中等专业学校教材

工科专业通用

数学第三册

# 教学参考书

上海市中专数学教材编写组编

高等教育出版社

中等专业学校教材

工科专业通用

# 数学第三册

# 教学参考书

上海市中专数学教材编写组　编

高等教育出版社

## 内 容 提 要

本教学参考书是以1983年《中等专业学校数学教学大纲（工科专业通用）》为依据，配合中专数学（工科类）的教学而编写的。与工科中专数学教材编写组编、上海市中专数学教材编写组修订的《数学》相应地分四册出版。主要内容包括教材各章的目的和要求、教材内容说明、重点和难点、教学建议、参考教案、测验参考题和部分习题的提示或解答等。

本书可供工科类中专数学教师参考。

(京)112号

中等专业学校教材

工科专业通用

**数学第三册教学参考书**

上海市中专数学教材编写组 编

•

高等教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

崇明红卫印刷厂印装

•

开本 787×1092 1/32 印张 10.5 字数 232,000

1990年10月 第1版 1992年2月第3次印刷

印数8,411—12,810

ISBN 7-04-003155-8/O·972

定价：3.15元

# 编者的话

本教学参考书是根据1983年原教育部审定的《中等专业学校数学教学大纲(工科专业通用)》和工科中专数学教材编写组编、上海市中专数学教材编写组修订的《数学》第一、二、三、四册编写的。

本教学参考书分四册出版。主要内容包括上述教材各章的目的和要求、教材内容说明、重点和难点、教学时数分配、教学建议、参考教案、测验参考题以及部分习题的提示或解答等。

本教学参考书是受国家教育委员会委托，由上海市教育局组织的工科中专数学教材编写组集体编写的。参加编写的有上海机械专科学校任必、上海市纺织工业专科学校秦柏前、上海市航空工业学校张又昌、上海市公用事业学校陈荣基、上海港湾学校袁时中等同志。第一、二、三册由任必同志和秦柏前同志担任主编，第四册由张又昌同志和陈荣基同志担任主编，全书由任必、秦柏前统稿。

本书在编写过程中，曾请上海市中专数学协作组的同志进行审阅，他们对初稿提出了许多宝贵意见，在此一并致谢。

本书可供招收初中毕业生的工科类中专数学教学参考。第三、四册也可供招收高中毕业生的工科类中专数学教学参考。

本书由于编者水平所限，难免有缺点和错误。殷切希望

使用本书的学校和教师提出批评指正。

上海市中专数学教材编写组

1990年1月

# 目　　录

# 第十四章　极限与连续

## 一　目的要求

1. 理解函数的定义，掌握求函数定义域的方法；了解函数四种特性的定义以及基本初等函数、复合函数与初等函数的定义；熟悉常见的基本初等函数的图象和性质；会画出简单的分段函数的图象；会建立简单的函数关系式。

2. 理解数列极限和函数极限的概念，掌握极限的四则运算法则；理解无穷小与无穷大的概念，了解无穷小的性质，理解函数极限与无穷小的关系，知道两个无穷小比较的意义；掌握两个重要的极限。

3. 了解函数连续性的概念，会求函数的间断点；知道初等函数连续性的概念，掌握初等函数的极限求法；知道闭区间上连续函数的性质。

## 二　教材说明

本章教材分为七节。

第一节为基本初等函数与初等函数。由于微积分研究的对象是函数，所以教材在这一节首先对函数概念作扼要地复习和适当地加深。把函数的定义从单值对应引伸到多值对应；指出了求函数定义域的一般方法；对于函数与函数值的记号、分段函数、反函数等学生不易掌握，而且今后常要用到的概念，通过适当的例子给予复习。教材还给出了函数四

种特性的定义，以提高学生对函数变化情况的认识。其次，教材给出了基本初等函数、复合函数与初等函数的定义，用列表的方式给出了常用的基本初等函数的定义域、值域、图象和性质。举例说明了如何利用基本初等函数的图象通过平移、叠加、对称等手段作出初等函数的图象，以增强学生作函数图象的技能。最后，教材列举了几个实际问题，建立了函数关系，以培养学生分析问题、解决问题的能力。

