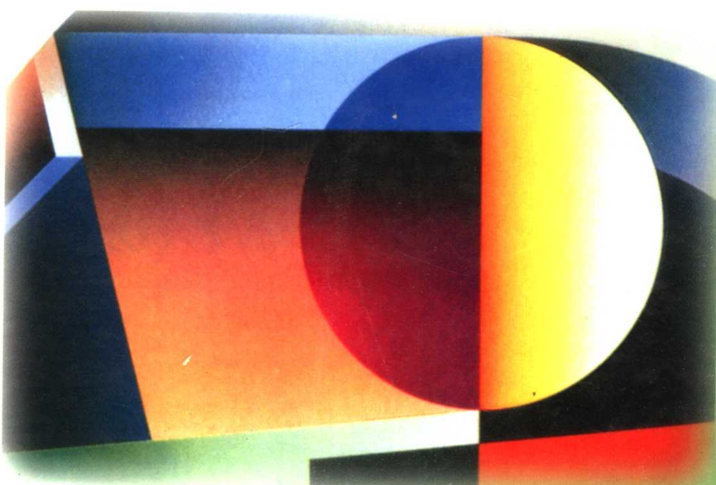
·大学教材系列·

ZHONGXUESHUXUE JIETISIXIANG FANGFA

中学数学解题思想方法

汤服成　祝炳宏　喻平　编著



广西师范大学出版社

中学数学解题思想方法

汤服成
祝炳宏　喻　平　编著

广西师范大学出版社

中学数学解题思想方法

汤服成　祝炳宏　喻　平　编著

责任编辑:宋铁莎　　　封面设计:杨　琳

广西师范大学出版社出版发行

(广西桂林市中华路 36 号　　邮政编码:541001)

广西师范大学出版社印刷厂印刷

*

开本:850×1168　1/32　　印张:9.75　　字数:256 千字

1998 年 8 月第 1 版　　2000 年 12 月第 2 次印刷

印数:1 001～3 000 册

ISBN 7-5633-2537-9/G·1848

定价:10.00 元

前　言

“问题是数学的心脏，问题解决是数学教育的核心”①．古往今来，无论是学习数学还是研究数学都离不开数学问题和数学问题的解决．我国的第一部数学专著《九章算术》所讨论的就是246个数学问题及其解题方法．美国20世纪80年代掀起的数学改革高潮，其中心就是问题解决．这一研究已风靡全世界，所有发达国家都极为重视．研究热潮经历10余年而不衰．

以勤奋、刻苦、聪慧著称于世的中国人，在数学问题解决的探索上为世界作出了杰出的贡献．攻克了最接近《哥德巴赫猜想》的所谓“1+2”结论的陈景润先生就是其中最突出的代表．现今我国有关数学教育的数十种报刊杂志，每年发表数以千计的论文，其中半数以上与数学解题有关，是数学问题的研究造就了我国数学界

① 戴再平：《数学方法与解题研究》，第1页，高等教育出版社1996年版．

一代又一代的英才.

在注重数学问题研究的同时,解题也一度把我国数以千万计的青少年学生推入"题海"的漩涡,使他们如牛负重、苦不堪言.这个问题至今尚未得到妥善解决,而且要彻底解决尚待时日.

经过改革开放近20年以来数学教育改革的探索与实践,从国家主管领导到广大专家与数学教育工作者已形成这样一个共识:要把学生从"题海"的重负下解放出来,要全面提高中学生的数学能力和数学思维的品质,关键是要进行数学思想方法的教育和学习.国家教委颁布的九年义务教育初中数学教学大纲和即将试行的改革的高中数学教学大纲,都把数学思想方法作为数学的基础知识加以强调,这一新颖提法特别醒目.与此相呼应,国家教委师范教育司主持制定的《普通高等师范学校数学专业教育教学基本要求(试行)》中,也把数学思维方法作为高师院校的教学基本内容列出.这说明以数学思想方法为中心的一场数学教育改革的高潮正在兴起.

勿庸晦言,数学思想方法的核心内容就是数学解题思想方法,一切思想方法都是为问题解决服务的,没有一种思想方法可以脱离数学问题独立存在和发展.

作为中学数学解题思想方法,它涉及的范围广、内容多,其核心内容就是"转化"的思想方法.我们对于数学问题的探索,都是沿"化难为易","化繁为简","化未知为已知"这样的途径进行的.徐利治先生提出的关系映射反演方法(即RMI方法)就是转化思想的理论模型.通过数学思想方法的教学,我们希望广大师生能够居高临下,以思维方法为导向,从方法论的高度来驾驭数学问题的解决,使广大学生从"题海"的桎梏中解脱出来.

