HEADSPRING 源泉

高等学校经典教材配套辅导丛书

实变函数与泛函分析辅导及习题精解

高教三版

姚 奎 梁永顺 编著

★ 名校名师执笔 ★ 主要内容归纳

★ 教材习题详解 ★ 典型例题精选

新版

陕西师范大学出版社
SHAANXI NORMAL UNIVERSITY PRESS

源泉 HEADSPRING

高等学校经典教材配套辅导丛书

实变函数与泛函分析
辅导及习题精解
高教三版

姚　奎　梁永顺　编著

陕西师范大学出版社
SHAANXI NORMAL UNIVERSITY PRESS

图书代号:JF6N0827

图书在版编目(CIP)数据

实变函数与泛函分析辅导及习题精解/姚奎主编. —西安:陕西师范大学出版社,2006.8

(高等学校经典教材配套辅导丛书)

ISBN 7-5613-3536-9/O·98

Ⅰ.实… Ⅱ.姚… Ⅲ.①实变函数—高等学校—教学参考资料 ②泛函分析—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 073087 号

责任编辑 陈光明 彭 青

装帧设计 王静婧

出版发行 陕西师范大学出版社

社　　址 西安市陕西师大 120#(邮政编码:710062)

网　　址 http://www.snuph.com

经　　销 新华书店

印　　刷 南京金阳彩色印刷有限公司

开　　本 850×1168 1/32

印　　张 8.25

字　　数 199 千

版　　次 2006 年 8 月第 1 版

印　　次 2006 年 8 月第 1 次印刷

定　　价 9.80 元

开户行:光大银行西安电子城支行 账号:0303080—00304001602

读者购书、书店添货或发现印装问题,请与本社营销中心联系、调换。

电 话:(029)85307864 85233753 85251046(传真)

E-mail:if-centre@snuph.com

前 言

实变函数与泛函分析是大学数学系与理工科高年级本科生或低年级研究生必须掌握的一门现代数学的基础课程。但对大多数学习者来说，学习这门课程有一定的难度，尤其是难以掌握解题思路和方法。为了帮助学习者更好地学习本门课程，我们参照郑维行、王声望先生所编著的《实变函数与泛函分析概要》（高教三版）一书，编写了这本《实变函数与泛函分析辅导及习题精解》。

本书章节编排与教材中章节顺序一致；对各章节的内容进行了概括；同时精选了部分例题进行解析，有助于加深学习者对主要内容的理解；最后对教材中的习题做了较详尽的解答或者提示，希望能对学习和使用本课程的学生和青年教师提供帮助。

在本书的编写过程中，南京大学张伏不辞辛苦地参加了部分章节的编写和打印工作，对此表示感谢；同时感谢陕西师范大学陈光明、刘佳同志；另外本书编写时参考了国内外同行的教材和参考书：如郑维行、王声望、宋国柱、程其襄、周民强、张恭庆、Rudin 等教授的书，在此一一致谢。

由于作者水平所限，书中错误和缺憾之处在所难免，恳请读者指出批评和改正意见。

姚奎　梁永顺

2006 年 6 月

目 录

第1章 集与点集

1.1 集及其运算

主要内容

有限集、空集和无限集 若集的元只有有限个，则称之为有限集. 不含任何元的集称为空集，用记号 $\varnothing$ 表示. 一个非空集，如果不是有限集，就称为无限集.

子集和真子集 设 A,B 是两个集，若 A 的每个元都属于 B，称 A 是 B 的子集，记成 $A\subset B$ 或 $B\supset A$. 若 $A\subset B$ 且存在一个元 $x\in B$ 而 $x\notin A$，则称 A 是 B 的真子集.

相等 设 A,B 是两个集，若 $A\subset B$ 与 $B\supset A$ 同时成立，则称集合 A 与 B 相等，记成 $A=B$.

集合的并、交和差 设 A,B 是两个集合. 由 A 中的元以及 B 中的元全体所成的集称为 A,B 的并，记成 $A\cup B$；就是说

$$A\cup B=\{x:x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

由同时属于 A 与 B 两者的那些元所成的集称为 A 与 B 的交，记成 $A\cap B$，有时记作 AB，即

$$A\cap B=\{x:x\in A\text{ 且 }x\in B\}.$$

由属于 A 而不属于 B 的那些元所成的集称为 A 与 B 的差，记成 $A-B$.

