高等数学

第四卷

（第三分册）

R. 罗 德 著

秦 裕 瑗 译

230

1

人民教育出版社

目　录

（第三分册）

第一章　曲面与空間曲綫坐标

1. 第三卷§1至§4的练习题

曲面的解析表达式．切平面．弧长元素．曲面的法綫．面积元素．空間的曲綫坐标．体积元素．

1. 試求通过点(0, 0, 0), (3, 0, 0), (2, 2, 0), (1, 1, 3)的球面的方程．

解：中心的坐标 a, b, c 与球半徑 R 由四个方程来决定，它們是通过給定的坐标代入方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

而得到的；解这四个方程就得

$$a=\frac{3}{2},\ b=\frac{1}{2},\ c=\frac{7}{6},\ R=\frac{\sqrt{139}}{6}.$$

2. 有三个球，半徑都是 $\rho=2$，它們的中心的位置矢量是 $\boldsymbol{m}_1=\{-4, -5, 1\}$, $\boldsymbol{m}_2=\{4, -5, 7\}$, $\boldsymbol{m}_3=\{-1, 7, -3\}$．試求把这三个球夹在中間的二切平面的方程．

解：这两个切平面与通过三个球心的平面相平行．所以这平面的法矢量

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{m}_2-\boldsymbol{m}_1)\times(\boldsymbol{m}_3-\boldsymbol{m}_1)=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 8 & 0 & 6 \\ 3 & 12 & -4 \end{vmatrix}=-72\boldsymbol{i}+50\boldsymbol{j}+96\boldsymbol{k}$$

也就是所求平面的法矢量．$\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{m}_1\pm\rho\boldsymbol{A}^0$ 是該二平面上一点的位置矢量．于是所求两平面的方程是

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{A}\boldsymbol{m}_1\pm\rho(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^0)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{m}_1\pm\rho|\boldsymbol{A}|.$$

結果是：　$-72x+50y+96z=394,\quad -72x+50y+96z=-126.$

3. 有两个球 K_1 与 K_2，半徑各为 $a_1=8$, $a_2=5$，中心的位置矢

量各为 $r_1=\{2,7,-9\}$, $r_2=\{6,4,3\}$, 它們在点 P 处相切. 試求 a) P 的位置矢量 R, b) 在 P 处公共切平面的方程.

解: a) 因为距离 $a=|r_2-r_1|=|\{4,-3,12\}|=13$ 被 P 分成比值 $a_1:a_2=8:5$, 所以 P 的位置矢量是

$$\overline{OP}=R=r_1+\frac{a_1}{a}(r_2-r_1)=r_2+\frac{a_2}{a}(r_1-r_2)=\left\{2+\frac{32}{13}, 7-\frac{24}{13}, -9+\frac{96}{13}\right\}=$$

$$=\left\{6-\frac{20}{13}, 4+\frac{15}{13}, 3-\frac{60}{13}\right\}=\left\{\frac{58}{13}, \frac{67}{13}, -\frac{21}{13}\right\}.$$

b) 公共切平面的法矢量是 $N=r_2-r_1$, 所以它的方程是 $Nr=NR$ 或 $4x-3y+12z=-17$.

4. 一中心为 $P=(5,-5,3)$ 而半徑为 $a=5$ 的球与平面 $9x-6y-2z=25$ 相截得一圓, 試求該圓的中心与半徑.

解: 平面方程的海塞法式是

$$\frac{1}{11}(9x-6y-2z)-\frac{25}{11}=\left\{\frac{9}{11}, -\frac{6}{11}, -\frac{2}{11}\right\}r-\frac{25}{11}=0.$$

因为它与点 P 的距离是 $\frac{44}{11}=4(<a)$, 所以它与球面相交, 截圓的中心的位置矢量为

$$m=\{5,-5,3\}+\frac{\lambda}{11}\{9,-6,-2\},$$

因为它在截平面上, 故 m 滿足平面方程, 我們得到

$$\frac{1}{11}\{9,-6,-2\}\cdot\{5,-5,3\}+\frac{1}{11^2}\lambda\{9,-6,-2\}^2-\frac{25}{11}=0,$$

或 $\frac{69}{11}+\lambda-\frac{25}{11}=0$, 所以 $\lambda=-4$. 截圓的半徑为 $\rho=\sqrt{25-16}=3$.

結果是: $$m=\left(5-\frac{36}{11}\right)i+\left(-5+\frac{24}{11}\right)j+\left(3+\frac{8}{11}\right)k$$

$$=\frac{1}{11}(19i-31j+41k).$$

5. 試把直綫 $x=a$, $z=0$ 从点 $(0,0,2)$ 投影到球面 $(r-k)^2=1$ 上.

解: 如果 $r_1=\{a,\eta,0\}$ 是直綫上一点的位置矢量, 又 $r_0=\{0,0,2\}$, 那末投影綫的方程是

$$r=r_0+\lambda(r_1-r_0)=\{\lambda a,\lambda\eta,2+\lambda(-2)\},$$

利用球的方程就得到交点要满足关系式

$$(\lambda a)^2+(\lambda\eta)^2+(1-2\lambda)^2=1,$$

从而 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\frac{4}{4+a^2+\eta^2}$; 所以投影綫与球面相交于点 $(0,0,2)$ 及 $\left(\frac{4a}{4+a^2+\eta^2},\ \frac{4\eta}{4+a^2+\eta^2},\ \frac{2(a^2+\eta^2)}{4+a^2+\eta^2}\right)$.

