孟 杰 刘用麟 著

BCI-代数引论

AN INTRODUCTION TO BCI-ALGEBRAS

陕西科学技术出版社

● 责任编辑　赵生久　● 封面设计　郑晓都

内容提要

本书共六章：一、BCI-代数的基本概念和一般理论；二、p-半单BCI-代数，正定关联BCI-代数，拟可换BCI-代数等9种特殊类型的BCI-代数；三、BCI-代数的理想理论，包括闭理想，p-理想，可换理想，固执理想等13种特殊类型的理想；四、BCI-代数的p-半单部分和结合部分，讨论p-半单部分成为理想的各种条件，由此引入了KL-积BCI-代数的概念；五、给出BCI-代数的若干扩张方法，列出了3~6阶真BCI-代数一览表，以备读者查阅；六、逻辑代数的一个综述。

ISBN 7-5369-3243-X

9 787536 932432 >

ISBN 7-5369-3243-X/O・127

定价：22.00元

BCI-代数引论

An Introduction to BCI-algebras

孟　杰　刘用麟　著

Jie Meng, Young Lin Liu

陕 西 科 学 技 术 出 版 社

Shaanxi Scientific and Technological Press

2001.7.　Xian

图书在版编目(CIP)数据

BCI-代数引论/孟杰,刘用麟著.—西安:陕西科学技术出版社,2001.7

ISBN 7-5369-3243-X

I.B... Ⅱ.①孟...②刘... Ⅲ.布尔代数-概论 Ⅳ.0153.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 24468 号

AMS Subject Classifications:03G25 06F35 06A11

BCI-代数引论

作　　者 孟　杰　刘用麟著

责任编辑 赵生久

出 版 者 陕西科学技术出版社

西安北大街 131 号　邮编 710003

电话(029)7212206　7260001

发 行 者 陕西科学技术出版社

印　　刷 西安百花印刷厂

规　　格 850mm×1168mm　1/32 开本

印　　张 11.25 印张

字　　数 273 千字

印　　数 1~1000 册

版　　次 2001 年 7 月第 1 版

2001 年 7 月第 1 次印刷

书　　号 ISBN7-5369-3243-X/O·127

定　　价 22.00 元

(如有印装质量问题,请与承印厂联系调换)

序　言

BCK-代数和BCI-代数是20世纪60年代日本数学家K. Iséki提出的两类抽象代数，它们是组合逻辑中BCK-系统和BCI-系统的代数表述。从序的观点看，BCK-代数和BCI-代数的本质差别在于：在BCK-代数中元素0是最小元，而在BCI-代数中元素0是极小元；反映在定义中，BCK-代数满足条件 $0*x=0$ ，而BCI-代数不满足这个条件。恰恰是这一点，给BCI-代数的研究带来了极大的困难，直到1979年连一个真BCI-代数(即是BCI-代数但不是BCK-代数)的例子也未找到。从1980年到1985年有三篇文章打破了BCI-代数研究的困境。首先是K. Iséki[7]，他用给BCK-代数添加一点的办法构造了真BCI-代数，在本书中我们称这个办法为“一点扩张”。其次是胡庆平和K. Iséki(井关清志)[1]，引入了结合BCI-代数的概念，并证明了这类代数等价于对合群。一个代数是结合的当且仅当它满足条件 $0*x=x$ 。受到这一结果的启发，雷天德(T. D. Lei)[2]引入了广义结合BCI-代数，即满足条件 $0*(0*x)=x$ 的BCI-代数。该文扩充后同年由T. D. Lei and C. C. Xi[1]以“p-radical in BCI-algebras”为题发表在Math. Japon. 30(1985)，511－517。在后一篇文章中，他们称广义结合BCI-代数为 p-semisimple BCI-algebras。雷天德教授还证明了 p-semisimple BCI-algebras等价于Abel-群。从此以后，众多学者对BCI-代数进行了广泛的研究，取得了许多有趣结果，引起国际学术界的重视。美国数学会编辑的“Math. Reviews”和欧洲数学会等编辑的“Zentralblatt MATH”的Math. Subject Classification 1991和2000专门列入条目“06F35 BCK-algebras, BCI-algebras”，美国科技情报所(Institute for Scientific Information，简称ISI)的科学引

