福建名校系列

高中课标教材同步导学丛书

名校学案

人教A版学生用书

数学·必修5

主　　编：陈文强
执行主编：陈文强

共享名校资源，齐奏高考凯歌

《名校学案》编委会　编

福建教育出版社

高中课标教材同步导学丛书

语文（必修1）人教版	英语（必修3）北师大版
语文（必修2）人教版	英语（必修4）北师大版
语文（必修3）人教版	英语（必修5）北师大版
语文（必修4）人教版	思想政治（必修1）人教版
语文（必修5）人教版	思想政治（必修2）人教版
语文（必修第一册）语文社版	思想政治（必修3）人教版
语文（必修第二册）语文社版	思想政治（必修4）人教版
语文（必修第三册）语文社版	物理（必修1）山东科技版
语文（必修第四册）语文社版	物理（必修2）山东科技版
语文（必修第五册）语文社版	物理（选修3-1）山东科技版
数学（必修1）人教A版　学生用书	化学（必修1）山东科技版
数学（必修2）人教A版　学生用书	化学（必修2）山东科技版
数学（必修3）人教A版　学生用书	化学（必修1）苏教版
数学（必修4）人教A版　学生用书	化学（必修2）苏教版
数学（必修5）人教A版　学生用书	历史（必修第一册）人民版
数学（必修1）人教A版　教师用书	历史（必修第二册）人民版
数学（必修2）人教A版　教师用书	历史（必修第三册）人民版
数学（必修3）人教A版　教师用书	历史（必修1）岳麓版
数学（必修4）人教A版　教师用书	历史（必修2）岳麓版
数学（必修5）人教A版　教师用书	历史（必修3）岳麓版
英语（必修1）人教版	地理（必修1）人教版
英语（必修2）人教版	地理（必修2）人教版
英语（必修3）人教版	地理（必修3）人教版
英语（必修4）人教版	生物（必修1）人教版
英语（必修5）人教版	生物（必修2）人教版
英语（必修1）北师大版	生物（必修3）人教版
英语（必修2）北师大版	

ISBN 978-7-5334-4587-4

9 787533 445874 >

定价:10.50元

福建名校系列

人教A版

学生用书

高中课标教材同步导学丛书

名校学案

《名校学案》编委会　编

主　　编：陈文强　执行主编：陈文强

数学·必修5

福建教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中课标教材同步导学丛书．数学(必修5·人教A版学生用书)/《名校学案》编委会编．—福州:福建教育出版社，2007.1
(名校学案)
ISBN 978—7—5334—4587—4

Ⅰ.高… Ⅱ.名… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第152922号

责任编辑:范秋炎

封面设计:季凯闻

福建名校系列

高中课标教材同步导学丛书

名校学案·数学(必修5·人教A版·学生用书)

《名校学案》编委会 编

主 编:陈文强

执行主编:陈文强

出 版	福建教育出版社 (福州梦山路27号 邮编:350001 电话:0591—83726971 83725592 传真:83726980 网址:www.fep.com.cn)
经 销	福建闽教图书有限公司
印 刷	福州源峰彩色印刷有限公司 (福州台江区工业路223号 邮编:350004)
开 本	889毫米×1194毫米 1/16
印 张	7
字 数	161千
版 次	2007年1月第1版 2007年1月第1次印刷
书 号	ISBN 978—7—5334—4587—4
定 价	10.50元

《福建名校系列》丛书编委名单

出版说明

名校就是品牌，名校就是旗帜，名校富有成功的教学策略和优良的训练方法。《名校学案——高中课标教材同步导学》丛书就是名校名师优秀的教学策略和训练方法的总结、汇集。

在高中新课程教学实施中，考试内容和模式将逐渐发生变化，新的学习策略正在生成。新陈代谢之际，各大名校的教学优势、学习策略将成为学好新课程的有力手段。应广大一线师生的需求来编写这套教辅读物，就是为了使这种学习策略能够成为众多学生容易共享的资源。

该丛书既是一批名校名师认真钻研思考课标教材的心得，又是他们多年的教学、质检、命题的经验总结，权威度高。丛书充分贯彻高中新课程理念，以培养学生能力为导向，既着力于基础知识和基本技能的全面掌握，也注重学生分析问题和解决问题能力的培养。从栏目的设置到内容的编写，力求做到简明、实用、返璞归真，突出高中新课程所要求的基础性、时代性、开放性、应用性、探索性等特点。

丛书以章或单元、节、课为单位编写；结构上分为“认知·探索”（含课文探索、领悟导析），“演练·评估”（注重全面复习基础知识、训练基本技能），“拓展·迁移”（注重知识拓展与延伸），“单元小结”，“知识链接”，“单元评估”，“模块评估”以及详细的“参考答案”。

本书由余养健执笔并统稿。

广东、海南等课改先行地区一线教师为该丛书的编写提出了宝贵意见。我们将继续密切跟踪教改动态，了解高考新情况，对丛书加以修改完善，同时欢迎读者及时指出书中的疏误，便于我们改正，为广大师生提供更优质的服务。

福建教育出版社

2006年12月

目录

·第一章　解三角形·

1.1　正弦定理和余弦定理

1.1.1 正弦定理

认知·探索

问题导思

1. 除了课本提供的方法，是否可以用其他方法证明正弦定理？

2. 在一个三角形中，各边和它所对角的正弦的比值都相等，等于一个常数，这个常数的几何意义是什么？

3. 已知两边和其中一边的对角解三角形，是否一定有解？如果有解，解是否唯一？

例题演示

例 1　(1)在$\triangle ABC$中，$a=5$，$B=45^\circ$，$C=105^\circ$，求边c；

(2)在$\triangle ABC$中，$a=10$，$b=5\sqrt{6}$，$B=60^\circ$，求角A；

(3)在$\triangle ABC$中，$a=6$，$b=2\sqrt{3}$，$B=30^\circ$，求角A.

