高等学校教材

# 传递原理及其应用

裘俊红　编著

化学工业出版社

浙江工业大学专著与研究生教材出版基金资助

高等学校教材

# 传递原理及其应用

裘俊红　编著

化学工业出版社

·北京·

**图书在版编目（CIP）数据**

传递原理及其应用/裘俊红编著. —北京：化学工业出版社，2006.8
高等学校教材
ISBN 7-5025-8761-6

Ⅰ.传…　Ⅱ.裘…　Ⅲ.能量传递-高等学校-教材
Ⅳ.TK124

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 109788 号

高等学校教材
**传递原理及其应用**
裘俊红　编著
责任编辑：徐雅妮　唐旭华
文字编辑：丁建华
责任校对：陶燕华
封面设计：张　辉
*
化学工业出版社出版发行
（北京市朝阳区惠新里 3 号　邮政编码 100029）
购书咨询：(010)64982530
(010)64918013
购书传真：(010)64982630
http://www.cip.com.cn
*
新华书店北京发行所经销
化学工业出版社印刷厂印装
开本 787mm×1092mm　1/16　印张 12¾　字数 307 千字
2007 年 1 月第 1 版　　2007 年 1 月北京第 1 次印刷
ISBN 7-5025-8761-6
定　价：22.00 元

# 前　言

本书是作者历经10年的精心之作，体现了作者在多年的教学和科研工作中对传递知识的理解，因而自成一个严密而独有的体系。本书着重于各相关专业所需的基础知识的启迪，深入浅出，循序渐进，便于学习。

动量、热量和质量三类传递在自然界、工程领域以及人们的日常生活中普遍存在。三类传递尽管在传递的对象上各不相同，但是在传递机理、传递模型、传递规律等方面存在着相似性。传递内容非常广泛，对于如何编排这个首要问题，Bird等在其名著Transport Phenomena的绪论部分用一个表格给出了两种答案。这种分行、列体系的编排方式几乎被推崇为经典，此后出版的各类传递书籍都照此组织内容。审视这种编排方式，作者认为，它把传递内容按传递对象和传递类型进行了划分，至于这些内容中哪些是概念、哪些是理论、哪些是方法、哪些是基础、哪些是重点等一系列的问题，未能给以清晰而明确的解答。

有鉴于此，本书首先在传递内容的编排方式上进行了新的探索。根据三类传递之间的类似性，本书用统一的观点和方式阐述三类传递。通过将传递内容定性成原理和应用两大类，本书把传递知识体系构造成原理和应用两大部分。原理部分着重阐述传递的基本概念、基础方程和研究方法，分7章介绍传递的基本术语和涉及的流体力学概念、理想流体的Euler运动方程及Bernoulli方程、传递机理及传递速率、连续性方程、黏性流体运动方程、黏性流体能量方程、传递研究方法等。应用部分详细介绍运用传递原理解决一些典型传递问题的过程以及对应的传递规律，分6章列举简单流场内的稳态层流、绕圆球的小Reynolds数爬流和绕圆柱的大Reynolds数势流、湍流、边界层流动、强制对流传热、强制对流传质等问题。这种编排使得内容范围非常明确，结构层次极为分明。原理部分是应用部分的理论基础，也是本书的灵魂。应用部分是原理部分的具体实践，旨在加深对传递原理的理解，培养问题求解的能力。两部分内容在本书中的地位显然有高低之分，不再等同。这种区分也就突出了重点。

科学技术的飞速发展促使学科间的广泛交叉和融合。与此相对应，专业范围不断拓展，专业知识相互渗透，要求掌握传递知识的专业也越来越多。有关传递知识的课程日益受到重视，正在成为许多工程专业必修或选修的专业基础课。为此，本书又在传递内容的选择取舍上制定出新的原则：面向不同专业的需要，着重共性知识，淡化专业特点，精简内容，适应21世纪高等教育的要求。由于传递多是在流体运动过程中进行的，而流体力学主要研究流体处于运动状态时的力学规律，所以传递与流体力学是紧密相关的。作者抽取出传递所涉及的流体力学的基本概念，并把它增补为传递原理的重要组成部分。这也是本书的创新之处。

