大学本科教材·计算机教学丛书

离散结构

许蔓苓 编著

北京航空航天大学出版社

大学本科教材·计算机教学丛书

离散结构

许蔓苓　编著

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书是根据国内《离散数学教学大纲》并参考美国 CC2004 计算机工程课程体系的“离散数学”教学要求而编写的，既凝聚了作者 20 多年的教学经验，也吸取了国内外数十本相关著作的精华。

全书共 8 章，包括命题逻辑、一阶逻辑、集合、关系、函数、计数初步、图论、树。每章后面配有难易不等的习题，可供教学选用。最后配有部分习题的提示与解答。

本书可作为高等院校、计算机科学与技术、应用数学、自动控制、电子工程、信息科学及相关专业的本科生的教材，也可供相关专业的工程技术人员参考。

* 本书备有电子课件，供教师参考，如需要，向本社发行部索取。

图书在版编目(CIP)数据

离散结构/许蔓苓编著. —北京：北京航空航天大学出版社，2007.1

ISBN 978-7-81077-963-0

Ⅰ. 离… Ⅱ. 许… Ⅲ. 离散结构—高等学校—教材 Ⅳ. 0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 141393 号

离散结构

许蔓苓 编著

责任编辑 陶金福

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(100083) 发行部电话：010-82317024 传真：010-82328026

http://www.buaapress.com.cn E-mail:bhpress@263.net

北京市松源印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本：787×1092 1/16 印张：12 字数：307 千字

2007 年 1 月第 1 版 2007 年 1 月第 1 次印刷 印数：5 000 册

ISBN 978-7-81077-963-0 定价：17.00 元

“大学本科教材·计算机教学丛书”
编审委员会成员

总 前 言

随着科学技术、文化、教育、经济和社会的发展，计算机教学进入了我国历史上最火热的年代，欣欣向荣。就计算机专业而言，全国开办计算机本科专业的院校在2004年之初有505所，到2006年已经发展到775所。另外，在全国高校中的非计算机专业，包括理工农医以及文科（文史哲法数、经管、文艺）等专业，按各自专业的培养目标都融入了计算机课程的教学。过去出版界出版了一大批计算机教学方面的各类教材，满足了一定时期的需求，但是还不能完全适应计算机教学深化改革的要求。

面对《国家科学技术中长期发展纲要（2006－2020年）》制订的信息技术发展目标，计算机教学也要随之进行改革，以便提高培养质量。教学要改革，教材建设必须跟上。面对各层次、各类型的学校和各类型的专业都要开设计算机课程，就应有多样化的教材，以适应各专业教学的需要。北京航空航天大学出版社是以出版高等教育教材为主的，愿对计算机教学的教材建设做出贡献。

为计算机类教材的出版，北京航空航天大学出版社成立了“大学本科教材·计算机教学丛书”编审委员会。出版计算机教材，得到了北京航空航天大学计算机学院的大力支持。该院有三位教育部高等学校计算机科学与技术教学指导委员会（下称教指委）的成员参加编审委员会的工作。其他成员是北京航空航天大学、北京交通大学等6所院校和中科院计算技术研究所对计算机教育有研究的教指委成员、专家、学者和出版社的领导。

我们组织编写、出版计算机课程教材，以大多数高校实际状况为基点，使其在现有基础上能提高一步，追求符合大多数高校本科教学适用为目标。按照教指委制订的计算机科学与技术本科专业规范和计算机基础课教学基本要求的精神，我们组织身居教学第一线，具有教学实践经验的教师进行编写。在出书品种和内容上，面对两个方面的教学。一是计算机专业本科教学，包括计算机导论、计算机专业技术基础课、计算机专业课等；二是非计算机专业的计算机基础课程的本科教学，包括理工农医类、文史哲法教类、经营类、艺术类等的计算机课程。

教材的编写注重以下几点。

1. 基础性。具有基础知识和基本理论，以使学生在专业发展上具有潜力，便于适应社会的需求。

2. 先进性。融入计算机科学与技术发展的新成果；瞄准计算机科学与技术发

展的新方向，内容应具有前瞻性。这样，以使学生扩展视野，以便与科技、社会发展的脉络同步。

3. 实用性。一是适应教学的需求；二是理论与实践相结合，以使学生掌握实用技术。

编写、出版的教材能否适应教学改革的需求，只有师生在教与学的实践中做出评价，我们期望得到师生的批评和指正。

“大学本科教材·计算机教学丛书”
编审委员会

前 言

离散结构(数学)是随着计算机科学的发展和计算机应用的日趋广泛而逐渐形成的一门学科,是近代数学的一个分支。由于计算机科学的迅速发展,与其有关的领域中,提出了许多有关离散量的理论问题,须用某些数学工具做出描述和深化;而离散结构把计算机科学中所涉及到的研究离散量的数学综括在一起,进行较系统的、全面的论述,为研究计算机科学的相关问题提供了有力的工具。