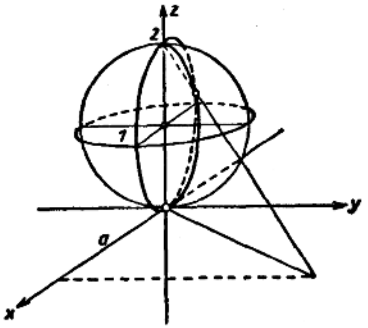

图 1

由图1可見，所給直綫在球面上的投影位于平面 $2x+az=2a$ 上，这是一个圆(球极投影)。

6. 設正圓錐的軸的单位矢量为**A**而頂角为2α，問它的方程为何？

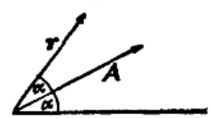

图 2

解：如果把原点置于圓錐的頂点处，从一条軸截綫(图2)来看，就得到方程

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{r}|\cos\alpha;\quad A_xx+A_yy+A_zz=r\cos\alpha;$$

$$(A_xx+A_yy+A_zz)^2=(x^2+y^2+z^2)\cos^2\alpha.$$

7. 試求两个正圓錐的交綫，这两个正圓錐分别以x軸及y軸为軸，頂角为2α及2β，且頂点都在原点。

解：因为两个圓錐的方程分别是 $\boldsymbol{r}\boldsymbol{i}=r\cos\alpha$ 及 $\boldsymbol{r}\boldsymbol{j}=r\cos\beta$，所以交綫的矢量方程为

$$\boldsymbol{r}=\{r\cos\alpha,r\cos\beta,\pm r\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}\}=$$
$$=r\{\cos\alpha,\cos\beta,\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}\}.$$

因为 $\boldsymbol{r}$ 有(两个)固定的方向，交綫是两条对称于xy平面、通过原点的直綫。只有当 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta\leqslant1$，或 $\cos^2\alpha\leqslant\sin^2\beta$，交綫才是实的，所以必須有 $\alpha+\beta\geqslant\frac{1}{2}\pi$.

8. 在以点 $M=(8,-1,3)$为中心、半徑为 $a=9$ 的球面上，有一点 $P=(2,-7,0)$，它是頂角为60°、軸通过点M的圓錐的頂点。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbo

試决定球面与圓錐的交綫所在的平面方程.

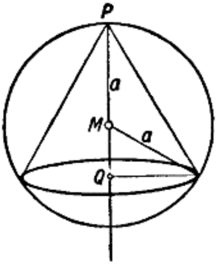

图　3

解: 矢量 $\overline{PM}=\boldsymbol{A}=\{6,\ 6,\ 3\}$ 是所求平面的法矢量, 如果 $\boldsymbol{r}_0$ 是平面上一点的位置矢量, 那末平面方程是 $\boldsymbol{Ar}=\boldsymbol{Ar}_0$. 圓錐的軸穿过平面的点 Q 就是这样的一个点. 我們有(图 3, 其中 $a=|\boldsymbol{A}|$)

$$\boldsymbol{r}_0=\overline{OQ}=\overline{OP}+\overline{PM}+\overline{MQ}=\overline{OP}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cos 60^\circ=$$

$$=\overline{OP}+\frac{3}{2}\boldsymbol{A}=\{11, 2, 4.5\}.$$

所以

$$\boldsymbol{Ar}=91.5.$$

結果是:

$$6x+6y+3z=91.5.$$

9. 試計算擺綫 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$繞 x 軸旋轉而成的旋轉体介于平面 $x=0$ 与 $x=x(t)$之間的体积.

解: $V=\pi\int_0^x y^2dx=\pi a^3\int_0^t(1-\cos t)^3dt$. 应用余弦的二倍角及三倍角公式, 就有

$$V=\pi a^3\int_0^t\left(1-3\cos t+\frac{3}{2}(1+\cos 2t)-\frac{1}{4}(\cos 3t+3\cos t)\right)dt=$$

$$=\pi a^3\left(\frac{5}{2}t-\frac{15}{4}\sin t+\frac{3}{4}\sin 2t-\frac{1}{12}\sin 3t\right)=$$

$$=\pi a^3\left(\frac{5}{2}t-4\sin t+\frac{3}{2}\sin t\cos t+\frac{1}{3}\sin^3 t\right).$$

10. 有一玻璃杯, 它是由曲綫 $y=\sinh x$ 繞正 y 軸旋轉而成的. 在杯中注入液体, 使液面升高到 1 时为止. 試計算液体的体积.