本书对概念的阐述力求明确、清楚。尽量避免使用复杂的符号表示系统和定量描述工具，注重于采用简单的数学处理方法。本书的写作风格力求精练、统一。此书作为讲义在本科生和研究生教学中试用多年，数易其稿使得内容、体系更臻完善。所有这些创新性尝试和努力旨在消除学生中长期存在的传递课程难学的印象，在教学中收到了很好的效果。

在此要特别感谢我的家人在本书的编写过程中所给予的大力支持、理解和帮助，是她们的精神力量一直激励着我完成了这本历经10年的精心之作。

作者还要感谢浙江大学何潮洪教授为本书审稿。感谢研究生董树杰、陈万里和博士后沈江南为本书付出的劳动。对于在本书的编著过程中给予关心和支持的计建炳教授、阮慧敏老师以及徐根祥先生和张云灵女士也一并致谢。

编著者

2006年6月

# 目　录

## 上篇　原　理

# 下篇　应　　用

# 上篇 原 理

## 第1章 基本概念

### 1.1 传递基本术语

（1）传递、传递现象和传递过程

当一物系（或称系统）的某个或某些宏观物理性质（主要是强度性质）如速度、压力、温度、浓度等在物系中分布不均匀时，则称该物系处于一种不平衡的状态。对于一个处于非平衡状态的物系，若无特定的阻力因素，必定存在着某个或某些物理量由高强度区向低强度区的所谓转移。物理量的这种转移称做“传递”；物系中存在的这种转移现象称做“传递现象”。物理量由高强度区向低强度区转移的过程称做“传递过程”。

（2）动量传递、热量传递和质量传递

在本书中，传递的物理量仅限于动量、热量和质量三种。动量传递是指动量在与流体运动相垂直的方向上由高速度区向低速度区的转移。热量传递是指热量由高温度区向低温度区的转移。质量传递是指物系中一个或数个组分由高浓度区向低浓度区的转移。由上可见，产生动量、热量和质量传递的直接原因是物系内部存在着速度、温度和浓度梯度。

### 1.2 流体力学概念

本书重点关注运动流体中所发生的传递现象。这类传递现象与自然界和许多工程领域中经常遇到的传递问题相对应。研究此类传递现象必然离不开对流体运动规律的认识。流体力学是研究流体处于静止和运动状态时的力学规律的一门学科。这就是说，传递与流体力学是紧密相关的。为此，本书系统地归纳了传递所涉及的流体力学基本概念。掌握这些概念对于正确理解传递规律是十分必要的。本书把这些概念作为传递基本概念的重要组成部分，并在本章中扼要地阐述。

#### 1.2.1 流体的概念、特性和类型

（1）流体概念

凡是没有固定形状且易于运动的物质统称为流体。流体包括液体和气体。流体和固体在微观结构上的区别是流体分子间的距离较大（特别是气体），故流体分子间的内聚力较小。

（2）流体特性

与传递有关的流体宏观特性主要有流体的易流动性、黏性和压缩性。

① 易流动性　流体在静止时不能承受切向上的力。不管是多小的切向力，只要持续地施加于流体，都能使它发生连续不断的变形。流体的这种宏观力学性质称为易流动性。

② 黏性 流体在静止时虽不能承受切向力，但在运动时对流体内部的两相邻流体层间的相对运动（导致变形）却是有抵抗的。流体的这种抵抗变形的性质称为流体的黏性。在运动流体内部所呈现出的这种抗力称为黏性力，也称做剪切力或内摩擦力。

③ 压缩性 流体在压力的作用下发生体积缩小变化的性质称为流体的压缩性。

所有流体都是可以压缩的，其压缩程度取决于流体的性质及外界条件。液体在常规压力作用下的压缩性很小，因此，液体通常被看成是不可压缩的。气体的压缩性要比液体大得多，所以在一般情况下应当被看做是可压缩的。