第二节为数列的极限，它是在第十三章数列的基础上进一步研究的。数列是一种整标函数，讨论它的极限时，考虑到学生的理解能力和接受水平，教材采用了几何的方法，先在数轴上分析了当 $n\to\infty$ 时，数列 $x_n=\frac{1}{2^n}$ 和 $x_n=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$ 的变化趋势，而后给出数列极限的描述性定义，再利用定义观察另一些数列的极限。为了增强学生对数列的极限定义中“当 $n$ 无限增大时，数列 $x_n$ 无限接近于一个确定常数 $a$”的实质的理解，教材还对数列 $x_n=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$ 的极限作了数量关系的分析说明。在这一节的最后，教材不加证明地给出了数列极限的四则运算法则，并导出了无穷递缩等比数列的求和公式。

第三节为函数的极限。上一节讨论了当 $n\to\infty$ 时数列 $x_n$ 的极限，这一节接着讨论当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限。教材仍然采用几何的方法，先在直角坐标平面内分析当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的变化趋势，而后给出当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 极限的描述性定义。考虑 $x\to\infty$ 的两种方式：$x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$，因而再给出当 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时函数 $f(x)$

的极限定义。教材通过对函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 和函数 $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$ 当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时极限的讨论，给出“如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 都存在并且相等，那末 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 也存在，并且与它们相等”的结论。接着教材又讨论了当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限。先给出当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限定义，再给出当 $x\to x_0+0$ 和 $x\to x_0-0$ 时，$f(x)$ 的极限定义，并通过对具体例子的分析，得出函数极限与其左极限、右极限之间的关系。教材介绍了数学上常用的重要术语：充分条件、必要条件、充分必要条件，并运用以上术语简明地叙述函数极限与其左、右极限的关系。为了给下一节学习极限运算作好准备，教材在这一节列举了 $\lim\limits_{x\to x_0} C=C$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty} C=C$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$ 的例子。最后，教材还讨论了函数极限的保号性质，为以后学习中值定理打好基础。

第四节为极限的运算。教材给出了函数极限的四则运算法则，并列举了各类例题。

第五节为无穷小与无穷大。教材首先给出了无穷小的定义，无穷小的性质（不证明），以及函数极限与无穷小的关系。其次给出了无穷大的定义和无穷大与无穷小的关系，由简单到复杂地列举了利用这种关系求一些函数极限的例子。最后讨论了两个无穷小的比较。

第六节为两个重要的极限。教材介绍了函数极限存在的定理，在此基础上，推证了重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$。对于重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$，教材没有加以推证，只是列表

考察了当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时，函数 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 的变化趋势，并且不加证明地指出 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 都存在而且相等，它们的值可以用无理数 $e$ 来表示，因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$。

第七节为函数的连续性。教材首先介绍了变量 $u$ 的增量 $\Delta u$ 的概念，用图说明了关系式 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 的几何意义。其次，教材给出函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 连续的两种定义：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，这两种定义在判定函数在一点是否连续时各有其简便之处。接着，教材介绍了函数 $y=f(x)$ 在 $(a,b)$ 内连续的意义，又通过函数在点 $a$ 的右连续和点 $b$ 的左连续的定义，介绍了 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续的意义，指出了基本初等函数的连续性。教材通过对函数在一点不连续原因的分析，介绍了函数的间断点的概念，给出了间断点的分类。第三，教材概括地叙述了连续函数的和、差、积、商的连续性，反函数、复合函数及初等函数的连续性，从而指出了初等函数在其定义区间内求极限的方法。最后，教材介绍了闭区间上连续函数的两个性质，为以后学习打好基础。

本章教材的重点：（1）函数的定义和定义域、基本初等函数的图象和性质、复合函数的概念；（2）函数极限的概念；（3）无穷小、具有极限的函数与无穷小的关系；（4）极限的四则运算法则；（5）函数在某一点连续的概念。