解:
$$V=\pi\int_{y=0}^{1}x^2dy=\pi\int_{x=0}^{\operatorname{ar\,sinh}1}x^2\cosh x\,dx=$$

$$=\pi\Big[x^2\sinh x-2x\cosh x+2\sinh x\Big]_0^{\operatorname{ar\,sinh}1}=$$

$$=\pi((\operatorname{ar\,sinh}1)^2-2\sqrt{2}\operatorname{ar\,sinh}1+2)=0.879.$$

11. 把抛物綫 $y^2=2px$ 繞离 y 軸距离为 a 的平行直綫 z 旋轉. 問旋轉面的方程如何, 又問介于高度为 z_1 与 z_2 而垂直于旋轉軸的两平面之間的旋轉体体积是多少(图 4)?

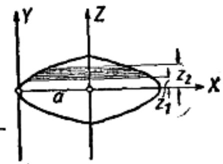

图 4

解: 旋轉曲面的方程是 $\left(a-\frac{z^2}{2p}\right)^2=r^2$,

$$V=\pi\int_{z_1}^{z_2} r^2 dz=\frac{\pi}{20p^2}(z_2^5-z_1^5)-\frac{\pi a}{3p}(z_2^3-z_1^3)+$$

$+\pi a^2(z_2-z_1)$.

12. 試計算延伸至无穷远的紡錘形的体积, 它是由曲綫 $y=$ $=xe^{-x}(x>0)$ 繞 x 軸旋轉得到的.

解:

$$V=\pi\int_0^\infty x^2 e^{-2x}dx=\pi\lim_{a\to\infty}\int_0^a x^2e^{-2x}dx=\pi\lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-2a}\left(a^2+a+\frac{1}{2}\right)\right)+\frac{\pi}{4}$$

(分部积分).

因为 $\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{a^2+a+\frac{1}{2}}{e^{2a}}=0$, 故 $V=\dfrac{\pi}{4}$.

13. 把阿基米德螺綫 $r=$ $=a\varphi$ 繞它的軸 $\varphi=0$ 旋轉一周, 試建立所得旋轉曲面的方程(参閱第 25, 26 頁第 7 題)①.

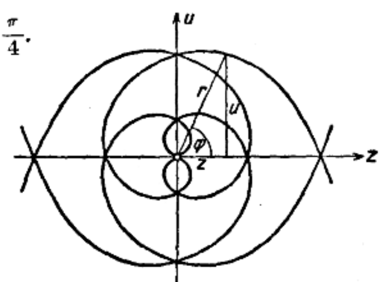

图 5

解: 由图 5, 得到 $z=r\cos\varphi$, $u=r\sin\varphi$; 又 $x=u\cos\theta$, $y=u\sin\theta$, 所以 $x=a\varphi\sin\varphi\cos\theta$, $y=a\varphi\sin\varphi\sin\theta$, $z=a\varphi\cos\varphi$; 因为 $u=\sqrt{x^2+y^2}=z\operatorname{tg}\varphi$ 及 $u^2+z^2=r^2=a^2\varphi^2$, 就得

$$\sqrt{x^2+y^2}=z\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{a}\right).$$

14. 有一正弦曲綫, 它通过原点, 周期为 h 且振幅为 a, 把它

① 本分册内括号里所指的是本书第三卷中譯本的頁碼及題次 —譯者.

繞它的长軸(即 x 軸)旋轉一周，这长軸同时也是螺距为 h 的螺旋曲面的軸．問这样得出的交綫如何？它的弧长是多少？

解：由正弦曲綫所得旋轉曲面的方程是 $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $r=a\sin\frac{2\pi}{h}z$. 螺旋曲面的方程是：$x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, z=\frac{h\varphi}{2\pi}$. 所以交綫的方程是($2\varphi=t$)：

$$\boldsymbol{r}=\frac{1}{2}a\sin t\,\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}a(1-\cos t)\,\boldsymbol{j}+\frac{ht}{4\pi}\boldsymbol{k}.$$

弧长是
$$s=\int_{t=0}^{4\pi}\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{h^2}{16\pi^2}}\,dt=\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}.$$

15. 試求錐面的方程，它的导綫是 $x=a\sinh t$, $y=a\cosh t$, $z=0$, 頂点是 $(0, 0, h)$. 提示：錐面上一点的位置矢量 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 是由两个矢量合成的，一个是导綫上一点 P 的位置矢量 $\overline{OP}$, 另一个矢量的方向是从 P 指向錐面的頂点 S.

解：$\overline{OP}=a\sinh u\boldsymbol{i}+a\cosh u\boldsymbol{j}$; $\overline{PS}=-a\sinh u\boldsymbol{i}-a\cosh u\boldsymbol{j}+h\boldsymbol{k}$.

所以 $\boldsymbol{r}(u, v)=\overline{OP}+v\overline{PS}=a\sinh u\cdot(1-v)\boldsymbol{i}+a\cosh u\cdot(1-v)\boldsymbol{j}+vh\boldsymbol{k}$.

16. 試求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与橢圓柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(b^2\leqslant a^2)$ 的交綫的弧长.

解：a) 由这两个方程消去 x, 就得到交綫是球面上的两个大圓，它們在平面 $z=\pm\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}\cdot y$ 上．所以其周长为 $2\cdot 2\pi a$.

b) 如果把橢圓柱面的方程表作 $x=a\cos\varphi$, $y=b\sin\varphi$, 那末由球面方程得到 $z=\sqrt{a^2-b^2}\sin\varphi$, 又 $ds=ad\varphi$, 所以对于 $\frac{z}{y}>0$ 或者 $\frac{z}{y}<0$ 都有 $s=\int_0^{2\pi}ad\varphi=2\pi a$. 結果是：$4\pi a$.