（3）流体类型

① 理想流体和黏性液体 从黏性的角度出发，可以将流体分成理想流体和黏性流体两类。

当流体的黏性较小（工程上最常见的流体如空气、水等的黏性都是很小的），流体层间的相对运动速度也不大时，所对应的黏性力比起其他类型的力如惯性力可以忽略不计。此时为处理问题的方便，可以近似地把流体看成是无黏性的。凡是可以忽略黏性或假定没有黏性的流体，称做理想流体。很显然，理想流体对于切向变形没有任何抵抗能力。凡是不能忽略黏性的流体，叫做黏性流体，又称为真实流体。

② 不可压缩流体和可压缩流体 前已叙及，流体的压缩性表现为流体的体积或者说是密度随压力变化的情况。在流体力学中，为了研究方便，根据流动过程中密度的变化情况将流体分成不可压缩流体和可压缩流体两类。

将密度在运动过程中保持不变的流体称做不可压缩流体。将密度在运动过程中发生显著变化的流体称做可压缩流体。对于液体，在大多数情况下，流动过程中的压力变化还不足以引起密度的显著变化，所以通常将液体看做是不可压缩流体。对于气体，通常应看做是可压缩流体。但是，如果流动过程中的压力变化不大，为处理问题方便起见，亦将气体亦近似看做是不可压缩流体。

上述从黏性和压缩性对流体进行的分类是为了便于处理流动问题。需要说明的是，真正的理想流体和不可压缩流体在实际中是不存在的，它只是真实流体的两种近似模型。

### 1.2.2 流体的连续介质模型

众所周知，所有流体都是由分子组成的，分子之间存在着间隙。这些分子在无休止地做不规则的热运动，相互间因频繁碰撞而不断地交换着动量和能量。因此，表征流体分子微观运动状态的一些物理量（如速度、动量、能量等）在时间上呈现出随机性，在空间上呈现出离散性。

流体力学关心的并不是个别分子的微观运动状态，它所着重研究的是由大量分子组成的流体的宏观运动规律，即研究表征流体运动状态和特性的物理量（统称为流动参数，如速度、压力、温度、密度、浓度等）在时间和空间上的分布以及这些流动参数相互间的影响关系。流体的宏观运动规律事实上是大量分子的微观运动状态的综合体现。研究的方法有两种，一种是统计物理的方法，即从分子的微观结构和运动出发，做出各种假设，采用统计平均的方法建立流动参数应满足的方程。但由于真实流体及其流动的复杂性，统计物理的方法通常难以提供满意的结果。另一种方法是以连续介质模型为基础，认为流体由连续分布的质点组成，质点的运动服从自然界中一切物质运动所普遍遵循的基本物理定律，质点的运动特性代表流体的运动规律。这种由 Euler（欧拉）提出的连续介质模型被广泛使用，成为流体力学的基础。虽然如此，统计物理处理问题的方法和结果对于揭示传递现象的本质还是很有

帮助的，因为它试图从微观导出宏观，从而深刻地剖析微观和宏观之间的内在联系。

连续介质模型概括起来有如下两点主要的含义。

① 流体由质点组成。所谓流体质点是指微观上充分大、宏观上充分小的流体分子团。一方面，分子团的线尺度和分子运动的尺度（即分子运动平均自由程）相比应足够大，使得其中包括有大量的分子，因而可以应用统计平均的方法得到稳定的流动参数值。另一方面又要求分子团的尺度和流体运动空间的尺度相比要充分地小，小到在此分子团内，各流动参数都可看成是均匀分布的常量，以至于在数学上可以把它当作一个点来处理。

② 流体质点稠密、无间隙地充满整个流动空间。有了连续介质模型，在研究流动问题时，就可以把一个本来是离散分布的流体分子的运动问题近似为连续分布的流体质点的运动问题。这样，流体的流动参数就可看成是空间坐标和时间的连续函数，从而便于数学分析。

### 1.2.3 流场与描述流场内流体运动的方法

（1）流场

从几何观点而言，流场为流体运动空间的总称。根据连续介质模型，流场中充满着连续不断的流体质点，每一质点都具有表征其运动状态和特性的物理量，如速度、压力、温度、密度、浓度等。因而在流场中必然形成各流动参数连续分布的场，如速度场、压力场、温度场、密度场、浓度场等。从场的观点而言，流场即为这些矢量场和标量场的总和。

