全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

高等教育自学考试同步辅导/同步训练

高等数学（工专）

滕桂兰　郭洪芝　主编

中国人事出版社

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

高等教育自学考试同步辅导/同步训练

高等数学（工专）

主　编　　滕桂兰　郭洪芝
副主编　　张津萍　薛　晖

中国人事出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等教育自学考试同步辅导·同步训练:高等数学:工专/滕桂兰,郭洪芝主编.—北京:中国人事出版社,1999.10

ISBN 7-80139-411-9

Ⅰ.高… Ⅱ.①滕…②郭… Ⅲ.高等数学-高等教育-自学考试-自学参考资料 Ⅳ.G642.479

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 64718 号

中国人事出版社出版

100101 北京朝阳区育慧里 5 号

新 华 书 店 经 销

北京新丰印刷厂印刷

*

1999 年 10 月 第 1 版 1999 年 10 月第 1 次印刷

开本:850×1168 毫米 1/32 印张:17

字数:380 千字 印数:1～10 000 册

定价:18.50 元

(图书出现印装问题,本社负责调换)

编写说明

本书是全国高等教育自学考试大纲、教材的配套辅导用书。

编写依据：

1. 全国高等教育自学考试指导委员会颁布的《高等数学（工专）自学考试大纲》；

2. 指定教材《高等数学（工专）》（陆庆乐、马知恩主编，高等教育出版社出版）。

本书特点：

本书以自学考试大纲规定的考核知识点及能力层次为线索，按指定教材分章辅导，主要针对考核要求，对每一个知识点按照实际考题类型列举大量例题，并作出详尽的解答及分析，并配备大量的练习题（含参考答案）及综合测试题．旨在帮助应试者迅速而全面地掌握本课程的内容、熟悉应试题型、掌握应试中所必需的技巧，取得理想的应试效果。

本书亦是编者长期从事该课程教学、多年从事该课程自学考试辅导的经验的结晶，相信本书的出版，对广大考生学习本课程具有切实的指导意义。

限于编者的学识与水平，疏漏之处敬请批评指正。

编　者

1999年10月

目 录

第一篇 函数 极限 连续

第一章 函数……………………………………………………………… (1)
基本要求………………………………………………………………… (1)
例题与例题分析………………………………………………………… (2)
练习题 …………………………………………………………………… (11)
自测题 …………………………………………………………………… (13)
参考答案 ………………………………………………………………… (15)
第二章 极限概念、函数的连续性 ……………………………………… (17)
基本要求 ………………………………………………………………… (17)
例题与例题分析 ………………………………………………………… (21)
练习题 …………………………………………………………………… (36)
自测题 …………………………………………………………………… (41)
参考答案 ………………………………………………………………… (44)

第二篇 一元函数微分学

第三章 导数与微分 ……………………………………………………… (48)
基本要求 ………………………………………………………………… (48)
例题与例题分析 ………………………………………………………… (51)
练习题 …………………………………………………………………… (71)
自测题 …………………………………………………………………… (77)
参考答案 ………………………………………………………………… (83)
第四章 微分学应用 ……………………………………………………… (92)
基本要求 ………………………………………………………………… (92)

例题与例题分析 …………………………………………………… (94)
练习题……………………………………………………………… (120)
自测题……………………………………………………………… (126)
参考答案…………………………………………………………… (130)

第三篇　一元函数积分学

第五章　不定积分概念与积分法……………………………… (140)
基本要求…………………………………………………………… (140)
例题与例题分析…………………………………………………… (143)
练习题……………………………………………………………… (169)
自测题……………………………………………………………… (174)
参考答案…………………………………………………………… (179)
第六章　定积分及其应用…………………………………………… (195)
基本要求…………………………………………………………… (195)
例题与例题分析…………………………………………………… (199)
练习题……………………………………………………………… (235)
自测题……………………………………………………………… (245)
参考答案…………………………………………………………… (251)

第四篇　多元函数微积分简介

第七章　空间解析几何……………………………………………… (268)
基本要求…………………………………………………………… (268)
例题与例题分析…………………………………………………… (272)
练习题……………………………………………………………… (292)
自测题……………………………………………………………… (299)
参考答案…………………………………………………………… (303)
第八章　多元函数微分学…………………………………………… (311)