解　(1)由三角形内角和定理可知：

$$A=180^\circ-(B+C)=30^\circ.$$

由正弦定理得：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C},$$

所以
$$c=a\cdot\frac{\sin C}{\sin A}=5\times\frac{\sin 105^\circ}{\sin 30^\circ}=5\times\frac{\sin(60^\circ+45^\circ)}{\sin 30^\circ}=\frac{5}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2}).$$

(2)由正弦定理得：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow\frac{10}{\sin A}=\frac{5\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}\Rightarrow\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

因为$a<b$，所以$A<B=60^\circ$，又$A\in(0,\pi)$，所以$A=45^\circ$.

(3)由正弦定理得：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow\frac{6}{\sin A}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}\Rightarrow\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

因为$a>b$，所以$A>B=30^\circ$，又$A\in(0,\pi)$，所以$A=60^\circ$，或$A=120^\circ$.

评析　1. 在解三角形的问题中有两种情况可用正弦定理：已知两角一边(或两边一夹角)；已知两边一对角.

2. 已知两边一角，则三角形的形状唯一确定；而已知两角一边必须结合大边对大角具体分析，可能无解、唯一解或两组解.

例 2　已知$\triangle ABC$的三条边为a,b,c，三个内角为A,B,C，其外接圆的半径为R.

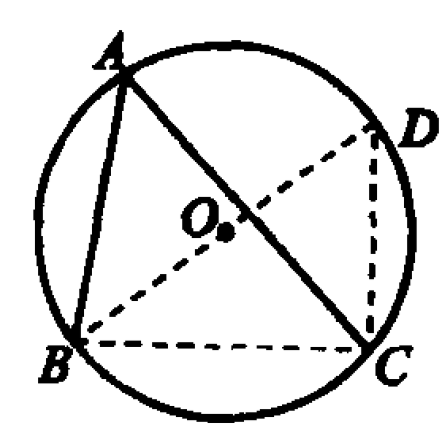


图 1.1.1－1

(1)求证：$\frac{a}{\sin A}=2R$；

(2)若$\frac{\cos B}{\cos C}=-\frac{b}{2a+c}$，且$a=c=2$，求$\triangle ABC$的面积$S$.

(1)证明　如图 1.1.1－1，作出$\triangle ABC$的外接圆，圆心为O，连结BO，并延长BO与圆相交于D点，连结CD. 在$\text{Rt}\triangle BCD$中，

$BC=BD\times\sin D\Rightarrow a=2R\sin D$.

又$\angle A=\angle D$，所以

$a=2R\sin A$，即$\frac{a}{\sin A}=2R$.

(2)**解**　由$\frac{\cos B}{\cos C}=-\frac{b}{2a+c}$，得

$$\frac{\cos B}{\cos C}=-\frac{2R\sin B}{4R\sin A+2R\sin C},$$

即$\frac{\cos B}{\cos C}=-\frac{\sin B}{2\sin A+\sin C}$，

$2\sin A\cos B+\sin C\cos B+\cos C\sin B=0$，

所以 $2\sin A\cos B+\sin(B+C)=0$.

而 $\sin(B+C)=\sin A$,所以

$$2\sin A\cos B+\sin A=0.$$

又 $\sin A\neq 0$,所以 $\cos B=-\frac{1}{2}$.

而 $0<B<\pi$,所以 $B=\frac{2\pi}{3}$.

所以 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\sqrt{3}$.

评析 1. 扩充的正弦定理:

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$($R$ 为外接圆半径).

常常可变形为:

$a=2R\sin A,b=2R\sin B,c=2R\sin C$.

由此可实现"边"和"角"的互化.

2. 常见的三角形面积公式:

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}ab\sin C$$

(当然利用正弦定理还可以构造出其他的公式).

例 3 有一块半径为 R,中心角为 $45°$的扇形铁皮材料,为了获取面积最大的矩形铁皮,工人师傅常让矩形的一边落在扇形的半径上,然后作其最大内接矩形. 试问:工人师傅是怎样选择矩形的四点的?并求出最大面积值.

解法 1 如图 1.1.1—2,扇形 AOB 的内接矩形是 $MNPQ$,连 OP,则 $OP=R$. 设$\angle AOP=\theta$,则

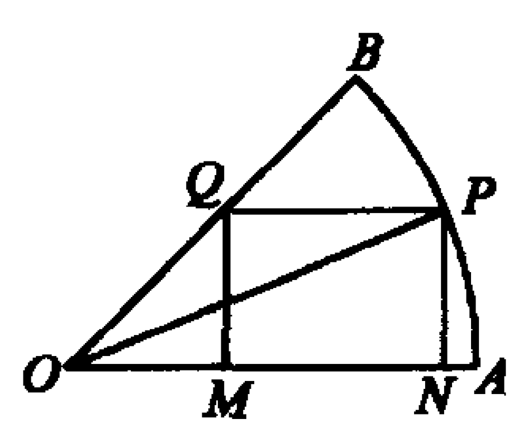


图 1.1.1—2

$\angle QOP=45°-\theta,NP=R\sin\theta$.

在$\triangle PQO$ 中,

$$\frac{PQ}{\sin(45°-\theta)}=\frac{R}{\sin 135°},$$

所以 $PQ=\sqrt{2}R\sin(45°-\theta)$.

$$S_{矩形MNPQ}=QP\cdot NP$$
$$=\sqrt{2}R^2\sin\theta\sin(45°-\theta)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}R^2\cdot\left[\cos(2\theta-45°)-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$
$$\leqslant\frac{\sqrt{2}-1}{2}R^2,$$

当且仅当 $\cos(2\theta-45°)=1$,即 $\theta=22.5°$ 时,$S_{矩形MNPQ}$的值最大且最大值为$\frac{\sqrt{2}-1}{2}R^2$.