（2）流体运动的描述方法

在研究流场内的流动规律时，首先要解决的问题是用什么方法来描述流体的运动。流体力学中采用两种不同的方法即 Lagrange（拉格朗日）法和 Euler 法来描述流体的运动。

① Lagrange 法　这是理论力学中质点系运动描述方法在流体力学中的一种自然延伸。对质点系运动的描述是通过分别描述每一个质点的运动即其空间位置随时间变化的过程来实现的。设一个由 $n$ 个质点组成的质点系，它相对于某一选定的坐标系（如直角坐标系）而运动。可用如下方程组来描述质点系的运动

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(t) \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{1-1a}$$

式中，$\boldsymbol{r}_i$ 是第 $i$ 个质点的位置矢量，也叫矢径；$t$ 为时间。在直角坐标系中，式(1-1a)可表示成

$$\begin{cases} x_i=x_i(t) \\ y_i=y_i(t) \qquad i=1,2,\cdots,n \\ z_i=z_i(t) \end{cases} \tag{1-1b}$$

式中，$x_i$、$y_i$、$z_i$ 是第 $i$ 个质点位置矢量 $\boldsymbol{r}_i$ 的 3 个坐标分量。

与上述方法相类似，Lagrange 法通过分别描述每一个流体质点的运动来描述流体的运动（因为连续介质模型假设流体由流体质点组成）。也可形象地设想成一个个观察者跟随着一个个流体质点一起运动，在运动过程中观察其空间位置和流动参数的变化情况。对于一个确定的流体质点而言，这些物理量都只是时间的函数；对于不同的流体质点，它们又各不相同。因此，Lagrange 法描述流体的运动，就是把流动参数看成随时间和流体质点变化。这样就提出了如何区分流体质点的问题。由于流体质点是一个虚拟的实体，本身没有明确的区别特征，所以采用和质点系运动相似的数字编号区分的方法（把流体质点编号成 1,2,3,…）显然是不实际的。Lagrange 提出的下述方法解决了这个问题。

设有一运动流体，在某一初始时刻 $t_0$，每个流体质点在流场中占有的位置可用坐标（$a$,$b$,$c$）表示（一般地，$a$、$b$、$c$ 可以是任意空间曲线坐标）。这样，给定一组（$a$,$b$,$c$），就有

一个流体质点与其相对应，它就是在时刻 $t_0$ 处于 $(a,b,c)$ 这个空间点的那个流体质点。反之，给定一个流体质点，就有唯一的一组 $(a,b,c)$ 与之对应，即该流体质点在 $t_0$ 时刻所占空间位置的坐标。这样就可结合流体质点所处的空间位置对它们进行一一区分，用一组 $(a,b,c)$ 作为流体质点的位置编号。Lagrange 法就是把表征流体运动状态和特性的诸物理量看成是时间和流体质点位置编号的函数。因此，对于流体的运动，式(1-1a) 可改写成

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(a,b,c,t) \tag{1-2a}$$

式(1-2a) 在直角坐标系中的表示式为

$$\begin{cases} x=x(a,b,c,t) \\ y=y(a,b,c,t) \\ z=z(a,b,c,t) \end{cases} \tag{1-2b}$$

式中，$\boldsymbol{r}$ 和 $x$、$y$、$z$ 分别表示在时刻 $t_0$ 位于 $(a,b,c)$ 处的流体质点在 $t$ 时刻所处空间位置的矢径和矢径的坐标分量。如果 $(a,b,c)$ 是一组定值，则上式代表某一确定流体质点的运动规律。反之，若 $t$ 取定值而 $(a,b,c)$ 改变，则上式表示在确定时刻 $t$ 不同流体质点的空间位置的分布情况。这就表明上式描述了流场中所有流体质点其空间位置的变化规律。根据上式也可确定流场中所有流体质点的速度及加速度的变化情况。总之，式(1-2) 完全确定了流场中的一种整体的运动学规律，并将式中的 $a$，$b$，$c$，$t$ 称为 Lagrange 变数。概括地说，Lagrange 法着眼于流体质点，它要设法描述出每个流体质点自始至终的运动过程，即它们的空间位置随时间变化的规律。