文索引(Science Citation Index 简称 SCI)经常检索这方面文章。

中国的研究者们对 BCK-代数和 BCI-代数的发展做出了突出的贡献，先后出版了有关 BCK-代数和 BCI-代数的专著和油印讲义：

雷天德，蒲义书：BCK-代数和 BCI-代数(铅印本)，1983 年。

陈昭木：BCK-代数和 BCI-代数(油印本)，福建师范大学数学系，1983 年。

雷天德：BCI-代数(油印讲义)，陕西师范大学数学系，1984 年。

胡庆平：BCI-代数，陕西科学技术出版社，1987 年。

孟 杰：BCK-代数讲义(油印本)，西北大学数学系，1990 年。

J. Meng and Y. B. Jun：BCK-algebras，Kyung Moon Sa，Seoul，1994.

以上著作的出版，推动了 BCK-代数和 BCI-代数研究的普及和深入。

本书专门讲述 BCI-代数的理论。有关 BCK-代数的知识，可以参考上述著作，特别是 J. Meng and Y. B. Jun 的专著“BCK-algebras”。

在第 1 章，我们介绍了 BCI-代数的一般理论。读者应当仔细研读节 1.3，原子和分支的知识是 BCI-代数的基本概念和基本工具。

第 2 章介绍了九类特殊的 BCI-代数。其中节 2.4～节 2.9 的基本想法是把 BCK-代数中的有关概念推广到 BCI-代数中。具有条件(S)的 BCI-代数和拟可换 BCI-代数的引入形式上完全与相应的 BCK-代数相同，没有遇到困难。但是可换(正定关联，关联)BCI-代数的提出，遇到了较大的困难。原因是满足可换(正定关联，关联)BCK-代数定义中相应恒等式的 BCI-代数必是 BCK-代数。因此，要引入可换(正定关联，关联)BCI-代数，就必须寻找新

的条件。这里要遵循三条原则：一是存在真 BCI-代数满足这样的条件；二是可换(正定关联，关联)BCK-代数满足这样的条件；三是可换(正定关联，关联)BCI-代数尽可能多地保留相应 BCK-代数的性质。这件工作由孟杰，辛小龙[2]，[4]，[5]和 M. A. Chandhry [1]，[2]较好地完成了。

BCI-代数研究的重点之一就是它的理想理论。在第 3 章，我们介绍了 13 种特殊类型的理想。为了用理想去刻划特殊类型的 BCI-代数，提出了结合理想，拟结合理想，p-理想，正定关联理想，可换理想和关联理想。BCI-代数的理想和 BCK-代数的理想定义形式尽管相同，但却存在本质的差别：BCK-代数的理想必是子代数，但 BCI-代数的理想可能不是子代数。由此产生了闭理想，强理想，(*)-理想和 Nil-理想的研究。

第 4 章重点讨论了 BCI-代数的 p-半单部分 $L(X)$和结合部分 $G(X)$成为理想的条件，由此自然引入了 KL-积 BCI-代数的概念。

在第 5 章，介绍了 BCI-代数的几种扩张方法。在节 5.3 给出了 3～6 阶真 BCI-代数一览表，可供读者利用。

自从布尔代数诞生以来，用代数方法研究逻辑问题受到数学家的重视，从而产生了各种各样的代数系统。这些代数系统被称为逻辑代数。有关逻辑代数之间关系的研究，分散在各种文献中。在第 6 章，我们综述了 30 多种逻辑代数的关系，发现一个重要结论：BCK/BCI-代数是处理逻辑代数的一个统一框架。

BCI-代数的内容相当丰富，它与数理逻辑，抽象代数，拓扑学和模糊数学等有广泛联系，在这样一本小册子里不可能对它作全面介绍。本书内容的选择完全由作者的研究兴趣决定。为了弥补这一不足，我们列出了尽可能详细的参考文献。

1999～2000 学年度，刘用麟副教授作为访问学者在西北大学进修，与孟杰教授合作完成了本书初稿的写作。孟杰负责第 1 章，第 2 章和第 3 章节 1～9 的写作，刘用麟负责其余部分的写作，最

后由孟杰统稿修改。

在本书写作过程中，我们得到各方人士的帮助，在此表示衷心的感谢。我们衷心感谢日本的 K. Iséki 教授和 S. Tanaka 教授，巴西的 J. M. Abe 教授，香港的岑嘉评教授，沙特的 A. B. Thaheem 教授。他们为作者及时提供了宝贵资料。衷心感谢多年与作者进行学术交流的雷天德教授，陈昭木教授，蒲义书教授，沈百英教授，胡庆平教授，姜豪教授，张群教授，朱怡权教授，黄益生教授，黄文平和张小红副教授。特别感谢我们的研究合作者 Young Bae Jun 教授，Hee Sik Kim 教授，辛小龙副教授和魏仕民教授。

本书第二作者感谢南平师专领导的大力支持和关心。

陕西省建筑科学研究设计院周蓉女士优良的打字排版为本书增色不少，在此表示衷心的感谢。另外也感谢陕西科学技术出版社编辑赵生久先生为本书出版付出的辛勤劳动。最后，感谢西北大学外语学院樊恒夫教授的大力帮助。