工人师傅是这样选点的:记扇形为 AOB,以扇形一半径 OA 为一边,在扇形上作角 AOP 且使$\angle AOP=22.5°$,P 为边与扇形弧的交点,自 P 作 $PN\perp OA$ 于 N,$PQ/\!/OA$ 交 OB 于 Q,并作 $QM\perp OA$ 于 M,则矩形 $MNPQ$ 为面积最大的矩形,面积最大值为$\frac{\sqrt{2}-1}{2}R^2$.

解法 2 如图 1.1.1—3,以 OA 为 x 轴,O 为原点,建立平面直角坐标系,并设 P 的坐标为$(R\cos\theta,R\sin\theta)$,则

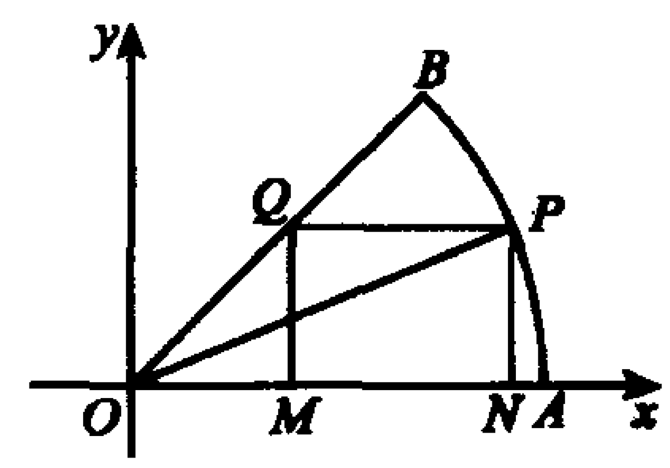


图 1.1.1—3

$$|PS|=R\sin\theta.$$

直线 OB 的方程为 $y=x$,直线 PQ 的方程为 $y=R\sin\theta$. 联立解之得 $Q(R\sin\theta,R\sin\theta)$,

所以

$$|PQ|=R\cos\theta-R\sin\theta.$$

于是

$$S_{PQRS}=R\sin\theta(R\cos\theta-R\sin\theta)=\cdots$$

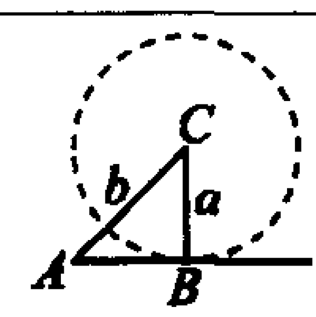
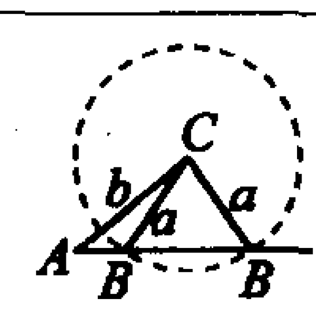
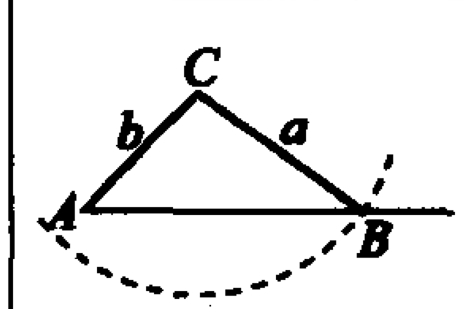
(以下与解法 1 相同).

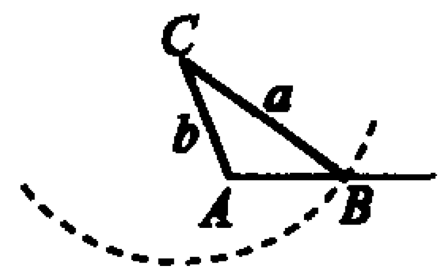
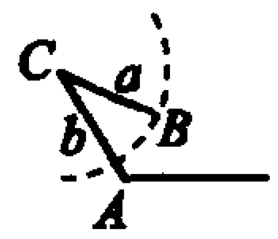
评析 几何问题可能用"几何问题代数化思想——坐标法"和"解三角形的思想"解决.

归 纳 小 结

1. 正弦定理可以像例 2(1)那样来证明,或者通过建立坐标系证明(解析法),还可以用向量法证明.

2. 在$\triangle ABC$ 中,已知 a,b 和 A 时,解的情况如下:

	A 为锐角		
图形			
关系式	$a=b\sin A$ $\left(\sin B=\frac{b\sin A}{a}=1\right)$	$b\sin A<a<b$ ($\sin B<1$,且 b 为大边)	$a\geqslant b$ ($\sin B<1$,且 b 为小边)
解个数	一解	两解	一解

	A 为钝角或直角	
图形		
关系式	$a>b$	$a\leqslant b$
解个数	一解	无解

演练·评估1.1.1

1. 在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c. 若$A:B:C=1:2:3$，则$a:b:c$等于（　　）.

   A. $1:2:3$　　B. $2:3:4$

   C. $3:4:5$　　D. $1:\sqrt{3}:2$

2. 在$\triangle ABC$中，"$A=B$"是"$\sin A=\sin B$"的（　　）.

   A. 充分不必要条件

   B. 必要不充分条件

   C. 充要条件

   D. 既不充分又不必要条件

3. 在$\triangle ABC$中，$B=60°$，最大边与最小边之比为$(\sqrt{3}+1):2$，则最大角为（　　）.

   A. $45°$　B. $60°$　C. $75°$　D. $90°$

4. 在$\triangle ABC$中，已知$c-a=1$，$bc=30$，$\triangle ABC$的面积S为$\frac{15}{2}$，则$\angle A$等于（　　）.

   A. $150°$　B. $60°$　C. $30°$　D. $150°$或$30°$

5. 已知$\triangle ABC$的面积S为$\frac{1}{4}$，外接圆的半径$R=1$，则$abc=$______.