基本集和补集 如果所考虑的一切集都是 X 的子集，这时便称 X 为基本集. 对于任一基本集 X，差集 $X-A$ 称为 A 关于 X 的补集或简称为 A 的补集，记成 $\mathscr{C}_X A$ 或 $\mathscr{C}_A$.

定理 1.1 对于集合 E 与任意一集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$，恒有分配律成立：

$$E\cap(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}(E\cap A_\alpha).$$

定理 1.2（德摩根法则） 对于基本集 X 中的并集、交集的补集运算，有

(1) $\mathscr{C}(\bigcup\limits_{\alpha} A_{\alpha}) = \bigcap (\mathscr{C}A_{\alpha})$；

(2) $\mathscr{C}(\bigcap\limits_{\alpha} A_{\alpha}) = \bigcup (\mathscr{C}A_{\alpha})$.

例 题

例 1.1 $\{x \in \mathbf{R}: x^2 > 1\} = \{x \in \mathbf{R}: |x| > 1\}$.

例 1.2 若 $f(x)$ 是$[a,b]$上的实值函数，则可作点集分解如下：

$$[a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in [a,b]: |f(x)| < n\},$$

$$\{x \in [a,b]: |f(x)| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in [a,b]: |f(x)| > \frac{1}{n}\right\}.$$

1.2 映射·集的对等·可列集

主要内容

映射、定义域和值域 设 A,B 是两个非空集合. 若依一定的法则 f，对每个 $x \in A$，在 B 中有一个确定的元 y 与之对应，则称 f 是定义在 A 上而取值于 B 的映射，记成，$f: A \to B$，并将 x 与 y 的关系写成 $y = f(x)$. 这时称 A 为 f 的定义域，而称

$$f(A) = \{f(x): x \in A\}$$

为 f 的值域.

满射、逆映射和一一映射 设给定映射 $f: A \to B$，如果有 $B = f(A)$，就是说，f 的像充满整个 B，则说 f 是满射或映上的；如果对每个 $y \in B$，仅有唯一的 $x \in A$ 使 $f(x) = y$，则说 f 有逆映射 f^{-1}，它是定义在 $f(A)$ 上而取值于 A 上的满射. 当映射 $f: A \to f(A)$ 有逆映射时，称 f 是一一映射.

特征函数 集 E 的特征函数记成 $\chi_E(x)$，它的定义是

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

对等 设 A,B 是两个集合，如果有一一映射 f 存在，使 $f(A) = B$，则称 A 与 B 成一一对应或者互相对等，记成 $A \sim B$.

注 对等有如下三条基本的性质：

(1) 自反性. $A\sim A$;

(2) 对称性. 若 $A\sim B$ 则 $B\sim A$;

(3) 传递性. 若 $A\sim B, B\sim C$,则 $A\sim C$.

定理 2.1 任何无限集含有一个可列子集.

定理 2.2 可列个可列集的并集是可列的.

定理 2.3 点集 $[0,1]=\{x:0\leqslant x\leqslant 1\}$ 是不可列的.

例 2.1 自然数集与正偶数集对等;二维自然数集与一维自然数集对等;$(-1,1)$ 与 $\mathbf{R}$ 对等.

例 2.2 试作 $\mathbf{R}$ 中全体正有理数的一个排列 $\{r_n\}$,使得

$$\lim_{n\to\infty} r_n^{1/n}=1.$$

【解】 只需作如下的排列即可:

$$1,\frac{1}{2},2,3,\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},4,5,\frac{1}{5},\frac{1}{6},\cdots,$$

按如上所作的排列 $\{r_n\}$ 即得

$$\lim_{n\to\infty} r_n^{1/n}=1.$$

1.3 一维开集、闭集及其性质

邻域、内点和开集 设 E 为一维欧几里得空间 $\mathbf{R}$ 的任一子集,$a\in\mathbf{R}$. 含有 a 的任一开区间称为 a 的邻域. 对于 E 中一点 a,如果存在 a 的某个邻域 (α,β) 整个含于 E 内,这时 $a\in(\alpha,\beta)\subset E$,则称 a 为 E 的内点. 因而 E 的内点必属于 E. 若 E 的每一点都是 E 的内点,则称 E 为开集.