80年代以来,随着广西师范大学数学与计算机科学系的数学课程的改革,我们在本、专科学生中相继开设了"中学数学解题思想方法"这门课程.十多年来,经过广大师生们的共同努力,使这门

课逐步成为学生们最受欢迎、收益最大、适用性最强的课程之一.本书就是 10 多年来作者努力的结晶.

作为中学教师必须掌握的数学思想方法的指导书，我们并没有也无必要对方法论中尚有争议的问题进行理论探索. 本书着重介绍了广大数学专家与教育工作者都认可的、在中学阶段学生们应该而且能够掌握的、且对将来具有实用价值的常用的数学思想方法. 实践性与适用性是本书的最大特色.

数学思想方法的研究目前正方兴未艾地蓬勃发展，不少问题在继续探索，未有定论，许多理论问题尚未完满解决. 因此，本书必

[illegible]

范教育司主持制定的《普通高等师范学校数学专业教育教学基本要求(试行)》中，也把数学思维方法作为高师院校的教学基本内容列出. 这说明以数学思想方法为中心的一场数学教育改革的高潮正在兴起.

勿庸晦言，数学思想方法的核心内容就是数学解题思想方法，一切思想方法都是为问题解决服务的，没有一种思想方法可以脱离数学问题独立存在和发展.

作为中学数学解题思想方法，它涉及的范围广、内容多，其核心内容就是“转化”的思想方法. 我们对于数学问题的探索，都是沿“化难为易”，“化繁为简”，“化未知为已知”这样的途径进行的. 徐利治先生提出的关系映射反演方法(即 RMI 方法)就是转化思想的理论模型. 通过数学思想方法的教学，我们希望广大师生能够居高临下，以思维方法为导向，从方法论的高度来驾驭数学问题的解决，使广大学生从“题海”的桎梏中解脱出来.

80 年代以来，随着广西师范大学数学与计算机科学系的数学课程的改革，我们在本、专科学生中相继开设了“中学数学解题思想方法”这门课程. 十多年来，经过广大师生们的共同努力，使这门

目　录

第一讲

绪　　论

数学作为一门科学,应该是数学思维活动过程和思维活动结果的综合,数学知识本身就是数学思维活动的产物,一般数学书籍所记载的都是数学思维活动成果的积累.正因为如此,数学教学就不仅仅是告诉和教会学生那些数学知识的条文,更不应该把反映思维过程的数学解题过程,通过“题海战术”变成机械的条件反射和死记硬背.数学教育更为重要的任务是通过揭示数学知识的逻辑关系和产生的思维过程,让学生认识并掌握这些思维方法,进而提高数学思维的品质和数学能力.而这一切都通过数学思想方法作为主线联系在一起.不少著名的教育家、心理学家和数学家不止一次地从不同的角度指出:当人们走出校门,踏上工作岗位之后,经过几年、十几年,大部分在学校中学到的数学知识都会被遗忘,即使是从事与数学有关的工作的人也不例外.而留在人们大脑中的是那些使人们受益终生的数学思想方法.这些论述足以说明在中学阶段加强数学思想方法教育的重要意义.由于问题解决是数学教育的核心,中学数学中的思想方法主要通过数学问题科学合

理的解决得以充分展示.

我们无论从数学认知结构的角度还是从数学概括的角度探索数学思维与能力的实质，都会发现数学思想方法的重要地位.数学认知结构是主体对数学知识结构的主观反映，正是由于数学思想方法的存在，才使得数学知识有机地联系在一起，显得结构上的协调与全面.另一方面，数学思想方法是数学知识相互联系的本质所在，是贯穿数学且具有强烈包摄性和概括性的思维观念.因此，数学思想方法的掌握能促进学生各种数学能力的发展.

在相当长的一段时间里，数学工作者与学生对数学思想方法

的，这种敏锐性主要体现在以下三个方面：

1. 记忆力强

心理学研究表明，少年儿童进入初中后的一段时间内，恰好是人的大脑皮层细胞成熟的第二个飞跃时期，也是学生思维发展的黄金阶段. 因此，在这段时间，学生的记忆力特别强，正如一张白纸，可以画最美丽的画卷. 实验表明，他们可以在短时间内在大脑里储存很大数量的信息，这些信息保持时间也比一般人长，而且当这些信息遗忘之后，也很容易通过复习或一定的刺激在短时间内恢复. 一旦形成长时记忆，可以保留很长时间，甚至形成终身记忆. 例如，在一节数学课内，学生完全可以把教师传授的知识记忆下来，能接受并模仿教师所示范的技能. 这对学生的数学学习极为有利，对学生掌握并逐渐形成自己特有的思维习惯与能力起决定性的作用. 利用学生思维的这一特点，可使学生建立起完善的思维方法.