6. 在$\triangle ABC$中，$\tan A=2$，$\tan B=3$，$c=10$，则$a=$______.

7. 在$\triangle ABC$中，已知$a=2\sqrt{3}$，$b=6$，$A=30°$，求B及$\triangle ABC$的面积S.

8. 在$\triangle ABC$中，若$a=2\sqrt{3}$，$A=30°$，分别求出满足下列条件时，边b的取值范围：

   (1)三角形有唯一解；

   (2)三角形有两解；

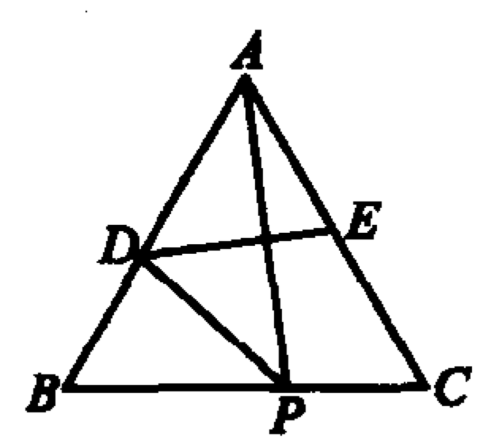
   (3)三角形无解.

9. 在$\triangle ABC$中，a,b,c分别是A,B,C的对边，若

   $\sin A=2\sin B\cos C$，$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$，

   判断$\triangle ABC$的形状.

10. 如图，在正三角形ABC的边AB、AC上分别取D、E两点，使沿线段DE折叠三角形时，顶点A落在边BC上的点为P. 设$\angle BAP=\theta$，问θ为何值时AD最小？



1.1.2 余弦定理

认知·探索

问题导思

1. 除了课本提供的方法，是否可以用其他方法证明余弦定理？

2. 余弦定理和正弦定理在使用时的前提有何区别？

例题演示

例1 (1)已知△ABC的三边分别为$a=6$，$b=10$，$c=14$，求△ABC中最大角的度数；

(2)在△ABC中，$a=\sqrt{6}$，$b=1+\sqrt{3}$，$C=45°$，求边c.

解 (1)由大边对大角原理，可知C为最大角.

由余弦定理得：

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{1}{2},$$

又$C\in(0,\pi)$，所以$C=120°$.

(2)由余弦定理得：

$$\begin{aligned}c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C\\&=6+(1+\sqrt{3})^2-2\sqrt{6}(1+\sqrt{3})\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\&=4,\end{aligned}$$

所以$c=2$.

评析 1. 已知三边长(SSS)，则三角形的形状唯一确定，我们可以用余弦定理求出三个角.

2. 已知两边一夹角(SAS)，则三角形的形状唯一确定，我们可以用余弦定理求出另一边和另两个角.

例2 在△ABC中，

$$\sin A\cos^2\frac{C}{2}+\sin C\cos^2\frac{A}{2}=\frac{3}{2}\sin B.$$

(1)求证：a，b，c三边成等差；

(2)求角B的范围.

(1)**证明** 由$\sin A\cdot\frac{1+\cos C}{2}+\sin C\cdot\frac{1+\cos A}{2}=\frac{3}{2}\sin B$得：

$\sin A+\sin A\cos C+\sin C+\sin C\cos A=3\sin B$，

即$\sin A+\sin(A+C)+\sin C=3\sin B$，

$\sin A+\sin C=2\sin B$，

即$2b=a+c$.

(2)**解** 由余弦定理得：

$$\begin{aligned}\cos B&=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\\&=\frac{a^2+c^2-\left(\frac{a+c}{2}\right)^2}{2ac}\\&=\frac{3(a^2+c^2)-2ac}{8ac}\\&\geqslant\frac{6ac-2ac}{8ac}\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

因为$0<B<\pi$，且函数$y=\cos x$在$[0,\pi]$上是减函数，所以$0<B\leqslant\frac{\pi}{3}$，即$B$的范围是$\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$.

例3 如图1.1.2－1，半圆O的直径为2，A为直径延长线上的一点，$OA=2$，B为半圆上任意一点，以AB为边向外作正三角形ABC. 问B在什么位置时，四边形$OACB$的面积最大？并求出面积的最大值.

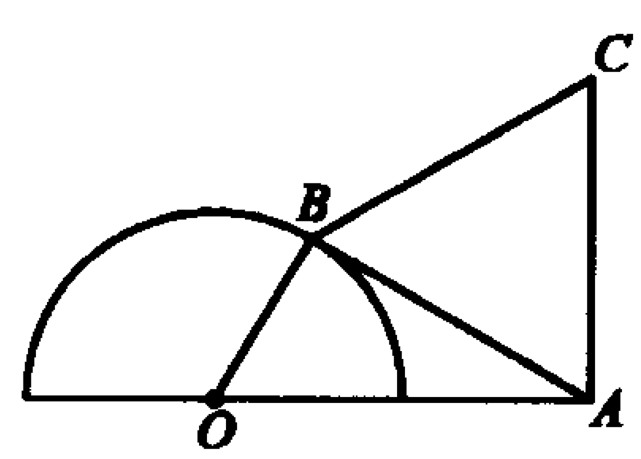


图1.1.2－1

解法1 设$\angle AOB=\theta$，由余弦定理得

$$\begin{aligned}AB^2&=OB^2+OA^2-2\cdot OB\cdot OA\cos\theta\\&=5-4\cos\theta,\end{aligned}$$

所以四边形$OACB$的面积为

$$\begin{aligned}S&=\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2+\frac{1}{2}OB\cdot OA\cdot\sin\theta\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}(5-4\cos\theta)+\sin\theta\\&=\frac{5\sqrt{3}}{4}+\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta\\&=\frac{5\sqrt{3}}{4}+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

当 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=1$，即 $\theta-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，$\theta=\frac{5}{6}\pi$ 时，S 有最大值 $\frac{5\sqrt{3}}{4}+2$.