流体质点速度矢量的定义是该质点的空间位置即矢径随时间的变化率，在 Lagrange 法中由式(1-3a) 表示

$$\boldsymbol{u}=\frac{\partial \boldsymbol{r}(a,b,c,t)}{\partial t} \tag{1-3a}$$

上式在直角坐标系中的表达式为

$$\begin{cases} u_x=\dfrac{\partial x(a,b,c,t)}{\partial t} \\ u_y=\dfrac{\partial y(a,b,c,t)}{\partial t} \\ u_z=\dfrac{\partial z(a,b,c,t)}{\partial t} \end{cases} \tag{1-3b}$$

式中，$u_x$、$u_y$、$u_z$ 分别表示 $x$、$y$、$z$ 方向上的速度分量。

流体质点加速度矢量的定义是该质点的速度矢量随时间的变化率，在 Lagrange 法中由式(1-4a) 给出

$$\boldsymbol{a}=\frac{\partial \boldsymbol{u}(a,b,c,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}(a,b,c,t)}{\partial t^2} \tag{1-4a}$$

同理写出 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系中的表达式为

$$\begin{cases} a_x=\dfrac{\partial u_x}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 x(a,b,c,t)}{\partial t^2} \\ a_y=\dfrac{\partial u_y}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 y(a,b,c,t)}{\partial t^2} \\ a_z=\dfrac{\partial u_z}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 z(a,b,c,t)}{\partial t^2} \end{cases} \tag{1-4b}$$

② Euler 法　Lagrange 法是通过研究流体质点的运动来描述整个流场的，它似乎是一种很直接、也是很具体的方法。但由于在运动流体中，跟踪流体质点并观察其运动特性是件十分复杂和困难的事情，而且绝大多数的工程流动问题的研究对单个质点的运动并不感兴趣。所以在处理一般的流体力学问题时并不采用这种方法。

Euler 根据工程实验中定点测量流动参数这一事实提出：研究流体的运动，可不去追踪流体质点的运动，只需在流场中的各空间点处观察不同时刻通过的流体质点的运动状态。那么应该用什么物理量来反映各空间点处的流动状况呢？因为在不同的时刻将有不同的流体质点经过某个空间点，所以在这一空间点处无法观察到通过的各个流体质点以前和以后的详细运动情况，也就是无法像 Lagrange 法那样直接描述出流体质点的位置随时间变化的情况。但是，不同时刻经过此空间点的各流体质点的速度是可以测量出来的。所以采用速度矢量来描述空间点处流体的运动状况是很自然的。对于固定的空间点，不同时刻有不同的流体质点通过。一般而言，这些流体质点在通过该空间点时具有不同的速度。因而在该空间点处获得了一个速度随时间变化的规律。对于不同的空间点，变化规律又各不相同。如果在流场的所有空间点处这种速度随时间变化的规律都确定了，那么整个流场中的流动状况也就清楚了。综上所述，流场中的流动状况可由如下的矢量方程描述

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t) \tag{1-5a}$$

式(1-5a) 在直角坐标系中的表达式为

$$\begin{cases} u_x=u_x(x,y,z,t) \\ u_y=u_y(x,y,z,t) \\ u_z=u_z(x,y,z,t) \end{cases} \tag{1-5b}$$

式中，$\boldsymbol{u}$ 和 $u_x$、$u_y$、$u_z$ 分别表示流体的速度矢量及在直角坐标系中的速度分量。当 $x$、$y$、$z$ 固定，$t$ 改变时，式(1-5) 表示某一固定空间点处速度随时间变化的规律。当 $t$ 固定，$x$、$y$、$z$ 改变时，式(1-5) 则表示某一时刻速度（即瞬时速度）在空间分布的规律。这就表明式(1-5) 描述了流场中所有空间点处流体速度的变化规律。根据式(1-5) 也可确定流场中所有空间点处流体加速度的变化规律。总之，式(1-5) 完全确定了流场中的一种整体的运动学规律，并将式中的 $x$、$y$、$z$、$t$ 称为 Euler 变数。概括地说，Euler 法着眼于空间点，它要设法描述出每个空间点处流体速度随时间变化的规律。