2. 反应速度快

这里所说的反应速度快是指学生将从外界提取的信息与自己大脑中已有的认知结构的结合速度快，在应用时从大脑里提取所需的信息的速度快、反应速度快与记忆力强使得中学阶段成为学生学习的黄金阶段，也决定他们的知识基础和能力框架基本在这段时间形成.

3. 思维的角度新

由于中学生的年龄和心理特征，他们在思想上没有任何包袱与顾虑，他们常能从出乎教师意外的角度发现问题，并敢于提出自己突如其来的奇思妙想，而且也希望能以各种方式展示自己的思维才能. 在这种思维基础的土壤里，只要教师能因势利导，学生就能不断提高自己的思维层次，产生创造思维的火花，而如果引导不得法，则可能扼杀这种宝贵的思维苗头，使思想逐渐僵化.

在一次教育实习中，我们曾有这样的经历：

在一次课上，实习老师讲解一道例题，“求函数 $y=\frac{2x^2+4x+10}{x^2+2x+4}$的值域．”

按常规方法，首先把函数式变形为

$$(y-2)x^2+2(y-2)x+2(2y-5)=0.$$

由于 $y\neq2, x\in\mathrm{R}$，所以判别式

$$\Delta=[2(y-2)]^2-4(y-2)\cdot2(2y-5)\geqslant0 .$$

解此不等式，得 $2<y\leqslant\frac{8}{3}$.

当我们的实习老师话刚落音，立即就有一个学生提问：“已知函数式的分子、分母含变量 x 的项系数成比例，这个特征对解题是否有用”. 这是一个多么可贵的思维闪光啊！幸亏我们的实习老师是有备而来，恰好顺势引导，启发学生总结出另一解法：

$$y=\frac{2x^2+4x+10}{x^2+2x+4}=2+\frac{2}{(x+1)^2+3},$$

当 $x=-1$ 时，$y_{最大}=\frac{8}{3}$；而当 x 无限增大时，y 可无限接近于 2，即 $2<y\leqslant\frac{8}{3}$.

学生的大胆敏锐的提问与后来得到的这一突破常规的解题方法，充分显示了他们初生牛犊不怕虎的精神风貌，展示出他们思维的灵敏，使这节课收到很好的效果.

（二）中学生数学思维的不成熟性

中学生的年龄一般在 12～19 岁之间，他们年纪轻、阅历浅，必须逐年积累知识. 特别是他们没有实践经历，这些生理和心理的特征决定了他们思维的不成熟性. 这种不成熟性体现在以下几个方面：

1. 思维的指向性不够明确

思维的指向性即思维的目的性.在进行问题解决的思维过程中，可以经常发现，学生的思维比较散乱，无谓的试探较多，教育家称之为“布朗运动”式的试探.解题正确思路的发现，大多是由于大量探索、偶然发现的，并不是按正常而有规律的数学思想进行思索而得到的.

2. 思维的层次性不高

在课堂教学中我们发现，从教师讲述公式、法则、定理到运用这些知识进行课堂练习，一般来说，学生的困难并不大，似乎听得懂、记得住、也能用得上，也就是说对于机械模仿，学生是不困难

是否有用？这是一个多么可贵的思维闪光啊！幸亏我们的实习老师是有备而来，恰好顺势引导，启发学生总结出另一解法：

$$y=\frac{2x^2+4x+10}{x^2+2x+4}=2+\frac{2}{(x+1)^2+3},$$

当 $x=-1$ 时，$y_{最大}=\frac{8}{3}$；而当 x 无限增大时，y 可无限接近于 2，即 $2<y\leqslant\frac{8}{3}$.

学生的大胆敏锐的提问与后来得到的这一突破常规的解题方法，充分显示了他们初生牛犊不怕虎的精神风貌，展示出他们思维的灵敏，使这节课收到很好的效果.