解法 2 如图 1.1.2—2 建立坐标系，设 $\angle AOB=\theta$，则 $B(\cos\theta,\sin\theta)$，$A(2,0)$，所以

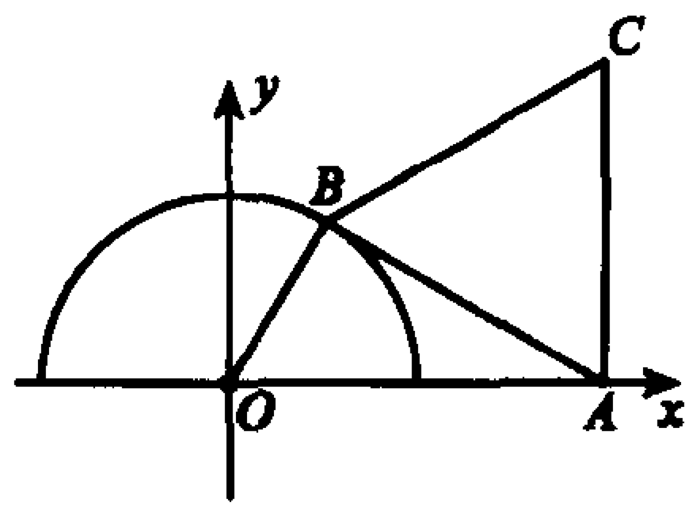


图 1.1.2—2

$$AB^2=(\cos\theta-2)^2+(\sin\theta-0)^2$$
$$=5-4\cos\theta.$$

所以 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2+\frac{1}{2}OB\cdot OA\cdot\sin\theta=\cdots$（以下与解法 1 相同）.

评析 几何图形问题，我们一定要注意“三角”和“解析”这些通法的掌握.

归纳小结

1. 余弦定理还可以像例 3 那样通过建立坐标系证明（解析法），也还可以用向量法证明.

2. 正弦定理是在已知“两角一边（AAS 或 ASA）”与已知“两角一对边”时使用；余弦定理是在已知“三边（SSS）”与“两边一夹角（SAS）”时使用.

演练·评估 1.1.2

1. 已知 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 三边的长，若满足等式

$$(a+b-c)(a+b+c)=ab,$$

则角 C 的大小为（　　）.

A. 60°　　B. 90°　　C. 120°　　D. 150°

2. 已知锐角 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 $a=2,b=3,c=x$，则 x 的取值范围是（　　）.

A. $1<x<5$　　B. $\sqrt{5}<x<\sqrt{13}$

C. $0<x<\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{13}<x<5$

3. 若 $a\cos A=b\cos B$，则 $\triangle ABC$ 的形状是（　　）.

A. 等腰三角形　　B. 直角三角形

C. 等腰直角三角形　　D. 等腰或直角三角形

4. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，$A=\frac{\pi}{3}$，$a=\sqrt{3}$，$b=1$，则 $c=$______.

5. $\triangle ABC$ 中，$\angle A=120^\circ$，$a=7$，$b+c=8$，则 $b=$______.

6. 已知圆内接四边形 $ABCD$ 的边长分别是 $AB=2$，$BC=6$，$CD=DA=4$，求四边形 $ABCD$ 的面积.

7. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对的边长分别为 a、b、c，设 a、b、c 满足条件 $b^2+c^2-bc=a^2$ 和 $\frac{c}{b}=\frac{1}{2}+\sqrt{3}$，求 $\angle A$ 和 $\tan B$ 的值.

8. 在△ABC 中，a、b、c 分别为角 A、B、C 的对边，$4\sin^2\frac{B+C}{2}-\cos 2A=\frac{7}{2}$.

(1)求角 A 的度数；

(2)若 $a=\sqrt{3}$，$b+c=3$，求 b 和 c 的值.

9. 已知△ABC 的面积 $S=a^2-(b-c)^2$，且 $b+c=8$，求△ABC 面积的最大值.

1.2 应用举例

1.2.1 距离和角度测量问题

认知·探索

问题导思

1. 为什么要引入正弦和余弦定理来测量距离？它主要用来解决什么样的距离问题？

2. 方位角和方向角的概念分别是什么？

例题演示

例 1 (1)如图 1.2.1—1，A，B 是位于一座山两侧的两所房子，为了测量 AB 的距离，则测量下列数据较为适合的是(　　).