基本要求……………………………………………………（311）
例题与例题分析………………………………………………（314）
练习题……………………………………………………（333）
自测题……………………………………………………（339）
参考答案……………………………………………………（343）
第九章　多元函数积分学……………………………………（353）
基本要求……………………………………………………（353）
例题与例题分析………………………………………………（356）
练习题……………………………………………………（375）
自测题……………………………………………………（379）
参考答案……………………………………………………（383）

第五篇　常微分方程与无穷级数

第十章　常微分方程…………………………………………（395）
基本要求……………………………………………………（395）
例题与例题分析………………………………………………（398）
练习题……………………………………………………（412）
自测题……………………………………………………（414）
参考答案……………………………………………………（416）
第十一章　无穷级数…………………………………………（421）
基本要求……………………………………………………（421）
例题与例题分析………………………………………………（423）
练习题……………………………………………………（447）
自测题……………………………………………………（452）
参考答案……………………………………………………（457）
模拟试题一………………………………………………（462）
参考答案……………………………………………………（467）

模拟试题二 ………………………………………………… (470)
参考答案 ………………………………………………… (475)
1998 **年上半年全国统考试题** …………………………… (480)
参考答案 ………………………………………………… (486)
1998 **年下半年全国统考试题** …………………………… (489)
参考答案 ………………………………………………… (495)
1999 **年上半年全国统考试题** …………………………… (499)
参考答案 ………………………………………………… (506)

第一篇　函数 极限 连续

第一章　函　数

基本要求

考核要求：

1. 一元函数的定义，要求达到"领会"层次.

1.1　熟知并会叙述函数的定义，知道定义的两个要素——定义域和对应规则.

1.2　认知函数记号 $y=f(x)$ 中 $f(\quad)$ 的含义.

1.3　能区分 $f(x)$ 与 $f(a)$(a 为常数).

1.4　能区分单值函数与多值函数.

1.5　会计算函数值.

2. 函数的表示法，要求达到"识记"层次.

2.1　知道函数的三种表示法(包括分段表示法).

2.2　能说出三种表示法各自的优缺点.

3. 函数的简单性态，要求达到"简单应用"层次.

3.1　知道四种简单性态—有界性、单调性、奇偶性、周期性的含义.

3.2　会判定一些比较简单的函数是否具有某些简单性质.

4. 函数的增量，要求达到"领会"层次.

4.1　理解函数增量的概念，写出它的表达式，并会计算函数的增量.

4.2　知道增量的几何意义.

5. 反函数及其图形，要求达到"领会"层次.

5.1　弄清反函数的概念.

5.2　知道在同一坐标系中如何从函数 $y=f(x)$ 的图形作出其反函数 $y=\phi(x)$ 的图形.

6. 复合函数,要求达到"综合应用"层次.

6.1　弄清中间变量在函数复合中的作用.

6.2　会求复合函数的定义域,并会求复合函数的值.

6.3　会把两个函数复合成一个函数,反之也会把一个函数分解成两个比较简单的函数的复合.

7. 基本初等函数与初等函数,要求达到"领会"层次.

7.1　牢记基本初等函数的定义域、性态及其图形.

7.2　牢记反三角函数的主值范围.

7.3　知道初等函数的构成.

本章重点、难点:

重点:函数概念与初等函数;难点:复合函数.

例题与例题分析

单项选择题

1. 函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-6}}+\lg(3x-8)$ 的定义域是(　　)

(A) $(-\infty,-2)\cup(\dfrac{8}{3},+\infty)$　　(B) $(\dfrac{8}{3},+\infty)$

(C) $(3,+\infty)$　　(D) $(-\infty,-2)$

解　选(C)

由　$x^2-x-6>0$,得 $x>3$ 或 $x<-2$;由 $3x-8>0$,得 $x>\dfrac{8}{3}$,所以函数的定义域为 $(3,+\infty)$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases} x & |x|<1 \\ 2 & 1\leqslant x\leqslant 3 \end{cases}$,则 $f(x-2)$ 的定义域是

(　　)

(A)$[-1,3]$　(B)$(-1,3]$　(C)$[1,5]$　(D)$(1,5]$

解　选(D)

因为　$f(x)$ 的定义域是$(-1,3]$,故由 $-1<x-2\leqslant 3$,得 $1<x\leqslant 5$,所以 $f(x-2)$ 的定义域为$(1,5]$.

3. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为$[-1,2]$,则函数 $F(x)=f(x+2)+f(2x)$ 的定义域是(　　)

(A)$[-3,0]$　　(B)$[-3,1]$

(C)$[-\frac{1}{2},1]$　　(D)$[-\frac{1}{2},0]$

解　选(D)

因为 $f(x)$ 的定义域为$[-1,2]$,所以有

$$\begin{cases}-1\leqslant x+2\leqslant 2\\ -1\leqslant 2x\leqslant 2\end{cases}\quad 得\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 0\\ -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

故 $F(x)$ 的定义域为$[-\frac{1}{2},0]$.

4. 设 $y=f(\lg x)$ 的定义域为$[\frac{1}{2},2]$,则 $y=f(x)$ 的定义域为(　　)

(A)$[\frac{1}{2},2]$　　(B)$[\sqrt{10},100]$

(C)$[-\lg 2,\lg 2]$　　(D)$[0,1]$

解　选(C)

因为 $\lg x$ 为单调增函数,所以在$[\frac{1}{2},2]$上 $\lg\frac{1}{2}\leqslant\lg x\leqslant\lg 2$,故 $f(x)$ 的定义域为$[\lg\frac{1}{2},\lg 2]$,即$[-\lg 2,\lg 2]$.

5. 设 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$,则 $f(\frac{1}{f(x)})=$(　　)

(A) $\frac{1}{2+x^2}$　　(B) $\frac{1}{1+(1+x^2)^2}$

(C)$1+x^2$,　　　　(D)$1+(1+x^2)^2$

解　选(B)

因 $\frac{1}{f(x)}=1+x^2$，所以 $f(\frac{1}{f(x)})=f(1+x^2)=\frac{1}{1+(1+x^2)^2}$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}2 & |x|\leqslant 2\\ 1 & |x|>2\end{cases}$,则 $f[f(x)]=($　　$)$

(A)2　(B)1　(C)$f(x)$　(D)$[f(x)]^2$

解　选(A)

$$f[f(x)]=\begin{cases}2 & |f(x)|\leqslant 2\\ 1 & |f(x)|>2,\end{cases}$$

由假设,对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$,$|f(x)|\leqslant 2$,故 $f[f(x)]=2$.

7. 设　$f(1-2x)=1-\frac{2}{x}$,则 $f(x)=($　　$)$

(A)$1+\frac{4}{1-x}$　　(B)$1-\frac{4}{1-x}$

(C)$1-\frac{2}{1-2x}$　　(D)$1+\frac{2}{1-2x}$

解　选(B)

令 $1-2x=t$,则 $x=\frac{1-t}{2}$,由 $f(1-2x)=1-\frac{2}{x}$ 得

$f(t)=1-\frac{2}{\frac{1-t}{2}}=1-\frac{4}{1-t}$,故 $f(x)=1-\frac{4}{1-x}$.

<另法>由 $f(1-2x)=1-\frac{2}{x}=1-\frac{4}{1-(1-2x)}$ 得 $f(x)=1-\frac{4}{1-x}$.

8. 设 $f(\sin\frac{x}{2})=1+\cos x$,则 $f(\cos\frac{x}{2})=($　　$)$

(A)$1-\cos x$　　(B)$-\cos x$

(C) $1+\cos x$　　(D) $1-\sin x$

解　选(A)

$f(\sin\frac{x}{2}) = 1+\cos x = 1+1-2\sin^2\frac{x}{2} = 2-2\sin x^2\frac{x}{2}$,

所以 $f(x)=2-2x^2$ 故 $f(\cos\frac{x}{2}) = 2-2\cos^2\frac{x}{2} = 2-(1+\cos x) = 1-\cos x$.

9. 下列各对函数中,是相同函数的是(　　)

(A) $f(x)=x\sqrt{x-1}$,　$\phi(x)=\sqrt{x^4-x^2}$

(B) $f(x)=\arcsin(\sin x)$　$\phi(x)=x$

(C) $f(x)=\lg x^2$,　$\phi(x)=2\lg x$

(D) $f(x)=1-\cos 2x$,　$\phi(x)=2\sin^2 x$

解　选(D)

因为(A)、(C) 中两函数的定义域不同,(B) 中两函数的对应规律不同,例 $f(\frac{3}{2}\pi)=-\frac{\pi}{2}$, $\phi(\frac{3}{2}\pi)=\frac{3}{2}\pi$.