（二）中学生数学思维的不成熟性

中学生的年龄一般在 12～19 岁之间，他们年纪轻、阅历浅，必须逐年积累知识.特别是他们没有实践经历，这些生理和心理的特征决定了他们思维的不成熟性.这种不成熟性体现在以下几个方面：

坐标 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$；

(2)写出以 AB 为直径的圆的方程；

(3)利用 A、F、B 共线，计算出 AB 的中点 M 到抛物线 $y^2=2px$ 的准线 $x=-\frac{p}{2}$的距离等于 AB 长的一半，从而得到证明.

以上解答思路清晰，但过程比较繁杂. 其实这个问题借用平面几何的知识极容易求解，现简解如下：

过焦点弦 AB 的两端点 A、B 及 AB 的中点 M 作抛物线 $y^2=2px$ 的准线 $x=-\frac{p}{2}$的垂线，垂足分别为 C、D、N. 由抛物线的定义知 $AF=AC$，$BF=BD$. 所以 $AB=AF+BF=AC+BD$. 而 MN 是梯形 $ABDC$ 的中位线，故有 $MN=\frac{1}{2}(AC+BD)=\frac{1}{2}AB$，这就

$$y=\frac{2x^2+4x+10}{x^2+2x+4}=2+\frac{2}{(x+1)^2+3},$$

当 $x=-1$ 时，$y_{最大}=\frac{8}{3}$；而当 x 无限增大时，y 可无限接近于 2，即 $2<y\leqslant\frac{8}{3}$.

学生的大胆敏锐的提问与后来得到的这一突破常规的解题方法，充分显示了他们初生牛犊不怕虎的精神风貌，展示出他们思维的灵敏，使这节课收到很好的效果.

(二)中学生数学思维的不成熟性

中学生的年龄一般在 12～19 岁之间，他们年纪轻、阅历浅，必须逐年积累知识. 特别是他们没有实践经历，这些生理和心理的特征决定了他们思维的不成熟性. 这种不成熟性体现在以下几个方面：

(①－②)÷2,得 $a_1+a_3+a_5=122$.

显然这一解法站得高,看得深,而且发展潜力大.它不但解答了本问题,而且可以发现,用此法还能求出 $a_0+a_2+a_4$,并且可以把此法进行推广.这种带有发展性的思想方法,其层次当然比原来的方法高出一筹.

需要指出的是,中学生思维的这种不稳定性不是一成不变的,它随着学习知识的增多、阅历的增加、能力的发展而逐步成熟,而教师对他们正确的思想方法的教育,正是促进这种不稳定性向稳定性发展的催化剂.

(三)中学生数学思维的可训练性

中学生数学思维既有其独特的优点,又有其发展阶段性的不足.如何在数学教学中保持、发扬其优点,克服、转变其不足,这是一个很值得探讨的课题.很多专家和教育工作者的研究与实践表明,中学生的数学思维经过教师的正确引导,是可以得到训练并不断提高的.

学生的数学思维状况,主要取决于学习主体的认知结构、已有的经验和非智力因素等三个方面.

1. 主体的认知结构

所谓主体的认知结构,一方面是指学习的数学知识,如概念、定理、公式、法则等的记忆状况;另一方面是指这些知识在主体头脑中储存的组合结构状况.知识记得牢,并且结构状况合理,那么在使用时就能按需要随意调用,得心应手.通过所学知识的不断增加和教师正确的引导,知识可以越来越完整、越系统,另外知识量的增加,可以对原有知识及它们的逻辑内涵认识更深,认知的结构也就会更合理.

值得注意的是,数学思想方法是数学知识的重要组成部分,只有掌握了数学思想方法,主体的认知结构才是完全的,而且数学知

识是数学思想方法的载体，通过思想方法可以把数学各类知识联结成一个有机的整体.

2. 已有的经验

数学中问题的解决是一种实践活动，其中包括大量的技能技巧. 这些技能技巧随着实践活动的强化和深入，可以不断得到巩固、发展和提高. 一方面，常用的解题方法的运用可以由被动向主动转化，最后达到自动化的程度；另一方面，随着新知识的增加，新技能的出现，个体的实践经验就不断丰富，思维状况就更加合理. 例如，随着几何、三角、解析几何等知识的学习，使得运用较高层次的形数结合的解题思想方法成为可能，再经过实践锻炼，就可以形成个体的经验，并可以把这种方法迁移到其他可能的范围.

3. 非智力因素

中学生的非智力因素通常是指注意力、意志、动机、态度、情绪等内容. 这些因素当然与先天的因素有关，但更重要的是，必须通过后天的教育、培养、训练，才能得以提高.