本章教材的难点：（1）函数极限的概念；（2）判定函数在某点的连续性。

在微积分中，我们常遇到的函数主要是初等函数，而初等函数是由基本初等函数与常数经过有限次四则运算和复合步骤所组成，所以正确理解函数的定义，求出函数的定义域，熟悉常用的基本初等函数的图象和性质，正确分解函数的复合步骤，对进一步研究初等函数是很重要的。例如，在研究函数的极限时，常利用函数的图象作直观地分析。由幂函数$y=\frac{1}{x}$的图象，可知$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$；由反正切函数$y=\operatorname{arc\,tg} x$ 的图象，可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arc\,tg} x=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arc\,tg} x=-\frac{\pi}{2}$ .又在研究函数的性态时，首先必须确定函数的定义域，然后才能进行研究。再如，求初等函数的导数时，必须能正确分解函数的复合步骤。因此，函数的定义和定义域、基本初等函数的图象和性质及复合函数的概念都是本章的重点。

函数的极限与无穷小是微积分中的两个重要的基本概念，是学习微积分的理论基础，微积分的许多基本概念，如函数的导数、函数的定积分等都是在极限与无穷小概念的基础上建立起来的。无穷小与具有极限的函数之间有着十分重要的关系，在推导复合函数的求导法则和建立函数微分的概念时都要用到。极限的四则运算法则是极限运算的重要依据，必须使学生熟练掌握。微积分中许多基本概念和基本理论都涉及到函数连续性的问题，而函数在某一点连续的概念又是讨论函数连续性的基础。如，函数在$(a, b)$内或$[a, b]$上的连续性，函数的间断点，以及初等函数在定义域内求极限的方法等都是从函数在某一点连续的概念出发来讨论的。所以函数极限的概念、无穷小、具有极限的函数与无穷小的关系、极限的运算法则、函数在某一点连续的概念等内容都是

本章的重点。

函数极限的概念学生不易理解，例如对 $x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$，以及 $x\to x_0$，$x\to x_0+0$，$x\to x_0-0$ 的各自含义；$f(x)\to A$，$f(x)\to\infty$，以及 $f(x)$ 不无限趋于一个确定的常数的含义；记号 $f(x_0+0)$ 与记号 $f(x_0-0)$ 的含义等等，学生都不容易理解和区别清楚。又如，在讨论分段函数在 $x\to x_0$ 时的极限时，学习往往不能正确利用 $f(x_0+0)$ 和 $f(x_0-0)$ 进行分析。因此函数极限的概念又是本章的一个难点，教学中要考虑学生接受的能力，尽量采用几何分析的方法，从学生熟知的函数图象出发，使学生观察在自变量的某种变化趋势下函数的变化趋势，有了感性认识之后，再给出相应的函数极限的描述性定义，切不要过高要求去讲解极限的分析定义。

学生对函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续的两种定义并不难理解，但在判定函数在某点是否连续，却感到困难。如，判定分段函数在分界点上的连续性时，常会出现不能正确选用适当的表达式来求左、右极限。因此判定函数在某点是否连续也是本章的难点。教学中要反复强调函数在某点连续的三个条件，结合图象分析产生错误的原因。

本章教学约需 24 课时，具体分配如下（仅供参考）：

| | | |
|---|---|---|
| §14-1 | 基本初等函数与初等函数 | 约 6 课时 |
| §14-2 | 数列的极限 | 约 2 课时 |
| §14-3 | 函数的极限 | 约 4 课时 |
| §14-4 | 极限的运算 | 约 2 课时 |
| §14-5 | 无穷小与无穷大 | 约 2 课时 |
| §14-6 | 两个重要的极限 | 约 2 课时 |
| §14-7 | 函数的连续性 | 约 4 课时 |

习题课　　　　　　　　　　　　　　　　　约 2 课时

## 三　教学建议

### §14-1　基本初等函数与初等函数

**1**．函数是微积分的主要研究对象．函数的定义、定义域、值域、函数的记号、函数的表示法、反函数等概念，以及五种基本初等函数的定义、定义域、图象和性质等内容，在本教材的第一册中都已讲过，但那时学生所获得的知识一般说来是不全面的，要求也是比较低的．因此，在学习微积分前，需要作一次扼要的、系统地复习，并作适当的加深，即在复习的基础上加强概念的完整性和系统性，使学生的认识有所深化，特别对初等函数能形成一个比较完整的观念．函数的定义可从单值对应引伸到多值对应，但仍以单值对应为主．对照函数的定义，指出常量 $y=C$ 也是函数．讲解函数定义时应着重从函数的定义域和函数的对应关系是确定函数的两个要素方面作些分析．例如，要让学生清楚地知道函数 $y=C$ 与 $y=0\cdot x+C$ 是相同的，而与 $y=Cx^0$ 是不相同的，因为 $y=C$ 与 $y=0\cdot x+C$ 的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，而 $y=Cx^0$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；又如，函数 $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$，函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$ 也分别是不相同的函数．为了帮助学生理解，可以作出这些函数的图象进行对比．