作　者

2001 年 1 月

Preface

BCK-algebras and BCI-algebras are two classes of the abstract algebras which were introduced by the Japanese mathematician Kiyoshi Iséki in 1960's, and they are algebraic formulations of BCK-system and BCI-system in the combinatory logic. From the point of view of ordering, the essential difference between BCK-algebras and BCI-algebras lies in the following: Element 0 is the least element in BCK-algebras, while it is a minimal element in BCI-algebras; as expressed in definitions, BCK-algebras satisfy the condition $0 * x = 0$ while BCI-algebras do not. This, and this alone, posed great difficulties to the exporation of BCK-algebras. So by 1979, when BCK-algebras had secured remarkable progress, BCI-algebras had made little substantial headway, not even a proper BCI-algebra sample (meaning BCI-algebras and not BCK-algebras) had yet been found. Starting from 1980, studies saw a real big advance and many attractive achievements, which aroused international attention in the field: The "(AMS) Mathematics Subject Classification 1991" edited by the American Mathematical Society and the "(Zentralblatt MATH) Mathematics Subject Classification 2000" edited by the European Mathematical Society have special entry the item" 06F35 BCK-algebras, BCI-algebras", and reseach papers in this field are often indexed by the Science Citation Index (SCI) of the U. S. Institute for Scientific Information (ISI).

Chinese researchers have made outstanding contributions to the development of BCK-algebras and BCI-algebras and published a great number of articles on BCK-algebras and BCI-algebras in international journals of mathematics.

This book deals with the theory of BCI-algebras. For the details on BCK-algebras we refer to "BCK-ALGEBRAS, Kyung Moon Sa Co., Seoul, 1994" by J. Meng and Y. B. Jun.

Chapter 1 contains the basics of general theory of BCI-algebras, which apply to all classes of BCI-algebras. The theory on atoms and branchs of BCI-algebras is of the basic concepts and tools, and for a better mastery of this knowledge, readers ought to read section 1.3 carefully.

In Chapter 2 we discussed nine special classes of BCI-algebras. Of these, sections 2.4～2.9 depict the basic ideas meant to generalize the concepts related to BCK-algebras into BCI-algebras. The forms of the defitions of BCI-algebras with conditions (S) and quasicommutative BCI-algebras are completely the same as those of corresponding BCK-algebras, respectively, and there were no difficulties ever found in the process. But great difficulties were met with in introducing definitions of commutative (resp. positive implicative, implicative) BCI-algebras. The reason is that the BCI-algebras satisfying the corresponding identities in definitions of commutative (resp. positive implicative, implicative)BCK-algebras must be the BCK-algebras. Therefore, new conditions must be sought in order to introduce commutative (resp. positive implicative, implicative) BCI-algebras. Here three principles are to be followed: (1) there exist proper BCI-algebras to satisfy such conditions; (2) the commutative (resp. positive implicative, implicative) BCK-algebras satisfy such conditions; and

(3) the commutative (resp. positive implicative, implicative) BCI-algebras keep as much properties as possible of corresponding BCK-algebras. This work has been fairly well done by J. Meng and X. L. Xin [2],[4],[5], and M. A. Chaudhry [1],[2].

One of the emphases for BCI-algebra studies is its ideal theory. In Chapter 3, we have explained 13 special classes of ideals. To characterize special classes of BCI-algebras by ideals, reseachers have introdeuced the concepts of associative ideals, quasiassociative ideals, p-ideals, positive implicative ideals, commutative ideals and implicative ideals. While the definition of ideals in BCI-algebras and one in BCK-algebras are remain the same, there still exists the following qualitative difference: ideals of BCK-algebras have to be subalgebras but ideals of BCI-algebras might not one. Hence research of closed ideals, strong ideals, (*)-ideals and Nil-ideals is necessary.

Chapter 4 focuses the discussion on the condition for the p-semisimple part $L(X)$ (resp. the associative part $G(X)$) of a BCI-algebra X to be an ideal of X, and by the way the concept of KL-product BCI-algebras is introduced.

Several ways of BCI-algebra extension are suggested in Chapter 5. A table of proper BCI-algebras of orders 3—6 is provided in section 5.3 for reader's reference.

Ever since the birth of Boolean algebras, due attenttion has been given by mathematicians to the study of logic problems by using algebraic methods, and therefore various algebraic systems have come into being. These algebraic systems are called logic algebras. And the investigation of the connections among logic algebras can be found scattered in many kinds of literatures. In

Chapter 6, we have given a survey of the connections among 30 more classes of logic algebras and have an important discovery: BCK/BCI-algebras constitute a unifying framework for treatment of logic algebras.

BCI-algebras has very rich connotations and is widely connected with mathematical logics, abstract algebras, topologies, fuzzy mathematics, and so on. This book, limited for its size, cannot deal with it more comprehensively. The choice of topics of this book most certainly reflects the authors' interests.