10. 设 $f(x)$ 与 $\phi(x)$ 都是单调减函数,则 $f[\phi(x)]$(　　)

(A) 单调增　　(B) 单调减

(C) 有增有减　　(D) 不增不减

解　选(A)

因为当 $x_1<x_2$ 时, $\phi(x_1)>\phi(x_2)$, $f[\phi(x_1)]<f[\phi(x_2)]$.

11. 函数 $f(x)=\begin{cases} x & x<0 \\ x^2 & x\geqslant 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内(　　)

(A) 单调减　　(B) 单调增

(C) 有增有减　　(D) 不增不减

解　选(B)

由函数的图形不难看出函数图形是沿 x 轴正向上升的曲线.

12. 设函数 $f(x)=\frac{x(e^x-1)}{e^x+1}$,则该函数是(　　)

(A) 奇函数　　(B) 偶函数

(C) 非奇非偶函数　　　　(D) 单调函数

解　选(B)

函数 $f(x)$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$，且

$$f(-x)=\frac{-x(e^{-x}-1)}{e^{-x}+1}=\frac{-x\,\dfrac{1-e^{x}}{e^{x}}}{\dfrac{1+e^{x}}{e^{x}}}=$$

$\dfrac{x(e^{x}-1)}{e^{x}+1}=f(x)$ 所以 $f(x)$ 为偶函数.

13. 设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$有定义且为奇函数，若当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)=x(x-1)$，则当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=(\quad)$

(A) $-x(x+1)$　　　　(B) $x(x-1)$

(C) $x(-x+1)$　　　　(D) $x(x+1)$

解　选(A)

因为 $f(x)$ 为奇函数，故当 $x>0$ 时

$f(x)=-f(-x)=-[-x(-x-1)]=-x(x+1)$.

14. 设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上有定义，若 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，则 $g(f(x))$ 为(　　)

(A) 有界函数　　　　(B) 奇函数

(C) 偶函数　　　　(D) 非奇非偶函数

解　选(C)

因为 $g[f(-x)]=g[-f(x)]=g[f(x)]$，故 $g(f(x))$ 为偶函数.

15. 已知偶函数 $f(x)$ 在$[0,4]$上单调增，则 $f(-\pi)$ 和 $f(\log_{\frac{1}{2}}8)$ 的大小关系是(　　)

(A) $f(-\pi)<f(\log_{\frac{1}{2}}8)$　　(B) $f(-\pi)>f(\log_{\frac{1}{2}}8)$

(C) $f(-\pi)=f(\lg_{\frac{1}{2}}8)$　　(D) 不能确定

解 选(B)

因为 $f(x)$ 为偶函数且在 $[0,4]$ 上单调增，故 $f(x)$ 在 $[-4,0]$ 上单调减，又 $\log_{\frac{1}{2}}8=\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})^{-3}=-3>-\pi$，

故 $f(-\pi)>f(\log_{\frac{1}{2}}8)$.

16. 函数 $y=e^{-x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是(　　)

(A) 单调有界函数　　(B) 单调无界函数

(C) 有界奇函数　　(D) 有界偶函数

解 选(D)

$|e^{-x^2}|\leqslant 1$，且 $f(-x)=e^{-(-x)^2}=e^{-x^2}=f(x)$，即 $f(x)$ 有界且为偶函数.

17. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内(　　)

(A) 有界函数　　(B) 无界函数

(C) 上有界下无界　　(D) 上无界下有界

解 选(A)

因为 $(|x|-1)^2\geqslant 0$，即 $x^2+1\geqslant 2|x|$，于是 $\left|\dfrac{x}{1+x^2}\right|\leqslant\dfrac{2|x|}{1+x^2}\leqslant 1$.

18. 下列函数为周期函数的是(　　)

(A) $y=\sin x^2$　　(B) $y=x|\sin x|$

(C) $y=\arcsin 2x$　　(D) $y=\mathrm{tg}(3x-2)$

解 选(D)

因为 $\mathrm{tg}[3(x+\frac{\pi}{3})-2]=\mathrm{tg}(3x+\pi-2)=\mathrm{tg}[(3x-2)+\pi]=\mathrm{tg}(3x-2)$，所以 $y=\mathrm{tg}(3x-2)$ 是以 $\dfrac{\pi}{3}$ 为周期的周期函数.