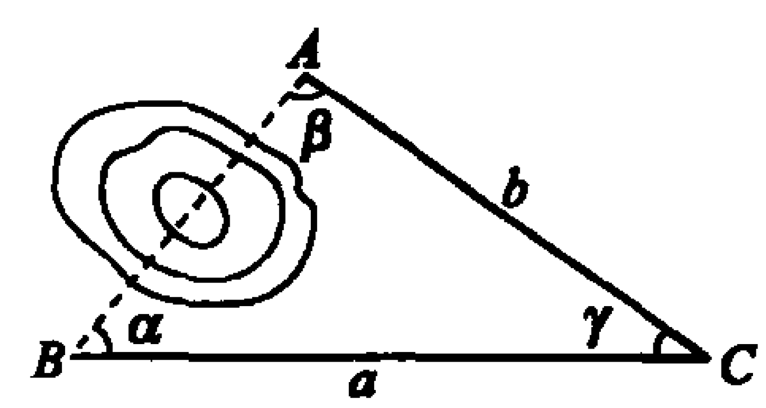


图 1.2.1—1

A. α,a,b　　B. α,β,a

C. a,b,γ　　D. α,β,b

(2)如图 1.2.1—2，如果 A，B 是一条河的两岸呢，又该如何测量 AB 的距离？

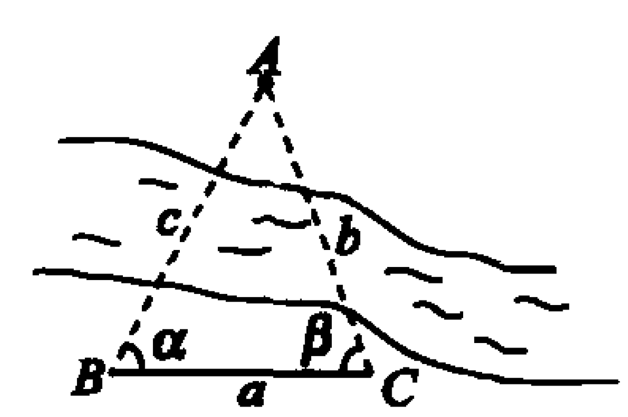


图 1.2.1—2

解 (1)由于 A，B 位于一座山的两侧，则 AB 直线实际上是不容易画出，即 α,β 不容易测量，所以我们可以采用测量 a,b,γ，再用余弦定理算出 AB 的距离，故应选 C.

(2)由于 AB，AC 的两端在河流的两岸，其长度不好测量，但 BC 可测量，α,β 可测量，那么利用正弦定理

$$\frac{AB}{\sin\beta}=\frac{BC}{\sin(180^\circ-\alpha-\beta)}$$

就可以求出 AB 的距离.

评析 这是两种不同的条件下，测量从一个可

到达点到另一个不可直线到达点之间的距离测量问题，我们必须根据实际情况选择不同的测量数据，构造到一个三角形中利用正、余弦定理进行计算后获得结果.

例 2 甲船在 A 处遇险，在甲船正西南 10 海里 B 处的乙船收到甲船的警报后，测得甲船是沿着方位角 105°的方向，以每小时 9 海里的速度向某岛靠近，如果乙船要在 40 分钟内追上甲船，则乙船应以多大速度，以何方位角航行？

解 依题意画出示意图，如图 1.2.1－3，设乙船的速度为 x 海里/时，且乙船在 40 分钟，即$\frac{2}{3}$小时，在 C 处追上甲船，则

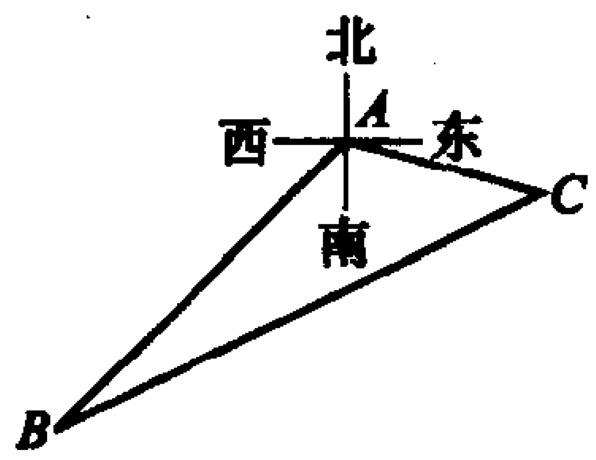


图 1.2.1－3

$BC=\frac{2}{3}x$ 海里，

$AC=\frac{2}{3}\times 9=6$ 海里，

$\angle BAC=(180°-105°)+45°$
$=120°$.

在$\triangle ABC$ 中，

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos 120°$,

$\left(\frac{2}{3}x\right)^2=10^2+6^2-2\times 10\times 6\times\cos 120°$,

解得 $x=21$ 海里/时，$BC=14$ 海里. 由正弦定理，

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B},$$

解得 $\sin B=\frac{6}{14}\times\sin 120°\approx 0.37$,

$B\approx 21°47'$.

所以乙船应以每小时 21 海里的速度沿方位角 $45°+21°47'=66°47'$的方向航行.

评析 1. 方位角的概念：以正北方向为始边，顺时针旋转到目标方向线所成的角.

2. 适当引入未知数，通过列方程求解.

例 3 某观测站 C 在城 A 的南 20°西的方向上，由 A 城出发有一条公路，走向是南 40°东，在 C 处测得距 C 为 31 千米的公路上 B 处有一人正沿公路向 A 城走去，走了 20 千米后，到达 D 处，此时 C、D 间距离为 21 千米. 问这人还需走多少千米到达 A 城？

解 根据题意得图 1.2.1－4，其中 $BC=31$ 千米，$BD=20$ 千米，$CD=21$ 千米，$\angle CAB=60°$.

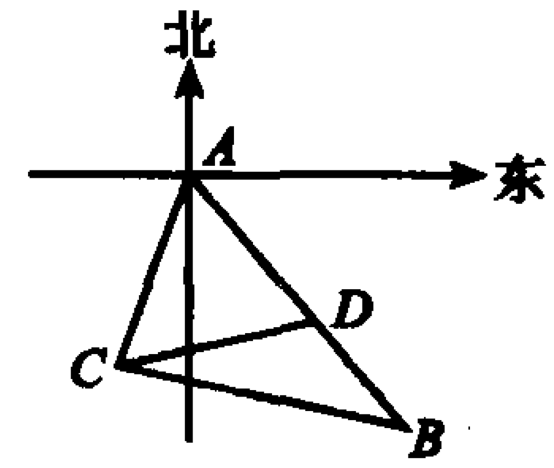


图 1.2.1－4

设$\angle ACD=\alpha$，$\angle CDB=\beta$.

在$\triangle CDB$ 中，由余弦定理得：

$$\cos\beta=\frac{CD^2+BD^2-BC^2}{2\cdot CD\cdot BD}=\frac{21^2+20^2-31^2}{2\times 21\times 20}=-\frac{1}{7},$$

$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

$$\begin{aligned}\sin\alpha&=\sin(180°-\angle CAD-\angle CDA)\\&=\sin(180°-60°-180°+\beta)\\&=\sin(\beta-60°)\\&=\sin\beta\cos 60°-\cos\beta\sin 60°\\&=\frac{4\sqrt{3}}{7}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{5\sqrt{3}}{14}.\end{aligned}$$

在$\triangle ACD$ 中，由正弦定理得：

$$\begin{aligned}AD&=\frac{CD}{\sin A}\cdot\sin\alpha\\&=\frac{21}{\sin 60°}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{14}\\&=\frac{21}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{5\sqrt{3}}{14}\\&=15.\end{aligned}$$

此人还得走 15 千米到达 A 城.