聚点 设 E 为 $\mathbf{R}$ 中的一个点集,$a\in\mathbf{R}$,若 a 的任一邻域均含有 E 中异于 a 的一点,则称 a 是 E 的聚点.

导集、孤立点、闭包、完全集、闭集和自密集 由点集 E 的一切聚点所成的集称为 E 的导集,记为 E',称 $E-E'$ 中的点为 E 的孤立点. E 的闭包是指

集 $E \cup E'$，并记成 $\overline{E}$. 若 $E' = E$，称 E 为完全集. 若 $\mathscr{C}E = \mathbf{R} - E$ 为开集，则称 E 为闭集. 若 $E \subset E'$，则称 E 为自密集.

定理 3.1 任意个开集的并是开集；有限个开集的交是开集.

定理 3.2 E 为闭集的充要条件是 $E' \subset E$.

定理 3.3 任何集 E 的导集是闭集.

定理 3.4 (1) 设 $A \subset B$，则 $A' \subset B'$；

(2) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

定理 3.5 任意个闭集的交为闭集；有限个闭集的并为闭集.

定理 3.6 设 E 为闭集，则 E 的闭包与 E 相等；并且若 E 无孤立点，则 E 是完全集.

[redacted]

例 3.1 设 $E = \{\cos n\}$，则 $\overline{E} = [-1,1]$.

【解】 令 $A = \{n + 2m\pi : n, m \in \mathbf{Z}\}$，易知对任给 $t \in \mathbf{R}$ 以及 $\delta > 0$，存在 $a \in A$，使得 $|t - a| < \delta$. 从而知 $\overline{A} = \mathbf{R}$. 现在设 $x \in [-1,1]$，以及 $\varepsilon > 0$，则存在 $t \in \mathbf{R}$，使得 $\cos t = x$，且存在 $n, m \in \mathbf{Z}$，使得 $t < n + 2m\pi < t + \varepsilon$. 由此得

$$|x - \cos n| = |\cos t - \cos(n + 2m\pi)| \leqslant n + 2m\pi - t < \varepsilon.$$

例 3.2 设 $f(x)$ 定义在 $\mathbf{R}^n$ 上，则 $f \in C(\mathbf{R}^n)$ 的充分必要条件是：对任意的 $t \in \mathbf{R}$，点集

$$E_1 = \{x \in \mathbf{R}^n : f(x) > t\}, \qquad E_2 = \{x \in \mathbf{R}^n : f(x) < t\}$$

都是开集.

1.4 开集的构造

[redacted]

康托尔三分集 将基本区间[0,1]用分点 1/3 与 2/3 三等分，并除去中间的开区间(1/3,2/3). 把余下两个闭区间各三等分，并除去中间的开区间(1/9,2/9)，(7/9,8/9). 然后再将余下的四个闭区间同法处理，如此得到康

托尔三分集 P_0.

稠密集和稀疏集　设 E 是实直线 $\mathbf{R}$ 的子集，若它的导集等于 $\mathbf{R}$，称 E 为 $\mathbf{R}$ 中稠密集. 当 $\overline{E}$ 的补集在 $\mathbf{R}$ 中稠密时，称 E 为稀疏集.

距离　对于 $\mathbf{R}^n$ 中任意两点

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\qquad y=(y_1,y_2,\cdots,y_n),$$

定义它们之间的距离为

$$\rho(x,y)=\{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

注　距离有如下三条基本的性质：

(1) 非负性. $\rho(x,y)\geqslant 0$；$\rho(x,y)=0$ 与 $x=y$ 等价；

(2) 对称性. $\rho(x,y)=\rho(y,x)$；

(3) 三点不等式. 对于任何 $x,y,z\in\mathbf{R}^n$，有

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

定理 4.1　有界非空开集 G 可表示为至多可列个互不相交的构成区间的并

$$G=\bigcup_k(\alpha_k,\beta_k).$$

定理 4.2　$\mathbf{R}^2$ 中的非空开集 G 可表示为可列个互不相交的半闭正方形的并.