讲解函数的定义和定义域时，还应介绍以下的术语：“如果当自变量 $x$ 在区间 $(a,b)$ 内取任意值时，函数 $y$ 都有唯一确定的值和它对应，那末称函数 $y$ 在区间 $(a,b)$ 内有定

义，区间 $(a, b)$ 称为函数的定义区间。”一般说来，函数的定义域可以用区间来表示，但也有不能用区间来表示的情况。例如，函数 $y=\sqrt{x}+\sqrt{-x}$，它的定义域为 $x=0$，显然无法用区间表示。函数记号 $f(x)$ 与它在 $x=a$ 时函数值的记号 $f(a)$，学生往往不能清楚地区别。例如，在下一章学习导数时，常会出现“函数 $f(x)=x^2$ 在 $x=1$ 时的导数为 $f'(x)=2x=2$” 的错误写法，其原因就在于对 $f(x)$ 与 $f(a)$ 之间的关系混淆不清所致。讲解函数定义域时可按教材归纳的方法求，但需强调反正弦函数与反余弦函数的定义域是 $[-1, 1]$，而不是 $(-\infty, +\infty)$。

教材在复习函数的表示法时，举例介绍了分段函数。讲解时可从函数的定义加以说明，由于函数的定义域和对应关系一经确定，这个函数就确定了，至于函数的对应关系用什么方式给出却是无关紧要的，所以分段函数是一个函数而不是几个函数。对反函数的概念和求法，学生不难掌握，但需再次指出：(1) 当函数 $y=f(x)$ 的反对应关系是单值时，才有反函数，如果反对应关系不是单值，则需增加约束条件使其单值对应，否则，就没有反函数；(2) 函数 $y=f(x)$ 的反函数指的是以 $x$ 为自变量的反函数 $y=f^{-1}(x)$；(3) 函数 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 是互为反函数的，它们的定义域与值域互相交换；(4) 利用函数图象作其反函数图象时，直角坐标平面上横轴与纵轴的单位必须取得一致。

**2.** 函数四种特性的定义，以前没有正式给出，只在讨论幂函数、三角函数的性质时，从图象上分别说明了这四种特性在几何图形上的反映。因此，在讲解这些特性的定义时，最好先从具体函数为例作图象分析，再过渡到讲解正式定义。这样既可起到复习作用，也不致于使学生对定义的理

解发生困难. 要求学生对函数的奇偶性和单调性有较清楚的了解，能根据它们的定义进行判别. 例如，判别函数 $f(x)=x^2+\cos x$，$g(x)=\dfrac{\sin x}{x^2}$，$\varphi(x)=\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$ 在各自定义域内的奇偶性；判别函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ 在区间 $[0,+\infty)$ 内的单调性. 讲解函数有界性的定义时，要指出 $|f(x)|\leqslant M$ 中的等号"="表示函数 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内个别点的函数值的绝对值可以等于 $M$；如果 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内没有一个点的函数值的绝对值等于 $M$ 时，则上式就只是 $|f(x)|<M$. 若 $|f(x)|<M$，则函数 $f(x)$ 也是有界的. 还要强调，函数的有界性要针对某个区间来说，教材在 p. 11 列举了例子，如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内是无界的，在 $[1,2]$ 上是有界的. 对函数的有界性，要求不能过高，只要求学生能了解定义并知道它在图形上的反映. 讲解函数周期性的定义时，要指出周期 $l$ 是一个不为零的正数，它是个常数，如果函数以正数 $l$ 为周期，则 $2l$，$3l$，$\cdots$，$nl$ $(n\in N)$ 也是函数的周期，而把最小正数 $l$ 称为函数的最小正周期. 要求学生了解函数周期性的定义，并知道它在图形上的反映，要求学生熟悉三角函数的周期但不要求会判别任何一个函数是否是周期函数. 为提高学习兴趣，可让学生思考"常量函数 $f(x)=C$ 是不是周期函数?"回答是肯定的，因为 $f(x+l)=f(x)=C$，所以 $f(x)=C$ 是周期函数，它的周期 $l$ 是大于零的实数，但没有最小正周期.