Jie Meng
Department of Mathematics
Northwest University
Xian 710069
People's Republic of China

Yong Lin Liu
Department of Mathematics
Nanping Teachers College
Nanping 353000, Fujian
People's Republic of China

January 2001

目　录

第 1 章　一般理论

1.1　基本性质

本节将给出 BCI- 代数的基本性质.

定义 1.1.1　一个(2,0)型的代数 $\langle X;*,0\rangle$ 叫做 BCI- 代数，如果它满足：

BCI-1　$((x*y)*(x*z))*(z*y)=0$;

BCI-2　$(x*(x*y))*y=0$;

BCI-3　$x*x=0$;

BCI-4　$x*y=y*x=0$ 蕴涵 $x=y$.

如果规定 $x\leqslant y$ 当且仅当 $x*y=0$,上述公理也可写为

$(x*y)*(x*z)\leqslant z*y$;

$x*(x*y)\leqslant y$;

$x\leqslant x$;

$x\leqslant y$ 和 $y\leqslant x$ 蕴涵 $x=y$.

注 1　BCK- 代数是 BCI- 代数公理系中增加公理 $0*x=0$ 而成. 所以 BCK- 代数必是 BCI- 代数.

例 1.1.1　$X=\{0,1\}$, $*$ 运算如下表

$*$	0	1
0	0	1
1	1	0

容易验证$\langle X;*,0\rangle$是一个BCI-代数.由于$0*1=1\neq 0$,所以它不是BCK-代数.

注 2 此例说明BCK-代数类是BCI-代数类的一个真子类.今后我们称一个不是BCK-代数的BCI-代数为真BCI-代数.

定理 1.1.1 设$\langle X;*,0\rangle$是一个BCI-代数,则$\forall x\in X$,$x*0=0$蕴涵$x=0$(即$x\leqslant 0$蕴涵$x=0$,这表明0是一个极小元).

证明 设$x*0=0$.由BCI-3和BCI-2得

$$0*x=(x*0)*x=(x*(x*x))*x=0,$$

此式与$x*0=0$结合,利用BCI-4得$x=0$. □

注 3 K. Iséki[2]所给BCI-代数的公理系统是BCI-1～BCI-4和$x*0=0$蕴涵$x=0$.杭州大学姜豪首先证明了定理1.1.1,表明K. Iséki的公理系统是不独立的.这一重要结果于1985年发表在姜豪,田正平[1]中.

关于BCI-代数的一般性质,有下述

定理 1.1.2 假设$\langle X;*,0\rangle$是一个BCI-代数,下列结论成立:

(i) 若$x\leqslant y$,则$z*y\leqslant z*x$;

(ii)　若 $x \leqslant y$ 和 $y \leqslant z$,则 $x \leqslant z$;

(iii)　$(x * y) * z = (x * z) * y$;

(iv)　$(x * z) * (y * z) \leqslant x * y$;

(v)　$x \leqslant y$ 蕴涵 $x * z \leqslant y * z$ 和 $z * y \leqslant z * x$;

(vi)　$x * 0 = x$.

证明　设 $x \leqslant y$,则

$$(z * y) * (z * x) \leqslant (x * y) = 0,$$

所以 $z * y \leqslant z * x$. (i) 成立.

如果 $x \leqslant y$ 和 $y \leqslant z$,那么由(i)得 $x * z \leqslant x * y$. 再由 $x \leqslant y$ 得 $x * y = 0$,于是 $x * z \leqslant 0$. 所以 $x \leqslant z$. 这就证明了,$x \leqslant y$ 和 $y \leqslant z$ 蕴涵 $x \leqslant z$. (ii) 成立.

因为 $x * (x * z) \leqslant z$,由(i)得

$$(x * y) * z \leqslant (x * y) * (x * (x * z)) \leqslant (x * z) * y.$$

相反的不等式由交换 y 和 z 的位置可得. 所以

$$(x * y) * z = (x * z) * y.$$

(iii) 成立.

由 BCI-1 和(iii)得

$$\begin{aligned}&((x * z) * (y * z)) * (x * y)\\ =\ &((x * z) * (x * y)) * (y * z)\\ =\ &0,\end{aligned}$$

所以 $(x * z) * (y * z) \leqslant x * y$. (iv) 成立.

由(iii)和(iv)直接得(v).

因为 $x * (x * 0) \leqslant 0$,所以 $x \leqslant x * 0$. 相反地,由(iii)和 BCI-3,我们有

$$(x * 0) * x = (x * x) * 0 = 0 * 0 = 0,$$

因此 $x * 0 \leqslant 0$. 所以 $x = x * 0$. (iv) 成立. □