例 4.1　在 $\mathbf{R}^2$ 中作点集

$$E_1=\{x=(\xi,\eta):-\infty<\xi<\infty,\eta=0\}$$

与

$$E_2=\{y=(\xi,\eta):\xi\cdot\eta=1\},$$

则

$$d(E_1,E_2)=0.$$

【解】　事实上，当我们取 $X=(\xi,0)\in E_1$ 且 $y=(\xi,\eta)\in E_2$ 时，由

$$d(E_1,E_2)\leqslant d(x,y)=|\eta|=\frac{1}{|\xi|}$$

可知，对任给 $\varepsilon>0$，只需 $|\xi|$ 充分大，就有 $d(E_1,E_2)<\varepsilon$. 由此得 $d(E_1,E_2)=0$.

显然，若 $x\in E$，则 $d(x,E)=0$. 但反之，若 $d(x,E)=0$，则 x 不一定属

于 E. 不过在 $x \notin E$ 时，必有 $x \in E'$

1.5* 集的势 · 序集

势 将所有的集进行分类，凡彼此对等的集归于一类，不对等的集归于不同的类，对每类集，我们赋予一个标志，称为该类中每个集的势(或基数)，集 A 的势记为 $\overline{\overline{A}}$.

序 对于给定的集 X，若在它的元之间能引进关系"$\leqslant$"(这里作为序的记号，可读成"小于或等于")，满足序公理：

(1) $a \leqslant a$;

(2) 若 $a \leqslant b, b \leqslant c$，则 $a \leqslant c$;

(3) 若 $a \leqslant b, b \leqslant a$，则 $a = b$;

其中 $a,b,c \in X$. 那么称 X 为带有序"$\leqslant$"的半序集. 如果对于半序集 X 的任意两个元 a, b，还满足条件：

(4) 关系式 $a \leqslant b$，与 $b \leqslant a$ 二者必居其一，

那么，称 X 为带有序"$\leqslant$"的全序集.

上界和上确界 设 X 为半序集，X_0 为 X 的子集. 如果 $b \in X$ 满足条件：对一切 $x \in X_0$ 有 $x \leqslant b$，则称 b 为 X_0 的上界. 如果 b 为 X_0 的上界，且对 X_0 的任一上界 b'，均有 $b \leqslant b'$，则称 b 为 X_0 的上确界.

容许集 设 X 为非空半序集，它的每个非空全序子集均有上确界. 取定元 $a \in X$ 与映射 $f: X \to X$，称 X 的子集 A 为容许集，如果满足下列三个条件：

(1) $a \in A$,

(2) $f(A) \subset A$,

(3) A 的每个全序子集的上确界属于 A.

极大元 设 X 为半序集，$x \in X$. 如果对任一 $y \in X$，满足 $x \leqslant y$，即有 $y = x$，则称 x 为 X 的极大元. 同理可定义极小元.

定理 5.1 设集 A 的势为 μ，用 2^μ 表示 A 的一切子集所成的类的势，则有 $2^\mu > \mu$.

定理 5.2(伯恩斯坦定理) 设 λ, μ 为两个势. 若 $\lambda \leqslant \mu, \mu \leqslant \lambda$ 同时成立，

则有 $\lambda=\mu$.

定理 5.3　设 X 为非空半序集，且 X 的每个非空全序子集均有上确界，再设映射 $f: X\to X$ 满足 $f(x)\geqslant x(x\in X)$，那么，必有一个元 $c\in X$，使 $f(c)=c$.

定理 5.4　每个半序子集都含有极大全序子集.

定理 5.5(佐恩引理)　设 X 为非空半序集，若 X 的每一非空全序子集有上确界，则 X 有极大元.

定理 5.6(策莫罗选择公理)　设 $\mathscr{A}$ 为一非空集的类，则存在映射 $f:\mathscr{A}\to\bigcup_{A\in\mathscr{A}}A$，满足：对每个 $A\in\mathscr{A}$，有 $f(A)\in A$.

例　题

例 5.1　设 B 是一个集，A 是 B 上的实函数全体，当 $a,b\in A$，而且对每个 $t\in T$ 有 $a(t)\leqslant b(t)$，那么 A 按此顺序也成为半序集.

例 5.2　设 A 是所有实数对 (x,y) 全体，规定两对 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) 当 $x_1\leqslant x_2$ 时为 $(x_1,y_1)\prec(x_2,y_2)$，并规定当 $x_1=x_2$ 而 $y_1\leqslant y_2$ 时为 $(x_1,y_1)\prec(x_2,y_2)$. 这是 A 中的一个顺序关系，称为字典顺序.