评析 方向角的概念：从指定方向线到目标线所成角的小于 90°的水平角. 如南偏西 60°，指以正南方向为始边，顺时针方向向西旋转 60°.

归纳小结

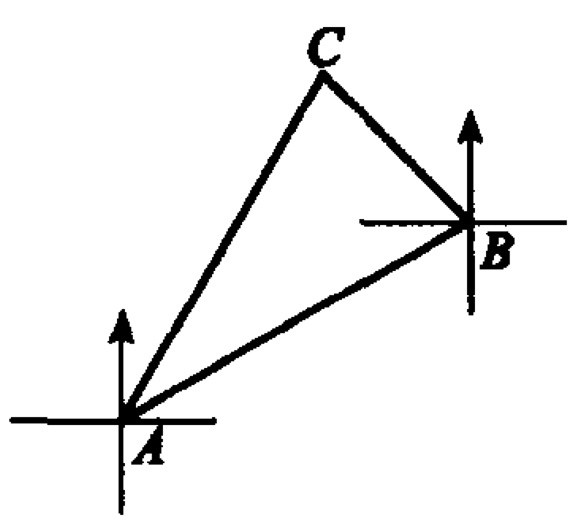
1. 三角形中的应用题，要学会把实际问题抽象

成一个数学图形.

2. 准确地掌握方位角和方向角的概念.

演练·评估 1.2.1

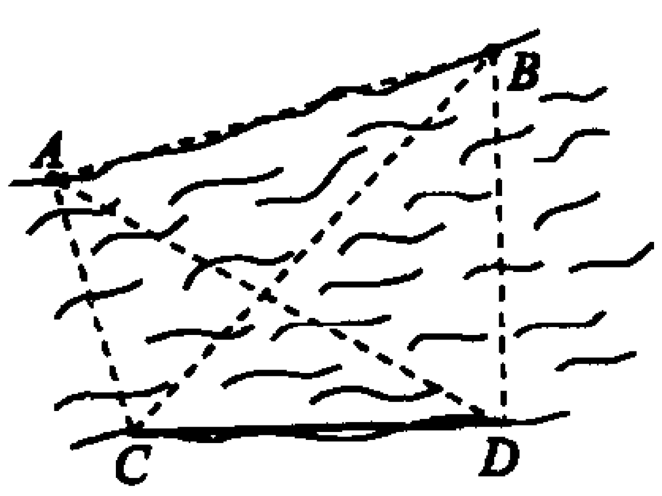
1. 如图,某海上缉私小分队驾驶缉私艇以 40 km/h 的速度由 A 处出发沿北偏东 60°方向航行,进行海上巡逻,当行驶半小时到达 B 处时,发现在北偏西 45°方向有一艘船 C,若 C 位于 A 处北偏东 30°方向上,则缉私艇 B 与船 C 的距离是(　　).



A. $5(\sqrt{6}+\sqrt{2})$km　　B. $5(\sqrt{6}-\sqrt{2})$km

C. $10(\sqrt{6}+\sqrt{2})$km　　D. $10(\sqrt{6}-\sqrt{2})$km

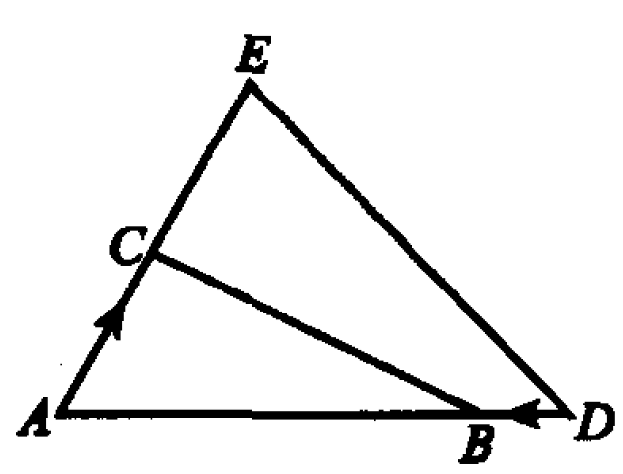
2. 如图,要测量河对岸 A、B 两点间的距离,今沿河岸选取相距 40 米的 C、D 两点,测得 $\angle ACB=60°$,$\angle BCD=45°$,$\angle ADB=60°$,$\angle ADC=30°$,则 AB 的距离是(　　).



A. $20\sqrt{2}$　　B. $20\sqrt{3}$

C. $40\sqrt{2}$　　D. $20\sqrt{6}$

3. 如图,甲船自某港出发时,乙船在离港 7 海里的海面上驶向该港.已知两船的航向成 120°角,甲、乙两船的速度之比为 2∶1,则两船距离最近时,甲船离港口______海里.



4. 如图 1 所示,P、Q 分别为宽 4 cm、8 cm 的钢板,现要把它们焊成如图 2 所示的形状,若 $\angle B$ 为 60°,则下料时 α 为______度(精确到 1°).

