高等数学

练习册

GAODENG SHUXUE LIANXICE

余宏杰 编

安徽大学出版社

高等数学练习册

余宏杰　编

安徽大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学练习册/余宏杰编.—合肥:安徽大学出版社,2006.9
ISBN 7-81110-197-1

Ⅰ.高... Ⅱ.余... Ⅲ.高等数学—高等学校—习题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 098983 号

高等数学练习册 余宏杰 编

出版发行	安徽大学出版社 (合肥市肥西路 3 号 邮编 230039)	印　刷	中国科学技术大学印刷厂
联系电话	编辑室 0551-5108458 发行部 0551-5107784	开　本	787×960 1/16
		印　张	8
		字　数	130 千
责任编辑	徐　建　鲍家全	版　次	2006 年 9 月第 1 版
封面设计	孟献辉	印　次	2006 年 9 月第 1 次印刷
经　销	新华书店		

ISBN 7-81110-197-1/O·58　　定价 9.50 元

如有影响阅读的印装质量问题,请与出版社发行部联系调换

目录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章

函数与极限

第一节 函 数

1. 函数 $y=\begin{cases}x^2-1 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x^2 & -1\leqslant x<0\end{cases}$ 的反函数 $x=\varphi(y)=$____________，即 $y=\varphi(x)=$____________.

2. 试证：定义在对称区间$(-l,l)$上的任意函数 $f(x)$均可表示为一个奇函数与一个偶函数之和.

3. 设 $\varphi(x)$，$\psi(x)$及 $f(x)$是单调增函数，且 $\varphi(x)<f(x)<\psi(x)$. 证明：$\varphi[\varphi(x)]<f[f(x)]<\psi[\psi(x)]$.

第二节　初等函数

1. 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}, x\neq -1$，则 $f(0)=$ ________，$f(-x)=$ ________，$f(x+1)=$ ________，$f(x^{-1})=$ ________，$(f(x))^{-1}=$ ________.

2. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,0)$，则下列函数（　　）的定义域是 $(0,1)$.

(a) $f(x^{-1})$　　(b) $[f(x)]^2$　　(c) $f(-x)$　　(d) $f(x-1)$

3. 设 $f(x)=\begin{cases} 1 & |x|<1 \\ 0 & |x|=1 \\ -1 & |x|>1 \end{cases}$，$g(x)=e^x$，则 $f[g(x)]=$ ________，$g[f(x)]=$ ________.

4. 一球的半径为 r，作外切于球的圆锥，试将其体积 V 表示为高 h 的函数，并指明定义域.

5. 证明：$\operatorname{sh}x+\operatorname{sh}y=2\operatorname{sh}\dfrac{x+y}{2}\operatorname{ch}\dfrac{x-y}{2}$.

第三节　数列的极限

1. 观察下列数列的变化趋势，用线将其与相应结果连接起来.

1) $x_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$　　　　(a) 极限为 1

2) $x_n=1+(-1)^n$

3) $x_n = n\sin\frac{n\pi}{2}$　　　　(b)极限为 0

4) $x_n = \begin{cases} \frac{2^n-1}{2^n} & n\text{ 为奇数} \\ \frac{2^n+1}{2^n} & n\text{ 为偶数} \end{cases}$　　　　(c)极限不存在

2. 根据数列极限的定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$.

3. 设数列 x_n 有界，又 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n y_n=0$.

第四节　函数的极限

1. 根据函数极限的定义证明：$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

2. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+3}=1$，问 X 等于多少，可使 $|x|>X$ 时有 $\left|\frac{x^2-1}{x^2+3}-1\right|<0.01$ 成立？

3. 设 $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{x-1} & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x & 0<x<1 \\ 1 & 1\leqslant x\leqslant 2 \end{cases}$，则 $f(0-0)=$__________，

$f(0+0)=$__________，$f(1-0)=$__________，$f(1+0)=$

__________，问 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 是否存在？

第五节　无穷小与无穷大

1. 根据定义证明：$y=x\sin$ 当 $x\to 0$ 时为无穷小.

2. 函数 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是否有界？又当 $x\to+\infty$ 时，这个函数是否为无穷大？为什么？

3. 函数 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$，当 $x\to 0$ 时极限存在吗？何时是无穷大？何时是无穷小？

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第六节 极限运算法则

1. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^n}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\left(x+\dfrac{2}{n}\right)+\left(x+\dfrac{4}{n}\right)+\cdots+\left(x+\dfrac{2n}{n}\right)\right]$

2. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$

第七节　极限存在准则，两个重要极限

1. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot x$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$

2. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{3x}$

3. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求 a,b.

4. 利用极限存在准则证明极限或求极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+\pi}+\frac{n}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{n}{n^2+n\pi}\right)=1$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$

(4)设数列$\{x_n\}$由下式给出：$x_0>0$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{1}{x_n})(n=1,2,\cdots)$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求其极限值.

第八节 无穷小的比较

1. 当$x\to 0$时，将下列所给无穷小与其相应的结论用线连接起来.

(1)$x^4+\sin 2x$ (a)是比x低阶的无穷小

(2)$1-\cos 2x$ (b)是比x高阶的无穷小

(3)$\frac{2}{\pi}\left[\cos\frac{\pi}{2}(1-x)\right]$ (c)是与x同阶的无穷小，但不等价

(4)$x^{-\frac{1}{2}}\sin x$ (d)是x的等价无穷小

2. 当$x\to 0$时，下列四个无穷小中，(　　)是比其他三个更高阶的无穷小. 为什么？

(a)x^2 (b)$1-\cos x$ (c)$\sqrt{1-x^2}-1$ (d)$\tan x-\sin x$

3. 利用等价无穷小的性质，求下列极限.

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-3x)}{\sin x}$ (2)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax+x^2}{\tan bx},b\neq 0$

(3)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$ (4)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$

第九节 函数的连续性与间断点

1. 设函数 $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$,则 $f(0-0)=$____________,$f(0+0)=$____________,故 $x=0$ 是函数的第____________类间断点.

2. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性,若有间断点,判别其类型.

3. 下列函数在指出的点处间断,说明这些间断点属哪一类,如果是可去间断点,则补充或改变函数的定义使它连续.

(1) $y=\dfrac{x}{\tan x}$, $x=k\pi$, $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

(2) $y=\begin{cases} x-1 & x\leq 1 \\ 3-x & x>1 \end{cases}$, $x=1$

第十节 连续函数的运算与初等函数的连续性

1. 函数 $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$ 的连续区间是________.

2. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{\alpha\to+0}\dfrac{\alpha}{\sqrt{1-\cos\alpha}}$

(2) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arcsin(\sqrt{x^2+x}-x)$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+ax)}{x}$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}$(提示:令 $t=e^x-1$)

(6) $\lim\limits_{x\to0}(1+3\tan^2x)^{\cos^2x}$

3. 设 $f(x)=\begin{cases}e^x & x<0\\ x^2+ax+b & x\geqslant0\end{cases}$,应怎样选取数 a,b,才能使 $f(x)$ 处处连续?

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com