**3.** 基本初等函数的内容可让学生课外复习，课内不必花时间再讲，但要通过适当方式（课堂提问或测验）检查学生是否熟悉这些内容. 复合函数是一个新的概念，学生初学

时不易掌握．讲解时可先举例，再对比着讲定义。例如，设有函数 $y=\ln u$，定义域为 $u>0$；$u=\sin x$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$。可以看出，只有对于 $x\in(2k\pi,(2k+1)\pi)$，$k\in Z$，才能有 $u>0$，再通过 $u$，$y$ 才有确定的值和它对应。这时把 $u=\sin x$ 代入 $y=\ln u$，得到的函数 $y=\ln\sin x$ 叫做 $x$ 的复合函数，它的定义域显然是 $(2k\pi,(2k+1)\pi)$，只是 $u=\sin x$ 定义域的一部分．接着按教材讲解复合函数的定义．要求学生既会将两个函数进行复合，也能将一个复合函数进行分解．要指出复合函数只要分解成基本初等函数或基本初等函数与常数的和、差、积、商的形式，就算分解完成了．分解的步骤由运算的最外层起逐层往里分解即可．除举教材上的例子外，还可多举一些例子，如 $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ 可分解为 $y=\sqrt{u}$，$u=\dfrac{x+1}{x-1}$；$y=\sin^2(2x^2-3)$ 可分解为 $y=u^2$，$u=\sin v$，$v=2x^2-3$．复合函数的分解过程不宜过于复杂，一般不超过两个中间变量．还应指出，不是任何两个函数都可复合成一个复合函数，书上已有这方面例子，在此不再重复．讲解初等函数的定义时，指出由基本初等函数构成初等函数时，有两个途径：一是作有限次的四则运算，二是作有限次的函数复合．前者虽未曾说及乘方与开方的运算，但通过幂函数的复合，可以包括这两种运算．教材举例说明了利用基本初等函数的图象作初等函数图象的方法．例子的类型大体上有：由函数 $y=f(x)$ 的图象作函数 $y=f(x+a)$，$y=f(x)+b$，$y=f(x+a)+b$，$y=|f(x)|$，$y=f(|x|)$ 等的图象．另外还举例介绍了图象的叠加法，如教材 P.21～P.22 的例 10 与例 11．

**4．** 关于建立函数关系式，教材列举了几何、物理、机械传动及脉冲电压等方面简单的实际问题．通过讲解，可引

导出建立函数关系式的一般步骤：

(1) 分析问题中哪些是变量，哪些是常量，用不同字母表示这些量，并确定其中一个变量为自变量；

(2) 根据问题所给的几何条件或物理规律或其它知识，找出变量之间的等量关系式，并进行整理化简；

(3) 根据问题所给条件，确定关系式中需要确定的常数的数值，并只保留一个自变量，即可得到所求的函数关系式；

(4) 由所得的函数关系，一般还需结合题意写出函数的定义域；

(5) 如果变量之间的关系式在自变量的各个取值范围内各不相同，则需进行分段考察，并将结果写成分段函数。

## §14-2 数列的极限

**1**．教材在第十三章里已经讲过数列是函数 $x_n=f(n)$ 按自然数顺序列出的一串函数值：$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$。本节将讨论当 $n$ 无限增大时，数列 $x_n=f(n)$ 的变化趋势，从而建立数列的极限的概念。为了使学生对“变化趋势”有较直观地认识，教材在 P.33 上就两个具体的、有代表性的、有极限的数列进行了分析。把数列的前几项分别在数轴上用点表示出来，观察当项数 $n$ 无限增大时，表示 $x_n$ 的点的移动趋势。可以看出，数列 (1) $x_n=\frac{1}{2^n}$，当 $n$ 无限增大时，表示 $x_n$ 的点越来越密集于点 $x=0$ 的右侧，即数列 $x_n$ 的值从正数无限减小而趋于 0。数列 (2) $x_n=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$，当 $n$ 无限增大时，表示 $x_n$ 的点越来越密集于点 $x=1$ 的左右