

大學叢書

高等代數學通論

波赫耳著
余介石譯

商務印書館發行

大學叢書

高等代數學通論

波赫耳著
余介石譯

商務印書館發行

一九三〇年三月初版

（50821平）

大學叢書
（教本）

高等代數學通論一冊

Introduction to Higher Algebra

定價 貳拾肆元

印刷地點外另加運費

35.000

版 權 所 有
翻 印 必 究

原 著 者 M. Bocher

譯 述 者 余 介 石

發 行 人 陳 懋 解

印 刷 所 商 務 印 刷 廠

發 行 所 商 務 印 書 館

（本書校對者胡適題）

原著者序

當美國學子進修高等算學時，每每關於代數中主要之理，至於其證法，更無待言矣。蓋彼於平直方程組，僅有初步知識，對二次方式之理，則毫無所知。在此種情形下之學子，於受代數學上之訓練時，往往一躍而作代數學中較專門部份之研究，如方程式理論，不變式(invariant)理論等科，但彼輩對代數之原理，既無真實之了解，故其作業遂不得不流為純然機械之計算，本書之目的，即在指導學生研習高等代數，一方面使其能明代數學中證法之意義，並悉其中最基本事理之證法，在他一方面，使其能熟習往昔未嫻之代數中重要諸結果。

此書之目標，確如書名所示，實為高等代數之一引論，而非其綱要，著者之努力，寧求建立一充分廣闊之基礎，為讀者他日進研之助，而不在僅論一理，使之達於邏輯上之完備。故對重要之理，如加羅亞氏 (Galois) 之理論，及不變式之系統研究，雖皆缺去，亦不必引為遺憾也。如此則教材不無有所選擇，茲所選者，皆因其在幾何及解析中，大有裨助之理，而代數與幾何之關係，全書始終甚重視之。但同時著者深記本書所應論者，首為代數，而非解析幾何，故所提及之幾何材料，皆

屬偶及，自無系統可言。

習本書者應預修者，僅爲初等代數中二次方程及在其前各部份，至於行列式之知識以及算學歸納法，則在大學一年級時，有一二星期，即不難授畢。然此書初非爲未成熟之讀者而作，學生宜有二三載之高等算學訓練，尤須習過解析幾何及微積分始能合用。事實上，關於解析幾何，尤應有良好之初步知識。

各節後習題，爲本書之重要部份，蓋不僅予學子以自行思考其所習科目之機會，且在若干情形中，至少欲使其得數種補充定理之綱要。例如西薇斯德之秩欠定律(Sylvester's law of nullity) (見 § 25 後第 8 題)，直交變換(orthogonal transformations) (§§ 52, 59 後諸題)及四次二元方式(biquadratic binary form)之不變式原理 (§ 90 後諸題)皆是。

初習第一至第七諸章時，或覺以略去 §§ 10, 11, 18, 19, 20, 25, 27, 34, 35 爲宜。此後讀者即可進修二次方式(quadratic form)之理(第八章至第十三章)。如欲選習第十四至第十九諸章中所論之較普遍問題，亦無不可。

本書中最高深及特殊之部份，自爲論初等除式(elementary divisors)諸章(第二十章至第二十二章)。如有僅欲明此而不欲習其他部份者，應首先明瞭 §§ 19 (略去其中定理一)，21—25, 36, 42, 43 之內容。

在此種之著作中，似不宜列載若干參考書籍，而誌明取

材所自之舉,亦可不必。但克倫尼克(Kronecker)及夫奴柏努斯(Frobinuis)二大算學家之著述,對於此類書籍之性質,有斷然之影響,故其姓氏,應特爲標出。著者更對同事奧茲谷德(Os-good)教授,謹致謝忱,因其於第十四至十六諸章,有所指示與批評也。

近十年中著者在哈佛(Harvard)大學,講授此科,結果遂成是書。然苟非得余昔日弟子度發爾(Duval)君之助,此書或迄未成編,此亦余所深感者也。

德譯本序言

此譯本大部份皆力求忠實，較之原書僅缺數小註，因其僅與美國有關，而為德讀者，所不感興趣者也。然譯本中曾補入若干習題，為原本所無。定理之次序，皆與原書相同，以便二書可以對照。