现从式(1-5a) 出发求流体质点的加速度。设一流体质点在时刻 $t$ 位于某个矢径为 $\boldsymbol{r}$ 的空间位置处，其速度为 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$。经过一时间段 $\Delta t$ 后，它运动到新的空间位置 $\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}$ 处，此时的速度为 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r},\ t+\Delta t)$。因此在 $\Delta t$ 时间段内，该流体质点的速度变化为

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{u}&=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r},t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)\\ &=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r},t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r},t)-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)\end{aligned} \tag{1-6}$$

由上可见，$\Delta\boldsymbol{u}$ 可人为地分成两部分：第一部分 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r},\ t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r},\ t)$ 相当于假想流体质点停在新位置 $\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}$ 处不动，当时间变化 $\Delta t$ 时由于速度场的非定常性（随时间而变）引起的速度变化，称为“局部变化”；第二部分 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r},\ t)-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},\ t)$ 相当于假想时间 $t$ 保持不变，而流体质点由 $\boldsymbol{r}$ 处运动至 $\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}$ 处时由于速度场的不均匀性（随位置而变）引起的速度变化，称为“对流变化”。由式(1-6) 得流体质点的加速度为

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{u}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}+\Delta \boldsymbol{r},t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}+\Delta \boldsymbol{r},t)}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}+\Delta \boldsymbol{r},t)-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)}{\Delta t}$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}+\Delta \boldsymbol{r},t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}+\Delta \boldsymbol{r},t)}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t}\lim_{\Delta r\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}+\Delta \boldsymbol{r},t)-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)}{\Delta r}\tag{1-7}$$

当 $\Delta \boldsymbol{r}\to 0$ 时，$\boldsymbol{r}+\Delta \boldsymbol{r}\to \boldsymbol{r}$，故式(1-7) 右边第 1 项等于$\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)/\partial t$。式(1-7) 右边第 2 项等于 $u\,\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)/\partial r$，其中 $u$ 表示速度矢量 $\boldsymbol{u}$ 的大小，$\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)/\partial r$ 表示 $\boldsymbol{u}$ 在 $\boldsymbol{r}$ 处沿 $\Delta \boldsymbol{r}$ 方向的方向导数。由场论知识知，$\frac{\partial}{\partial r}=\boldsymbol{r}_0\cdot\nabla$，其中 $\boldsymbol{r}_0$ 为 $\Delta \boldsymbol{r}$ 方向的单位矢量，$\nabla$ 为 Hamilton（哈密顿）算符，在直角坐标系中，$\nabla\equiv\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$。再考虑到 $u\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{u}$，故有

$$\boldsymbol{a}=\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+u(\boldsymbol{r}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\tag{1-8}$$

式中，$\partial \boldsymbol{u}/\partial t$ 称为局部加速度；$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$ 称为对流加速度。

当然，要用 Euler 法完整地描写流场的整体流动规律，只给出速度的变化规律是远远不够的，还需要给出流场中压力、温度、密度等流动参数的变化规律，即

$$\begin{cases}p=p(x,y,z,t)\\T=T(x,y,z,t)\\\rho=\rho(x,y,z,t)\end{cases}\tag{1-9}$$

利用 Euler 法来描述流体的运动，是将流动参数视为空间坐标和时间的函数，得到的结果是一些矢量场和标量场，因而可以广泛应用场论这个强有力的数学工具来研究流动问题。但用 Lagrange 法描述流体运动所得到的不是场，因而不能利用场论这个数学工具研究流动问题。本书采用 Euler 法描述流体的运动。

### 1.2.4 随体导数和不可压缩流体的数学表示

（1）随体导数

流体质点的某流动参数对于时间的变化率称为该流动参数的随体导数或质点导数。

若有以 Lagrange 变数表示的流体质点的某流动参数 $B(a,b,c,t)$，根据定义知，其随体导数即为$\partial B(a,b,c,t)/\partial t$。若有以 Euler 变数表示的流体质点的某流动参数 $B(x,y,z,t)$，根据定义并参照式(1-8) 的推导过程，其随体导数可表示为

$$\frac{\mathrm{D}B}{\mathrm{D}t}=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)B\tag{1-10}$$