17. 試决定曲面 $x^2+y^2-z=0$ 与 $4xy-z=0$ 的交綫(平面曲綫！)介于 $z=0$ 与 $z=2$ 之間的弧长．提示：把 z 作为参数，并計

算 $s=\int_0^2 \frac{ds}{dz}dz$.

解：由曲面方程作加法及减法得到

$$(x+y)^2=\frac{3}{2}z,\quad (x-y)^2=\frac{z}{2};$$

所以有 $$x=\sqrt{z}\,\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},\quad y=\sqrt{z}\,\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

及 $$ds=\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2+1}\,dz=\sqrt{1+\frac{1}{4z}}\,dz.$$

作置換 $4z=\sinh^2 t$，就得到

$$s=\frac{1}{2}\int_0^2\cosh^2 t\,dt=\frac{1}{4}\left[\operatorname{ar\,sinh}2\sqrt{z}+\sqrt{4z(1+4z)}\right]_0^2=$$

$$=\frac{1}{4}(\operatorname{ar\,sinh}2\sqrt{2}+6\sqrt{2})=2.56.$$

附言：因为 $\frac{y}{x}=2-\sqrt{3}=$ 常数，交綫是平面曲綫；这交綫是旋轉抛物面 $x^2+y^2-z=0$ 的軸截綫.

18. 試决定螺旋面(螺距为 h)与圓柱面(半徑为 a)的交綫，而螺旋面的軸在圓柱面上.

解：螺旋面的方程是 $z=\frac{h}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$，圓柱面的方程是 $(x-a)^2+y^2=a^2$. 令 $x-a=a\cos t$，那末就有 $y=a\sin t$，$z=\frac{h}{4\pi}t$；交綫是一螺旋綫(它的螺距等于所給螺旋面螺矩的一半).

19. 試計算下列交綫的弧长：a) 抛物柱面 $y^2=2px$ 与双曲抛物面 $xy=3pz$，b) 抛物柱面 $4ay=x^2$ 与双曲抛物面 $z^2=\frac{16}{9}xy$.

解：a) 由 $x=\frac{y^2}{2p}$，$z=\frac{y^3}{6p^2}$，得到

$$s=\int_0^y\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}\,dy=y+z.$$

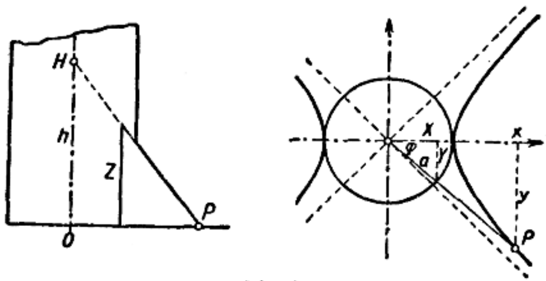

图 6

b) 由 $y=\frac{x^2}{4a}$, $z^2=\frac{4x^3}{9a}$, 相应地有 $s=x+y$.

20. 把等軸双曲綫 $x=a\cosh t, y=a\sinh t$ 从点 $(0,0,h)$ 投影到圓柱面 $X=a\cos\varphi, Y=a\sin\varphi$. 試决定投影曲綫的位置矢量, 于此我們把 t 当作参数.

解: 由图 6 得到比例关系

$$Z:h=(\sqrt{a^2\cosh^2 t+a^2\sinh^2 t}-a):(\sqrt{a^2\cosh^2 t+a^2\sinh^2 t}),$$

所以有

$$Z=h\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2\cosh^2 t+a^2\sinh^2 t}}\right)=h\left(1-\frac{1}{\sqrt{\cosh 2t}}\right).$$

又因为 $$y:x=Y:X,$$

所以 $$\operatorname{tgh} t=\operatorname{tg}\varphi.$$

于是由 $\cos^2\varphi=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}$ 有

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tgh}^2 t}}=\frac{\cosh t}{\sqrt{\cosh 2t}} \text{ 及 } \sin\varphi=\frac{\sinh t}{\sqrt{\cosh 2t}}.$$

我們得到

$$X=a\frac{\cosh t}{\sqrt{\cosh 2t}},\quad Y=a\frac{\sinh t}{\sqrt{\cosh 2t}} \text{ 及 } \boldsymbol{r}(t)=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}.$$

21. 試证: 曲綫 $\boldsymbol{r}(t)=e^t\cos t\boldsymbol{i}+e^t\sin t\boldsymbol{j}+e^t\sqrt{3}\boldsymbol{k}$ 在一以 z 軸为軸的圓錐面上, 再决定这圓錐的頂角 α.