1909, 伯克 (Beck) 識

近十五年來，因是書之倡，代數學有廣大之發展，故書中頗有可使簡短之處。惟原著者已逝，無由商取其同意，故仍其舊，未加改訂，僅於書末，加一補註。譯者為輔助本書，使其易解起見，有一小冊，名 (Elementarste Algebra, eine Einführung in die Axiomatik)，可供預習之需。

1924, 伯克

士達德(Study)氏序

余友譯是書既成，將出而問世，囑綴數語於書端，以作介紹。本書著者，雖曰有此盛意，余實愧不敢當，且亦殊可不必蓋以著者聲望之隆，凡睹其名者即可知是書內容之完善，而毋待余之辭費也。

願著述此書之目的，在充教材之用，於此容可稍貢數語。吾人現有之算學教本，殊鮮佳者。就目前號稱為良好教本而論，其內容能適合大多數要求者，實不易得。考其原因，乃由於近來算學之進步極速，研究斯學者，又多傑出之士，內容遂日新月異，致昔所認為良好之教本，於今已不免有陳腐之嫌矣。算學進展既速，材料日益豐富，著述者既須顧及教材之完善，又須求內容之明達，故算學進展速，編製益覺不易。苟僅對於材料，有妥善之整理與支配，定理得以證明，不得即認為已盡著述之能事。此外更應使習算者知何由可得算學之真理，初學者對於一理之結果及預習事項，往往無分析能力，是宜以自己之眼光，洞燭一理之成立，從自己之立場，對算學之美，有活潑之感覺。

著書者欲滿足上述之要求，克服一切困難，非有教學之

天才不可,但能兼有算學天才,編製天才,教學天才三者,實屬難能人事。以余個人觀之,本書對此要求,皆能勝任愉快,此至足慶幸者也。

本書除高次方程式理論,*尙付闕如外,其他代數上普通講授材料,無不備具,用作教授初學之課本,既不嫌少,亦不覺多,實吾人至今尙缺之良書也。此書附論幾何甚詳。蓋以代數中若干名詞,出於幾何,爲求初學解徹底明瞭起見,不得不從詳也。總之著者不輕加無益之材料,以累讀者,更不避一切煩勞,以助初學之易解。再本書名詞之命名,均經著者之精密考慮,極爲適當,尤爲特色。凡欲得精密簡明之解釋,循序漸進之練習材料,使初學者能逐漸爲獨立之研究,實屬捨此書莫屬。想此書問世後,當不難得多數之讀者,以顯其良好成績也。

士達德識

*即指加羅亞氏之理論,如欲知其理,可閱 L. E. Dickson: Modern Algebraic Theories, chap. VII—X. Burnside and Pantan: Theory of Equations, vol. II. Cojori: Modern Theory of Equations, chap. X—XIX. 諸書。

譯者序

此書目的及價值，已詳原序及士達德 (Study) 氏序中，不待譯者再贅。譯者在國立中央大學，曾講授此課二次，即以是書爲教本，就經驗所及，覺其頗適合我國學子程度，而能助讀者精進，緣不揣譾陋，從事逐譯，以供我國習算者之參考。原書間有微細之錯誤 (p. p. 91, 111, 130, 145, 162, 212, 274, 303)，今皆據伯克 (beck) 氏德譯本第二版 (1932) 爲之訂正，伯氏譯本中，增添之附註及習題，亦逐條補入。又原書中定理，頗多留待讀者自證，此爲讀者練習之機會，譯者何敢強作解人。惟其中間有數則，須參考他書，始能明其證法者，則特爲補出，列入附錄，以便於讀者。但代數學基本定理，任何方程式論之書籍，殆無不言及，故其證明，仍行略去。

譯述本書時，得國立中央大學算學系主任周家樹教授，金陵大學算學系主任余光燧教授之指導甚多，至爲心感。張濟華、程道彌、彭少如、陸子芬、徐子豪、劉古傑、黃祖瑜、李修睦、張伯康諸先生，對譯稿亦多臂助匡正之處，謹同此志謝。追思五載前，隨故教授杜子荃先生後，研習此科，當日情景，猶歷歷如在目前，今譯稿成，而末由就正，尤足令人愴懷靡已者也。

民國二二年春譯者謹識。

時次國立中央大學算學系：

(VII)

目 次

第一章 多項式及其基本性質	1
1. 一元多項式	1
2. 含若干元之多項式	4
習題	9
3. 幾何解釋	10
習題	13
4. 齊次坐標	14
5. 多項式之綿續性	17
6. 代數學之基本定理	20
習題	24
第二章 行列式之數種特性	25
7. 定義數則	25
習題	30
8. 拉普拉斯展開式	30
習題	33
9. 乘法定理	33
10. 加邊行列式	35