式中，$\partial/\partial t$ 表示局部导数或称当地导数；$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)$ 表示对流导数或称迁移导数。在 Euler 法中，随体导数是全导数的特例，是通过跟随流体质点的运动求得的。故为了区别于全导数，通常用算符 $\mathrm{D}/\mathrm{D}t$ 表示随体导数。在直角坐标系中 $\mathrm{D}/\mathrm{D}t$ 可表示成

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial}{\partial t}+u_x\frac{\partial}{\partial x}+u_y\frac{\partial}{\partial y}+u_z\frac{\partial}{\partial z}\tag{1-11}$$

（2）不可压缩流体的数学表示

根据随体导数的概念定义，可给出流体力学中一个极为重要的数学表示式，即不可压缩流体的数学表示式。

根据定义，密度在流动过程中保持不变的流体称为不可压缩流体。换言之，对于不可压缩流体，用 Euler 变数表示的密度的随体导数为零，即

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}=0\tag{1-12}$$

式(1-12) 即为不可压缩流体的数学表示。该式仅表明每个流体质点的密度在运动全过程中保持不变，但是不同质点的密度可以不相同，即流场中的密度分布可以不均匀。只有当流体既是不可压缩同时又是均质时（均质流体的密度不随空间位置而变），流体质点的密度才会处处时时都为同一常数。对于均质不可压缩流体，有

$$\rho=C \tag{1-13}$$

### 1.2.5 流动类型

为了研究的方便，需要对流体的运动进行分类，流动可以从不同的角度进行区分，这里简要介绍几种非常基础的流动类型。

（1）稳态和非稳态流动

按流体的流动参数是否随时间变化，将流动分为稳态（或定常）流动和非稳态（或非定常）流动。

① 稳态流动　流场中任一空间点处流体的全部流动参数都不随时间而变的流动称为稳态（或定常）流动。对于稳态流动，速度、压力、密度等流动参数均与时间无关，仅是空间坐标的函数，即

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(x,y,z) \\ p=p(x,y,z) \\ \rho=\rho(x,y,z) \end{cases} \tag{1-14}$$

② 非稳态流动　流场中任一空间点处流体的部分或全部流动参数随时间而变的流动称为非稳态（或非定常）流动。此时，流场中各空间点处的速度、压力、密度等流动参数部分或全部与时间有关。

（2）一维、二维和三维流动

按流体的流动参数与空间坐标的关系，将流动分为一维、二维和三维流动。

① 一维流动　流体的流动参数仅与一个空间坐标有关的流动称为一维流动。如流动的空间变化单一地沿 $x$ 坐标方向且非稳态，则速度、压力、密度等流动参数是坐标 $x$ 和时间 $t$ 的函数，即

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(x,t) \\ p=p(x,t) \\ \rho=\rho(x,t) \end{cases} \tag{1-15}$$

在实际流动问题中，严格意义上的一维流动是不存在的。但是，若流动参数主要沿一个方向变化，即在与此方向相垂直的另外两个方向上的变化很小，甚至可以忽略这种变化，就可把这样的流动看做一维流动。

② 二维流动　流体的流动参数与两个空间坐标有关的流动称为二维流动。在流体力学中研究得较多的一种二维流动是平面流动。平面流动是指这样的一种流动状态：流场中各空间处的速度都平行于某一固定平面（称流动平面），各流动参数在此平面的垂直方向上无变化。通常设流动平面为 $x$-$y$ 平面，或在柱坐标系中为 $r$-$\theta$ 平面，垂直于该平面的轴为 $z$ 轴。在这样设定的坐标系中，速度的 $z$ 轴分量为零，流动参数与 $z$ 坐标无关，即

$$\begin{cases} u_z=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial z}=0 \end{cases} \tag{1-16}$$

在实际流动问题中，严格意义上的平面流动是不存在的。但是，当流动参数在某一方向