解: $x^2+y^2=e^{2t}$, $z^2=3e^{2t}$, 所以 $x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2$;

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{z^2}}=\sqrt{\frac{1}{3}};\quad \alpha=\frac{\pi}{3}.$$

22. 問曲綫 $\boldsymbol{r}=t^2\cos(t^2)\boldsymbol{i}+t^2\sin(t^2)\boldsymbol{j}+\frac{2\sqrt{2}}{3}t^3\boldsymbol{k}$ 在什么旋轉曲面上？試决定这曲面的子午綫.

解：$x^2+y^2=t^4$，$z=\frac{2\sqrt{2}}{3}t^3$. 曲面方程是

$$(x^2+y^2)^3=\frac{81}{64}z^4.$$

当 $x=0$ 时 $y^6=\frac{81}{64}z^4$. 子午綫 $3z=(2y)^{3/2}$ 是一条半立方抛物綫.

23. 一半徑为 a 的圓柱面上有一螺旋綫，当圓柱面展成平面时，它成为一拋物綫. 試求这螺旋綫的方程.

解：拋物綫上一点的横坐标对应于圓柱底圓的弧长 $a\varphi$，纵坐标等于螺旋綫的高 z.

$$z=c(a\varphi)^2,\ \boldsymbol{r}(\varphi)=\{a\cos\varphi,\ a\sin\varphi,\ ca^2\varphi^2\}.$$

24. 問双曲拋物面 $az=xy$ 在点 (b,c,z_0) 处的切平面方程如何？

解：$z_0=\frac{bc}{a}$；$a(z-z_0)=c(x-b)+b(y-c)$ 或 $cx+by-az=bc$.

25. 問螺旋面 $\boldsymbol{r}=u\cos v\boldsymbol{i}+u\sin v\boldsymbol{j}+cv\boldsymbol{k}$ 上任意一点处的切平面方程如何？这平面与原点的距离是多少？

解：曲面的单位法綫矢量記作 $\boldsymbol{N}$，$\boldsymbol{R}=\{\xi,\eta,\zeta\}$ 表示切平面上一点的位置矢量，那末切平面的方程是 $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})=0$（参閱§2(10)）. 現在

$$\boldsymbol{N}=(\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)^0=(\{\cos v,\ \sin v,\ 0\}\times\{-u\sin v,\ u\cos v,\ c\})^0=$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \cos v & \sin v & 0\\ -u\sin v & u\cos v & c\end{vmatrix}^0=\frac{c\sin v\boldsymbol{i}-c\cos v\boldsymbol{j}+u\boldsymbol{k}}{\sqrt{c^2+u^2}},$$

所以切平面的方程是

$$c\sin v\xi-c\cos v\eta+u\zeta=cuv.$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbo

平面与原点的距离是$\frac{cuv}{\sqrt{c^2+u^2}}$.

26. 試討論正劈錐面$\boldsymbol{r}=u\cos v\boldsymbol{i}+u\sin v\boldsymbol{j}+\varphi(v)\boldsymbol{k}$. 問切平面与原点的距离是多少？并证: a) 若$\varphi(v)=cv$,就得到通常的螺旋曲面, b)若$\varphi(v)=\sin 2v$,就得到普虑克劈錐面(第一卷§18.3). (参閱第24頁第1、2、3題.)

解: 由于当$v=$常数时$z=\varphi(v)=$常数及$\frac{y}{x}=\operatorname{tg}v=$常数, u曲綫是与z軸垂直相交的直綫. 由于$x^2+y^2=u^2$, z是任意的, v曲綫($u=$常数)是圓柱上的圓. 由

$$\boldsymbol{r}_u=\{\cos v, \sin v, 0\},\quad \boldsymbol{r}_v=\{-u\sin v, u\cos v, \varphi'(v)\},$$

$$E=\boldsymbol{r}_u^2=1,\quad F=\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v=0,\quad G=\boldsymbol{r}_v^2=\varphi'(v)^2+u^2,$$

就有

$$ds^2=du^2+(\varphi'(v)^2+u^2)dv^2.$$

面积元素为

$$do=\sqrt{\varphi'(v)^2+u^2}\,dudv.$$

曲面的法綫矢量为

$$\boldsymbol{N}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{\varphi'(v)\sin v\boldsymbol{i}-\varphi'(v)\cos v\boldsymbol{j}+u\boldsymbol{k}}{\sqrt{\varphi'(v)^2+u^2}}.$$

切平面方程的海塞法式是

$$\frac{(x-u\cos v)\sin v\varphi'(v)-(y-u\sin v)\cos v\varphi'(v)+(z-\varphi(v))u}{\sqrt{\varphi'(v)^2+u^2}}=0.$$

它离原点的距离是 $l_0=\frac{u\varphi(v)}{\sqrt{\varphi'(v)^2+u^2}}$.

a) 当$\varphi(v)=cv$,就有$x=u\cos v, y=u\sin v, z=cv$, 所以$z=c\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$;

b) 当 $\varphi(v)=\sin 2v$, 就有 $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=\sin 2v$, 所以 $z=\frac{2xy}{x^2+y^2}$(普虑克劈錐面).

27. 把悬鏈綫$y=c\cosh\frac{x}{c}$繞x軸旋轉一周就得到一个曲面, 叫做悬鏈面. 把子午綫的弧长当作u,把地理經度記作v, 試证这时弧长元素与螺旋面(§3.8)的弧长元素是相等的. (参閱第25頁第5題.)