11. 附屬行列式及其子式	38
第三章 平直關係論	43
12. 定義及預備定理	43
13. 常數組成平直相關之條件	45
習題	47
14. 多項式之平直關係	48
15. 幾何解釋	49
習題	48
第四章 平直方程式	54
16. 非齊次之平直方程式	54
習題	58
17. 齊次平直方程式	59
習題	62
18. 齊次平直方程式諸解中之基本系	62
習題	66
第五章 關於方陣之秩之數定理	68
19. 一般之方陣	68
習題	70
20. 對稱方陣	71
習題	74
第六章 平直變換與方陣運算	76
21. 以方陣為複素量	76

習題	79
22. 方陣之乘法	79
習題	83
23. 平直變換	83
24. 直射變換	86
習題	93
25. 方陣運算法續論	93
習題	100
26. 組系及羣	101
27. 同形性	105
習題	109
第七章 不變式 初步原理及例	111
28. 絕對不變式,幾何代數及算術不變式	111
習題	115
29. 相合	116
30. 一組點或一組一次方式之秩爲不變量	118
31. 相對不變式及同步不變式	120
32. 關於一次方式之數定理	126
習題	129
33. 交比,調合分段	129
習題	134
34. 平面坐標及逆步變數	135

35. 空間之直線坐標	138
習題	142
第八章 二組元一次方程式	144
36. 代數上之理論	144
習題	147
37. 幾何上之一應用	147
習題	148
第九章 自幾何方面引入二次方式之研究	150
38. 二次曲面及其切線與切面	150
習題	154
39. 共軛點及極面	154
40. 二次曲面以其秩而分類	156
習題	158
41. 化二次曲面之方程式爲法式	158
習題	160
第十章 二次方式	162
42. 普通二次方式及其極	162
43. 二次方式之方陣及判別式	164
44. 二次方式之頂點	165
習題	167
45. 化二次方式爲平方之和	167
習題	171

46. 法式及二次方式之相合.....	172
習題.....	174
47. 可約性	174
48. 二次方式之整有理不變式	176
49. 化二次方式爲平方項之和之第二法	178
第十一章 實二次方式	185
50. 定號律	185
習題.....	188
51. 實二次方式之分類	189
習題.....	192
52. 有定方式及無定方式	192
習題.....	197
第十二章 二次方式與一或數平直方式合成之組	199
53. 平面及直線與一二次曲面之關係.....	199
習題.....	203
54. 附屬二次方式及其他不變式	204
習題.....	207
55. 附屬方式之秩.....	208
第十三章 一對二次方式	210
56. 一對錐線	210
57. 一對二次方式之不變式及其 λ 方程式.....	212
58. λ 方程式無重根時,化得法式之法.....	215

習題	219
59. ψ 爲非異及有定時,化爲法式之法	219
習題	222
第十四章 一般多項式之若干性質	224
60. 因式及可約性	224
習題	226
61. 一般行列式及對稱行列式之不可約性	227
習題	228
62. 相當之齊次及非齊次多項式	229
63. 多項式之除式	232
64. 多項式之特性變換	236
習題	239
第十五章 一元多項式及二元方式之因式與公因式 ...	240
65. 一元多項式及二元方式因式分解之基本定 理	240
習題	242
66. 正整數之最大公因數	242
習題	245
67. 二一元多項式之最大公因式	245
68. 二一元多項式之消元式	249
69. 以行列式所表最大公因式	253
70. 若干方程式之公根,消元法	254

71. $a_0=0$ 及 $b_0=0$ 之情形	257
72. 兩二元方式之消元式	259
第十六章 二元或多元多項式之因式	261
73. 二元多項式之僅含一變數因式	261
習題	264
74. 二元多項式最大公因式之算法	264
75. 二元多項式之因式	268
習題	272
76. 三元或多元多項式之因式	272
習題	278
第十七章 整有理不變式之普遍定理	279
77. 不變式因式之不變性	279
習題	281
78. 研究相對不變式較為普遍之一方法	281
習題	284
79. 不變式及同步不變式之齊權性	284
80. 幾何性質及齊次原則	290
習題	293
81. 齊次不變式	294
習題	301
82. 二元方式之消元式及判別式	301
習題	305