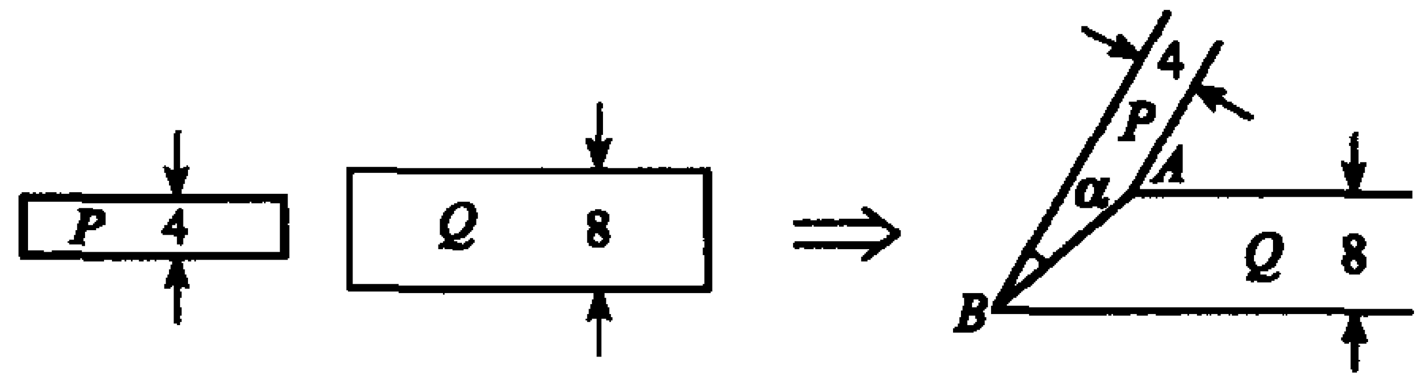
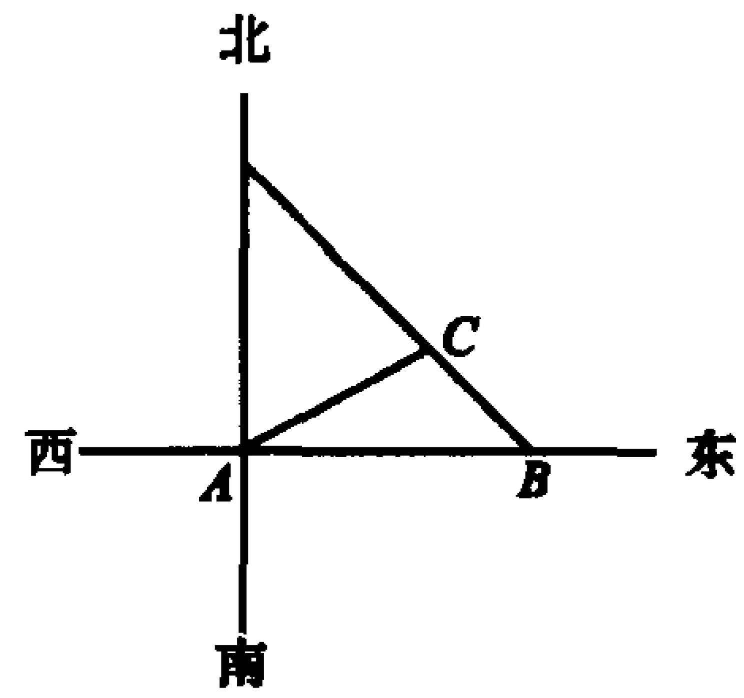


图1　　图2

5. 据气象台预报,在 A 市正东方向 300 km 的 B 处有一台风中心形成,并以每小时 40 km 的速度向西北方向移动,距离台风中心 250 km 内的地方都要受其影响.问:从现在起,大约多长时间后,台风将影响 A 市,持续时间有多长(精确到 0.1 h)?



6. 在一很大的湖岸边(可视湖岸为直线)停放着一只小船，由于缆绳突然断开，小船被风刮跑，其方向与湖岸成15°角，速度为2.5 km/h. 同时岸边有一人，从同一地点开始追赶小船，已知他在岸上跑的速度为4 km/h，在水中游的速度为2 km/h. 问此人能否追上小船？若小船速度改变，则小船能被人追上的最大速度是多少？

1.2.2 高度测量问题

认知·探索

问题导思

1. 为什么要引入正弦和余弦定理来测量高度？它主要用来解决什么样的距离问题？

2. 仰角和俯角的概念分别是什么？

例题演示

例1 如图1.2.2—1，某直升飞机于空中A处观测正前方地面控制点C的俯角为30°；若航向不变，飞机继续飞行1000 m至B处，观测地面控制点C的俯角为45°. 问飞机再向前飞多远，与地面控制点C的距离最近？并求最近距离(精确到1 m).

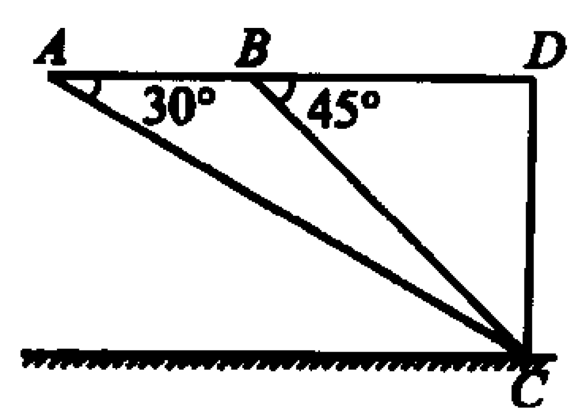


图1.2.2—1

解 在△ABC中，

$$\frac{BC}{\sin 30^\circ}=\frac{AB}{\sin 15^\circ}\Rightarrow BC=\frac{2000}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}.$$

在Rt△BCD中，

$$CD=BC\sin 45^\circ=\frac{2000}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 1366(\text{m}).$$

答：飞机再向前飞1366 m，与地面控制点C的距离最近，且最近距离为1366 m.

评析 1. 本题中“A处观测正前方地面控制点C”中的正前方保证了A,B,C,D是处于同一铅直面，是属于树直的二维问题.

2. 俯角与仰角的概念：视线与水平面的夹角(实际上在立几中就是“线面角”).

例2 如图1.2.2—2，某人身高a米，在黄浦江边测得对岸东方明珠塔尖的仰角为α，测得在黄浦江的倒影中塔尖的俯角为β，求东方明珠塔的高度.