解：先不取 u 而取緯圓的半徑 ρ 作为参数；于是按§3.7有

$$y=\rho\cos v,\quad z=\rho\sin v,$$

又因为 $\rho=c\cosh\frac{x}{c}$，故 $x=c\operatorname{ar}\cosh\frac{\rho}{c}$.

$$\boldsymbol{r}=c\operatorname{ar}\cosh\frac{\rho}{c}\boldsymbol{i}+\rho\cos v\boldsymbol{j}+\rho\sin v\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{r}_\rho=\left\{\frac{c}{\sqrt{\rho^2-c^2}},\ \cos v,\ \sin v\right\},$$

$$\boldsymbol{r}_v=\{0,\ -\rho\sin v,\ \rho\cos v\},$$

$$E=\frac{\rho^2}{\rho^2-c^2},\ F=0,\ G=\rho^2,\ 及$$

$$ds^2=\frac{\rho^2}{\rho^2-c^2}d\rho^2+\rho^2dv^2.$$

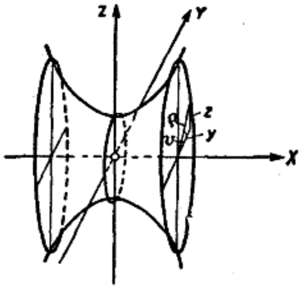

图 7

所以对于子午綫 $v=$ 常数，我們得到它的弧长

$$u=\int\frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2-c^2}}=\sqrt{\rho^2-c^2}+常数.$$

因此 $ds^2=du^2+(u^2+c^2)dv^2$ 与螺旋曲面(§3.8)的弧长元素的平方一致．两个曲面叫做可以相互貼合的，如果适当选取参数后，它們的弧长元素可以写成同一形式，因而它們的点就可以这样地相互对应起来，使得相应的曲綫段有相同的弧长．悬鏈面与螺旋面因而是可以相互貼合的．

28. 把悬鏈綫 $y=\cosh x$ a)繞 x 軸，b)繞 y 軸旋轉一周．試决定这两个旋轉曲面的弧长元素与面积元素．

解：a) 曲面的方程是

$$\boldsymbol{r}(u,v)=\{u,\ \cosh u\cos v,\ \cosh u\sin v\};$$

$$\boldsymbol{r}_u=\{1,\ \sinh u\cos v,\ \sinh u\sin v\},\ \boldsymbol{r}_v=\{0,\ -\cosh u\sin v,\ \cosh u\cos v\};$$

$$E=\cosh^2u=G,\quad F=0;$$

$$ds^2=\cosh^2u(du^2+dv^2),\quad do=\cosh^2u\,du\,dv.$$

b) 曲面的方程是

$$\boldsymbol{r}(u,v)=\{\operatorname{ar}\cosh u\cos v,\ u,\ \operatorname{ar}\cosh u\sin v\};$$

$$\boldsymbol{r}_u=\left\{\frac{\cos v}{\sqrt{u^2-1}},\ 1,\ \frac{\sin v}{\sqrt{u^2-1}}\right\},\ \boldsymbol{r}_v=\{-\operatorname{ar}\cosh u\sin v,\ 0,\ \operatorname{ar}\cosh u\cos v\};$$

$$E=\frac{u^2}{u^2-1},\quad F=0,\quad G=(\operatorname{ar}\cosh u)^2;$$

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2,\quad do = \frac{u\operatorname{ar\,cosh} u}{\sqrt{u^2-1}}dudv.$$

29. 試在曲面 $\boldsymbol{r}(u, v) = \{a(1-v)\sinh u,\ a(1-v)\cosh u,\ vh\}$ 上决定一点 (u_0, v_0)，使得在这点处，曲面的法綫通过原点. 提示：如果 $\boldsymbol{A}$ 是某一个在点 (u_0, v_0) 处与曲面垂直的矢量，那末可以决定这样的 t，使得

$$\boldsymbol{r}(u_0, v_0) + t\boldsymbol{A}(u_0, v_0) = 0. \qquad (*)$$

解：由关系式

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = a\{h(1-v)\sinh u,\ -h(1-v)\cosh u,\ -a(1-v)\}$$

及方程(*)得到关于三个分量的方程

$$a(1-v_0)(1+th)\sinh u_0 = 0,\quad a(1-v_0)(1-th)\cosh u_0 = 0,$$

$$v_0h - ta^2(1-v_0) = 0,$$

从而，因为 v_0 必須不等于 1，得 $t = \frac{1}{h}$，$u_0 = 0$，$v_0 = \frac{a^2}{a^2+h^2}$. 所以所求的点是

$$\boldsymbol{r}(u_0, v_0) = a\frac{h^2}{a^2+h^2}\boldsymbol{j} + h\frac{a^2}{a^2+h^2}\boldsymbol{k}.$$

它与原点的距离是

$$s = t|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{r}(u_0, v_0)| = \frac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}.$$

30. 螺旋面

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \{u\cos v, u\sin v, cv\}$$

在点 $u_0 = 2c$, $v_0 = 0$ 处的法綫与这螺旋面还于无穷多个别的点处相交. 試决定离这出发点最近的点 (u_1, v_1).