综上所述，我们可以认为，中学生的数学思维，通过知识学习的完整和深化，通过实践训练的不断加强，以及通过教师的科学地引导，完全可以不断发展和提高，充分发挥出他们思维的最大潜能.

二、怎样提高中学生的数学思维品质

我们已经论述了中学生的数学思维是可以培养与训练提高的. 诚然，每一位学生都希望提高自己的思维能力，他们的每一位教师，都希望提高自己学生的思维能力.

思维的能力是由个体的思维品质所决定的，思维品质是个体的能力特征，曹才翰先生在他的《数学教学概论》中指出，思维品质主要反映在思维的指向性、思维的广阔性、思维的深刻性、思维的

灵活性、思维的敏捷性、思维的创新性和思维的批判性等七个方面.要全面提高和改善这几方面的数学思维品质,关键是要学习和掌握正确合理的数学思想方法.

(一)提高思维的指向性

思维的指向性,即思维的目的性,是指在问题解决的过程中,主体始终保持正确的目标指向,并且始终按正确的指向进行努力.

前面我们提到,中学生在思维的指向性方面一开始是有缺陷的,这种思维品质经努力可以逐步完善,这主要可以从两方面进行努力.

一方面,主体在进行问题解决时,应经常提醒自己:问题的要求是什么?自己现在在干什么?是否偏离了方向?在分析问题时,必须时时注意使用综合法和分析法,从已知到结论,从结论到已知反复思考,这就可以始终把握住解题的方向,把着眼点全力集中指向问题的目标.

另一方面,加强兴趣的培养、意志的锻炼,使主体能主动地以不懈的精神控制自己的思想情绪,把握住自己的目标指向.在这方面,教师的正确引导和对学生学习热情的激励是非常必要的.

(二)提高思维的广阔性

思维的广阔性是指在研究数学问题时,视野宽广、思路开阔,善于从不同的方向、不同的角度对问题进行思考.要想思维广阔,就必须善于观察问题,并进行合理的联想,能及时发现问题的特征、差异、隐含关系等,能从各种角度揭示知识间的内在联系,全面理解问题.我们看一个例子.

例 3 已知$\frac{a-b}{1+ab}+\frac{b-c}{1+bc}+\frac{c-a}{1+ca}=0$.求证:$a$、$b$、$c$ 中至少有两个数相等.

问题从表面上看是一个条件恒等式的证明问题.如果用恒等变形的方法将已知等式变形,将陷入复杂的运算之中.

如果深入观察,可发现已知式的每一个分式与三角中的两角差的正切公式很相似.由此联想,可把问题转化到三角模式中进行试探:

设 $a=\tan\alpha, b=\tan\beta, c=\tan\gamma\left(\alpha、\beta、\gamma\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

已知条件变为

$$\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}+\frac{\tan\beta-\tan\gamma}{1+\tan\beta\tan\gamma}+\frac{\tan\gamma-\tan\alpha}{1+\tan\gamma\tan\alpha}=0,$$

即 $\tan(\alpha-\beta)+\tan(\beta-\gamma)+\tan(\gamma-\alpha)=0$.

因为$(\alpha-\beta)+(\beta-\gamma)+(\gamma-\alpha)=0$,联系三角中的有关结论,有

$$\begin{aligned}&\tan(\alpha-\beta)+\tan(\beta-\gamma)+\tan(\gamma-\alpha)\\=&\tan(\alpha-\beta)\tan(\beta-\gamma)\tan(\gamma-\alpha)=0,\end{aligned}$$

即得 $\frac{a-b}{1+ab}\cdot\frac{b-c}{1+bc}\cdot\frac{c-a}{1+ca}=0$.

由此容易得到结论.

如果按照模式转换的思路,我们又可把问题转化到方程模式中进行试探:

构造方程 $\frac{x-b}{1+xb}+\frac{b-c}{1+bc}+\frac{c-x}{1+cx}=0.$

容易验证 $a、b、c$ 是方程的三个实数根.

但是此方程去分母化简后只能得到一个一元二次方程,因此此方程最多只能有两个根.由此可知 $a、b、c$ 中至少有两个数相等.

上面两种符合问题规律的解法,都是由观察入手,深入挖掘出问题的实质而取得成功的.问题解决都用到转化的思想,因此加强转化思想的训练,如方程思想、函数思想、形数转换思想等等,对提高思维的广阔性是很有益的.