本章习题解析

1. 证明下列关系((1)—(4))：

(1) $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$.

(2) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

(3) $A-(B-C)\subset(A-B)\cup C$.

(4) $(A-B)-(C-D)\subset(A-C)\cup(D-B)$.

(5) $(A-B)\cup C=A-(B-C)$ 成立的充要条件是什么？

(6)* 问 $A\cup(B-C)=(A\cup B)-C$ 是否成立？(* 表示选自研究生试题，后同.)

【证】 (1)
$$\begin{aligned}(A-B)\cap(C-D)&=(A\cap\mathscr{C}B)\cap(C\cap\mathscr{C}D)\\&=(A\cap C)\cap(\mathscr{C}B\cap\mathscr{C}D)\\&=(A\cap C)\cap\mathscr{C}(B\cup D)\\&=(A\cap C)-(B\cup D).\end{aligned}$$

(2) $x \in (A \cap B) \cup C \Leftrightarrow x \in A \cap B$ 或 $x \in C$

$x \in A$ 且 $x \in B$,或 $x \in C$

$x \in A \cup C$ 且 $x \in B \cup C$

$x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

(3) $A-(B-C) = A \cap \mathscr{C}(B \cap \mathscr{C}C)$

$= A \cap (\mathscr{C}B \cup C) = (A \cap \mathscr{C}B) \cup (A \cap C)$

$\subset (A \cap \mathscr{C}B) \cup C = (A-B) \cup C$.

(4) $(A-B)-(C-D) = (A \cap \mathscr{C}B) \cap \mathscr{C}(C \cap \mathscr{C}D)$

$= (A \cap \mathscr{C}B) \cap (\mathscr{C}C \cup D)$

$= (A \cap \mathscr{C}B \cap \mathscr{C}C) \cup (A \cap \mathscr{C}B \cap D)$

$\subset (A \cap \mathscr{C}C) \cup (\mathscr{C}B \cap D)$

$= (A-C) \cup (D-B)$.

(5) 由(3)知,等式右边 $= (A-B) \cup (A \cap C)$,左边 $= (A-B) \cup C$,可见 $A \cap C = C$,即 $C \subset A$ 是等式成立的充分条件.

下证 $C \subset A$ 也是等式成立的必要条件.

用反证法,假 $C \subset A$ 不成立,则有 $x \in C$ 且 $x \notin A$,从而 $x \notin A-B$,且 $x \notin A \cap C$,于是,$x \notin (A-B) \cup (A \cap C)$. 而 $x \in (A-B) \cup C$,故等式不成立.

(6) 不成立. 令 $A = B = C = \{1\}$ 时

$A \cup (B-C) = \{1\} \neq \varnothing = (A \cup B)-C$.

2. 设给出集 E 与任意一组集 $A_a, a \in I$,问关系式

$$E \cup (\bigcap_{a \in I} A_a) = \bigcap_{a \in I} (E \cup A_a).$$

是否恒成立?

【解】 上式恒成立. 事实上,

$x \in \{$左边$\} \Rightarrow x \in E$ 或 $x \in \bigcap_{a \in I} A_a \Rightarrow x \in E$ 或 $x \in A_a (\forall a \in I)$

$\Rightarrow x \in E \cup A_a (\forall a \in I) \Rightarrow x \in \bigcap_{a \in I} (E \cup A_a)$

$\Rightarrow x \in$ 右边;

反之,

$x \in \{$右边$\} \Rightarrow x \in E \cup A_a (\forall a \in I)$

$\Rightarrow$ 若 $x \in E$,则 $x \in E \cup (\bigcap_{a \in I}) A_a$;

若 $x \notin E$,则 $x \in A_a(\forall a \in I)$,从而 $x \in \bigcap_{a \in I} A_a$

$\Rightarrow x \in$ 左边.

3. 设 $A = \{0,1\}$,试证一切排列

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots), a_n \in A$$

所成的集的势为$\aleph$.