19. 设 $f(x)$ 是以 3 为周期的奇函数，且 $f(-1)=-1$，则

$f(7)=($　　$)$

(A)1　　(B) -1　　(C)2　　(D) -2

解　选(A)

$f(7)=f(1+2\times 3)=f(1)=-f(-1)=-(-1)=1.$

20. 函数 $y=\log_4\sqrt{x}+\log_4 2$ 的反函数是(　　)

(A) $y=4^{2x-1}$　　(B) $y=4x-1$

(C) $y=2^{x-1}$　　(D) $y=4^{x-1}$

解　选(A)

由 $y=\log_4\sqrt{x}+\log_4 z=\log_{4^2}\sqrt{x}$ 得 $2\sqrt{x}=4^y$, $\sqrt{x}=\frac{1}{2}4^y$, $x=\frac{1}{4}\times 4^{2y}=4^{2y-1}$,故所求反函数 $y=4^{2x-1}$.

21. 设 $-\frac{1}{2}<x<0$,则 $y=\lg(1+x)+\lg(1-x)$ 的反函数是(　　)

(A) $y=\sqrt{1-10^x}\ (-\infty,0)$

(B) $y=-\sqrt{1-10^x}\ (-\infty,0)$

(C) $y=\sqrt{1-10^x}\ (\lg\frac{3}{4},0)$

(D) $y=-\sqrt{1-10^x}(\lg\frac{3}{4},0)$

解　选(D)

由 $y=\lg(1+x)+\lg(1-x)=\lg(1-x^2)$,得 $1-x^2=10^y$,因为当 $x\in(-\frac{1}{2},0)$ 时,得 $y\in(\lg\frac{3}{4},0)$,所以 $x=-\sqrt{1-10^y}$,故所求反函数为 $y=-\sqrt{1-10^x}$, $x\in(\lg\frac{3}{4},0)$.

22. 设 $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$,则 $f^{-1}(\frac{1}{2})=($　　$)$

(A) $\frac{1}{2}$　　(B)1　　(C)3　　(D)2

解　选(C)

设 $f^{-1}(\frac{1}{2})=l$,则 $f(l)=\frac{1}{2}$,即$\frac{l-1}{l+1}=\frac{1}{2}$,解得 $l=3$,即 $f^{-1}(\frac{1}{2})=3$.

23. 函数 $y=\begin{cases}x^2 & -2\leqslant x\leqslant 0\\ x^2-4 & 0\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$的反函数是(　　)

(A)$y=\begin{cases}\sqrt{x} & 0\leqslant x\leqslant 4\\ \sqrt{x+4} & 0<x\leqslant 2\end{cases}$

(B)$y=\begin{cases}-\sqrt{x} & 0\leqslant x\leqslant 4\\ \sqrt{x+4} & -4<x<0\end{cases}$

(C)$y=\begin{cases}-\sqrt{x} & 0\leqslant x\leqslant 4\\ -\sqrt{x+4} & -4\leqslant x<0\end{cases}$

(D)$y=\begin{cases}\sqrt{x} & 0\leqslant x\leqslant 4\\ -\sqrt{4+x} & -4\leqslant x<0\end{cases}$

解　选(B)

因为当 $-2\leqslant x\leqslant 0$ 时 $y=x^2,x=-\sqrt{y},0\leqslant y\leqslant 4$;当 $0<x\leqslant 2$ 时,$y=x^2-4,x=\sqrt{y+4},-4\leqslant y<0$,故所求反函数为 $y=\begin{cases}-\sqrt{x} & 0\leqslant x\leqslant 4\\ \sqrt{x+4} & -4<x<0\end{cases}$.

24. 设 $f(x)=\lg x$,函数 $g(x)$ 的反函数为 $g^{-1}(x)=\frac{2(x-1)}{x+1}$,则 $f[g(x)]=$(　　)

(A)$\lg\frac{2+y}{2-y}$　　(B)$\lg\frac{x+2}{x-2}$

(C)$\lg\frac{2+x}{2-x}$　　(D)$\frac{x-2}{x+2}$

解　选(C)

令 $g^{-1}(x)=y$,则 $y=\frac{2(x-1)}{x+1}$,解方程得 $x=\frac{2+y}{2-y}$,所以