解：由关系式 $\boldsymbol{r}(u_0, v_0) + \lambda\boldsymbol{N}(u_0, v_0) = \boldsymbol{r}(u_1, v_1)$，又因为 $\boldsymbol{r}_u = \{\cos v, \sin v, 0\}$，$\boldsymbol{r}_v = \{-u\sin v, u\cos v, c\}$ 及 $\boldsymbol{N} \parallel \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \{c\sin v, -c\cos v, u\}$，所以在点 $u_0 = 2c$，$v_0 = 0$ 处成立等式：$2c = u_1\cos v_1$，$-\lambda c = u_1\sin v_1$，$2\lambda c = cv_1$；由此得到 $\operatorname{tg} v_1 = -\frac{\lambda}{2} = -\frac{v_1}{4}$. 这方程有无穷多个解；每一解对应法綫与曲面的一个交点. 离 (u_0, v_0) 最近的交点对应最小的解 v_1. 把 v_1 看作是曲綫 $y = \operatorname{tg} v_1$ 与 $y = -\frac{1}{4}v_1$ 的交点的横坐标，于是用图解法得到 $v_1 = \pm 2.570$，所

以

$$\lambda=\pm 1.285,\quad u_1=\frac{2c}{\cos v_1}=-2.38c,$$

$$\boldsymbol{r}(u_1, v_1)=2c\boldsymbol{i}-(\pm 1.285c)\boldsymbol{j}\pm 2.570c\boldsymbol{k}.$$

31. 問 $\boldsymbol{r}=\varphi(u, v)\cos v\boldsymbol{i}+\varphi(u, v)\sin v\boldsymbol{j}+cv\boldsymbol{k}$ 表示什么曲面？試确定 $\varphi(u, v)$，使得曲面上坐标网 (u,v) 的网角都等于一常数.（参閱第 26 頁第 8 題.）

解：因为 $x^2+y^2=(\varphi(u, v))^2$，$\frac{y}{x}=\operatorname{tg}v$，所以 $z=c\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$，曲面是通常的螺旋曲面；

$\boldsymbol{r}_u=\{\varphi_u\cos v, \varphi_u\sin v, 0\}$，$\boldsymbol{r}_v=\{\varphi_v\cos v-\varphi\sin v, \varphi_v\sin v+\varphi\cos v, c\}$.

因为 $E=\varphi_u^2$，$F=\varphi_u\varphi_v$，$G=\varphi_v^2+\varphi^2+c^2$，按 § 2.3, (5a)，就有

$$\cos\alpha=\frac{\varphi_v}{\sqrt{\varphi_v^2+\varphi^2+c^2}}.$$

要使这式子等于常数，那末作为是 v 的函数 φ 必須由微分方程 $\varphi_v^2=\operatorname{ctg}^2\alpha(\varphi^2+c^2)$ 来决定.

分离变量并对 v 作积分，得到

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2+c^2}}=v\operatorname{ctg}\alpha+f(u),$$

其中 $f(u)$ 是 u 的任意函数，在这里把它当作是积分常数．按第二卷 § 3(6)，这积分是 $\operatorname{ar}\sinh\frac{\varphi}{c}$，所以得出

$$\varphi=c\sinh(v\operatorname{ctg}\alpha+f(u)).$$

特别地这对情形 $\alpha=\frac{1}{2}\pi$ 也是适用的，于此 $\varphi=c\sinh(f(u))$ 变成 u 的一个任意函数.

32. 試证：曲面

$$\boldsymbol{r}(u, v)=\{a(\cos u-v\sin u), a(\sin u+v\cos u), c(u+v)\}$$

是通常的螺旋綫的切綫曲面，就是說，它是由这螺旋綫的切綫所构成；并再算出它的弧长元素与面积元素.

解：螺旋綫的方程是

$$\boldsymbol{r}(u)=\{a\cos u, a\sin u, cu\},$$

它的切綫是

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u)+v\boldsymbol{r}'(u)=\boldsymbol{r}(u)+v\{-a\sin u, a\cos u, c\}$$
$$=\{a\cos u-av\sin u, a\sin u+av\cos u, cu+cv\}=\boldsymbol{r}(u, v),$$

从而证明了命題.

由 $$\boldsymbol{r}_u=\{-a\sin u-av\cos u, a\cos u-av\sin u, c\},$$
$$\boldsymbol{r}_v=\{-a\sin u, a\cos u, c\},$$

得到 $$E=a^2(1+v^2)+c^2,\quad F=G=a^2+c^2.$$
$$ds^2=(a^2(1+v^2)+c^2)du^2+(a^2+c^2)(2dudv+dv^2),$$
$$do=av\sqrt{a^2+c^2}\,dudv.$$

33. 有一块长方形 $(2a, 2b)$ 的均匀加热的炉板（散热系数为 k），問离它中心 O 距离为 h 的点处的热效应 Q，如果根据兰勃定律（一个小面积的效应是 $dJ=\dfrac{kdo}{r^2}\cos\nu$）来計算，应是多少？利用水平角与鉛直角。