【证】 把一切排列与小数作对应

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) \leftrightarrow 0.a_1a_2\cdots a_n, a_n \in A = \{0,1\}$$

因二进小数$\{0.a_1a_2\cdots a_n, a_n \in A\}$ 与$[0,1]$ 对等,故其势为$\aleph$,从而一切排列的势为$\aleph$.

4. 试作下列各题中集之间的一一对应:

(1) $[0,1]$ 与$(0,1)$.

(2) $[a,b]$ 与(∞,∞).

(3)* 开区间$(0,1)$ 与无理数集.

(4) 开上半平面与开单位圆.

【解】 (1) 设$(0,1)$ 中的有理点的全体为$\{r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\}$,则$[0,1]$ 中的有理点的全体为$\{0,1,r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}$,作对应

$$0 \leftrightarrow r_1, 1 \leftrightarrow r_2, r_1 \leftrightarrow r_3, \cdots, r_n \leftrightarrow r_{n+2}, \cdots.$$

再让$(0,1)$ 中的无理点与$[0,1]$ 中的无理点自身对应,这样就建立了$[0,1]$ 与$(0,1)$ 之间的一一对应.

(2) 先建立$[a,b]$ 与(a,b) 之间的一一对应(方法同(1)),再作(a,b) 到(∞,∞) 的映射

$$y = \tan\left(\frac{x-b}{b-a} + \frac{1}{2}\right)\pi, \qquad x \in (a,b).$$

这样就建立了$[a,b]$ 与(∞,∞) 之间的一一对应.

(3) 由(1) 知$(0,1)$ 与$[0,1]$ 一一对应,又由(2) 知$[0,1]$ 与$(-\infty,+\infty)$ 一一对应. 记$(-\infty,+\infty)$ 中的无理数集为A,从中取出一个可列的子集并记为B,则$A = (A-B) \cup B$. 此时,$(-\infty,+\infty) = (A-B) \cup B \cup Q$. 类似于(2),$A-B$中的点保持不动,再作$B$与$B \cup Q$的一一对应$f$,则显然有$A$与$(-\infty,+\infty)$ 的一一对应,从而开区间$(0,1)$ 与无理数集一一对应.

(4) 根据复变函数的知识,映射

$$\omega=\frac{z-i}{iz-1}$$

实现了开上半平面与开单位圆间的一一对应.

5. 问下列各集能否同自然数集或区间[0,1]构成一一对应：

(1) 以有理数为端点的区间集；

(2) 闭正方形[0,1;0,1]. 如果可能，试作这种对应方法.

【解】 (1) 以有理数为端点的区间集能同自然数集构成一一对应，方法如下：

设有理数为端点的区间全体为$\{r_1,r_2,r_3,\cdots\}$，A_{ij} 表示 r_i 和 r_j $(r_i<r_j)$ 为端点的区间，则以有理数为端点的区间全体为

$$\begin{array}{llll} A_{12},A_{13},A_{14},A_{15},\cdots \\ \quad A_{23},A_{24},A_{25},\cdots \\ \quad\quad A_{34},A_{35},\cdots \\ \quad\quad\quad A_{45},\cdots \\ \quad\quad\quad\quad \cdots \end{array}$$

将这些区间排列成：$A_{12},A_{13},A_{23},A_{14},A_{24},A_{34},\cdots$，就建立了以有理数为端点的区间集与自然数集的一一对应.

(2) 闭正方形[0,1;0,1]能与[0,1]构成一一对应，方法如下：

把闭正方形分解为互不相交的三部分

$$A=\{(x,y):0<a\leqslant 1,0<y\leqslant 1\},$$

$$B=\{(0,y):0\leqslant y\leqslant 1\},$$

$$C=\{(x,0):0<x\leqslant 1\}.$$

① 首先建立 $A=\{(x,y):0<a\leqslant 1,0<y\leqslant 1\}$ 与半闭区间$(0,1]$的一一对应.

若把某一位起后面全是0的二进小数叫做二进有限小数，否则称二进无限小数，那么，$(0,1]$中的实数与二进无限小数试一一对应的.

对二进无限小数 $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$(有无穷多个 a_i 为1)，我们这样给它加括号，使得每个括号中只有最后一个数码为1，前面的数码全为0. 例如，二进无限小数

$$0.10110001001\cdots$$

加括号成 $0.(1)(01)(1)(0001)(001)\cdots$，记作