\}$ 由下式给出: $x_0 > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n})$ ($n=1, 2, \dots$), 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求其极限值.

第八节 无穷小的比较

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 将下列所给无穷小与其相应的结论用线连接起来.

(1) $x^4 + \sin 2x$

(a) 是比 x 低阶的无穷小

(2) $1 - \cos 2x$

(b) 是比 x 高阶的无穷小

(3) $\frac{2}{\pi} \left[\cos \frac{\pi}{2}(1-x) \right]$

(c) 是与 x 同阶的无穷小, 但不等价

(4) $x^{-\frac{1}{2}} \sin x$

(d) 是 x 的等价无穷小

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列四个无穷小中, () 是比其他三个更高阶的无穷小. 为什么?

(a) x^2

(b) $1 - \cos x$

(c) $\sqrt{1-x^2} - 1$

(d) $\tan x - \sin x$

3. 利用等价无穷小的性质, 求下列极限.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-3x)}{\sin x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax + x^2}{\tan bx}, b \neq 0$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}$

第九节 函数的连续性与间断点

1. 设函数 $f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$, 则 $f(0-0) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(0+0) = \underline{\hspace{2cm}}$, 故 $x=0$ 是函数的第 $\underline{\hspace{2cm}}$ 类间断点.

2. 讨论函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}} x$ 的连续性, 若有间断点, 判别其类型.

3. 下列函数在指出的点处间断, 说明这些间断点属哪一类, 如果是可去间断点, 则补充或改变函数的定义使它连续.

$$(1) y = \frac{x}{\tan x}, x = k\pi, x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$(2) y = \begin{cases} x-1 & x \leq 1 \\ 3-x & x > 1 \end{cases}, x=1$$

第十节 连续函数的运算与初等函数的连续性

1. 函数 $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 + x - 6}$ 的连续区间是_____.

2. 求下列极限.

$$(1) \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \cos \alpha}}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin(\sqrt{x^2 + x} - x)$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + ax)}{x}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \text{ (提示: 令 } t = e^x - 1 \text{)}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \tan^2 x)^{\cos^2 x}$$

3. 设 $f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ x^2 + ax + b & x \geq 0 \end{cases}$, 应怎样选取数 a, b , 才能使 $f(x)$

处处连续?