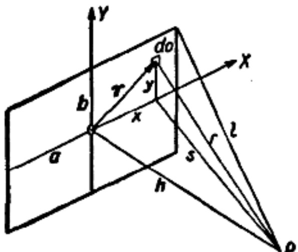

图 8

解：設炉板的中心 O 是一平面坐标系的原点. 設面积元素 do 中一点的坐标为 x, y, 受热点 P 离 O 与 do 的距离为 h 与 r（参閱图 8），并且

$$\nu=\measuredangle(h, r),\quad u=\measuredangle(h, s),\quad v=\measuredangle(r, s)$$

于是有 $$x=h\,\mathrm{tg}\,u,\quad y=s\,\mathrm{tg}\,v=\frac{h\,\mathrm{tg}\,v}{\cos u},$$

及 $\cos\nu=\dfrac{h}{r}$, $\cos v=\dfrac{s}{r}$, $\cos u=\dfrac{h}{s}$ 所以 $\cos\nu=\cos u\cos v$;

$$\boldsymbol{r}=\{x, y, 0\}=\left\{h\,\mathrm{tg}\,u, \frac{h\,\mathrm{tg}\,v}{\cos u}, 0\right\},$$

于是 $$\boldsymbol{r}_u=\left\{\frac{h}{\cos^2 u}, \frac{h\,\mathrm{tg}\,v\sin u}{\cos^2 u}, 0\right\},\quad \boldsymbol{r}_v=\left\{0, \frac{h}{\cos u\cos^2 v}, 0\right\},$$

$$E=\boldsymbol{r}_u^2=\frac{h^2(1+\mathrm{tg}^2 v\sin^2 u)}{\cos^4 u},\ F=\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v=\frac{h^2\,\mathrm{tg}\,u\,\mathrm{tg}\,v}{\cos^2 u\cos^2 v},\ G=\boldsymbol{r}_v^2=\frac{h^2}{\cos^2 u\cos^4 v}$$

及 $$do=dxdy=\sqrt{EG-F^2}\,dudv=\frac{h^2\,dudv}{\cos^3 u\cos^2 v}.$$

于是兰勃定律就呈形式 $dJ=k\cos v du dv$. 为了計算炉板的四分之一的热效应, 我們在值 $x=0$ 与 $x=a$, $y=0$ 与 $y=b$ 之間的范圍內积分. 当 $x=a$, $y=b$ 时, u 与 v 的值假設为 α 与 β, 于是 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{h}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{b}{s}=\frac{b\cos\alpha}{h}$.

通过作积分, 就得到所求的热效应

$$Q=4J=4k\int_{u=0}^{\alpha} du\int_{v=0}^{\beta}\cos v dv=4k\alpha\sin\beta.$$

现在　$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{a}{h}$, $\sin\beta=1:\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\beta}=b:\sqrt{h^2+a^2+b^2}=b:l$,

其中 $l=\sqrt{h^2+a^2+b^2}$ 是受热点 P 离射热板的一个角頂的距离. 所以有

$$Q=4k\frac{b}{l}\operatorname{arctg}\frac{a}{h}.$$

34. 用下列三族曲面来划分整个空間: 以 z 軸为公共軸的平面束和圓柱面族以及旋轉抛物面族 $z-w=w(x^2+y^2)$, 問此时体积元素为何?

解: 平面束: (1) $y=x\operatorname{tg}v$, 圆柱面族: (2) $x^2+y^2=u^2$. 諸平面与圓柱面的交綫是平行于 z 軸的直綫, 而与抛物面的交綫是抛物綫. 圓柱面与抛物面的交綫为圓. 由(1)与(2)得到 $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, 所以 $z=w(1+u^2)$.

$$d\tau=\begin{vmatrix}\cos v & \sin v & 2uw\\ -u\sin v & u\cos v & 0\\ 0 & 0 & 1+u^2\end{vmatrix}du dv dw=u(1+u^2)du dv dw.$$

35. 同上題. 三曲面族是以 y 軸及 x 軸为軸的二平面束和以 z 軸为軸的圓柱面族.

解: 平面束: (1) $x=uz$ 及 (2) $y=vz$, 圓柱面族: $x^2+y^2=w^2$. 平面与平面的交綫是通过原点的直綫; 圓柱面与它們交成橢圓. 如果令 $u^2+v^2=\rho^2$, 就有 $z=\frac{w}{\rho}$, $x=\frac{uw}{\rho}$, $y=\frac{vw}{\rho}$, 其中 ρ 是要附有正負号的, 于是

$$d\tau=\begin{vmatrix}\frac{wv^2}{\rho^3} & -\frac{uvw}{\rho^3} & \frac{u}{\rho}\\ -\frac{uvw}{\rho^3} & \frac{wu^2}{\rho^3} & \frac{v}{\rho}\\ -\frac{uw}{\rho^3} & -\frac{vw}{\rho^3} & \frac{1}{\rho}\end{vmatrix}du dv dw=\frac{w^2}{\rho^3}du dv dw=\frac{w^2}{(u^2+v^2)^{3/2}}du dv dw.$$

试读结束: 需要全本请在线购买: www.ertongbo