离散结构是理工科高等院校计算机专业类的一门重要的专业基础课。它为学习其他课程,如数据结构、逻辑设计、操作系统、体系结构、编译原理、算法分析与设计、形式语言与自动机、容错诊断和人工智能等准备了必要的数学基础;同时还培养学生的抽象思维和逻辑推理的能力;也为日后工作提供了重要的工具。

对于学生,这本书的目标是希望要写得准确,可读性强,具有离散结构的概念及应用的清晰展现和论证。对于书的结构,我的目标是力争有一个科学的设计,希望内容尽可能地深入浅出,使其成为计算机工程课程体系的一部较完整的离散结构教科书。本书是为 50 学时的离散结构课程设计的,以使学生掌握这门课的主要内容。

读者是工科院校相关专业的本科生以及教师和科研人员。本书内容的组织原则是自给自足的,对于具有数学背景不多的读者几乎能够理解每一个内容,只需要一般的高等代数作为预备知识。

本书的内容根据我国教学的实际情况以及基本要求,并参考了美国 CC2004 计算机工程课程体系的教学大纲而选定的,侧重于最基本理论和方法的介绍。每章的后面附有习题,以巩固所学概念。

本书是根据 20 多年的教学实践体会和参考国内外有关资料编写而成的,也是在作者 2004 年由北京航空航天大学出版社出版的《离散数学》的基础上,编写同类的第二部教材,当然读者对象是不同的。

本书写作过程中,受到北京工业大学各级及各部门领导的重视与关心,北京信息工程学院的夏伦进老师为本书的部分习题提出了宝贵的指正,作者在此对他们表示诚挚的谢意。

此外,还要感谢北京航空航天大学出版社。该出版社重视计算机基础数学教材的建设,在此谨致以由衷的感谢。

由于作者水平所限,书中不当之处,切望读者批评指正。

作 者

2006 年夏

目 录

第 1 章
命题逻辑

数理逻辑是研究推理，特别是研究数学中使用的推理；而推理中的前提和结论都是命题。命题逻辑是逻辑演算的基本部分，也是其中比较简单的部分。

本章主要介绍命题逻辑中的命题和逻辑联结词、合式公式和语义、合式公式之间的逻辑等价和逻辑蕴涵关系、范式、联结词的完备集以及蕴涵和演绎。

1.1　命题和逻辑运算

1.1.1　命　题

众所周知，自然语言是人们交流思想的工具。它一方面能表达极其精细而深刻的思想；另一方面又能表达那些模棱两可而又含混的观念。这在交流思想时是非常合适的，然而对于进行严格的推理是不利的。为此，要建立一种严格定义的形式化语言。为了区别于自然语言，称这种语言为对象语言；而把自然语言称为元语言。在对象语言中，要引进一种类似于元语言中的“语句”的基本单元——命题。

定义 1.1.1　称能断定不是真就是假的陈述句为命题(statement/proposition)。

例 1.1.1　以下每句都是命题：

(1) 北京是中国的首都。

(2) $3+4=8$。

(3) 天津不是城市。

(4) 他喜欢弹钢琴也喜欢拉提琴。

(5) 他在读书或看报。

(6) 如果天下雨，则天空有云。

(7) $a\times b=0$ 当且仅当 $a=0$ 或 $b=0$。

(8) 有大于 10^{10} 的素数。

(9) 凡是大于 2 的偶数都可以表示成两个素数之和。

定义 1.1.2　称命题的真或假为命题的真值(truth value of proposition)。当一个命题为真时，称该命题的真值为真；否则，称命题的真值为假。称真值为真的命题为真命题，称真值为假的命题为假命题。通常以 1 或 T (True)表示真；以 0 或 F (False)表示假。

例 1.1.1 中，(1)，(6)，(7)和(8)是真命题；(2)和(3)是假命题；(4)和(5)的真值取决于“他”当时的情形；(9)是著名的哥德巴赫猜想，它的正确性虽至今未有严格的数学证明，但它是否正确是客观存在的，即有确定的真值，它是命题。

根据命题的定义，感叹句、祈使句、疑问句等都不是命题。例如，以下每句都不是命题：

(1) 多漂亮啊！

(2) 请把门关上！

(3) $X=0$?

注释：命题首先是一个陈述句，其次对于它所表达的内容，可以断定是“真”的还是“假”的，但不能是含混不清的。

为了便于讨论，将用英文的大写字母 P，Q，R，…（也可以加下标，如 P_1，P_2，…）表示命题。例如，在上例中，可以用 P 表示北京是中国的首都；Q 表示天下雨；R 表示天空有云，并可写成：

P：北京是中国的首都。

Q：天下雨。

R：天空有云。

分别称 P,Q 和 R 为上述三个命题的标识符。当命题标识符代表一个确定的命题时（如上面提到的 P,Q 和 R），称其为命题常量(propositional constant)；当命题标识符代表非确定的命题时，称这样的命题标识符为命题变量或命题变元(propositional variable)。

需要注意的是，命题变量不是命题，只有用一个确定的命题代入到命题变量后，才能确定它的值是 1 还是 0。

1.1.2 逻辑联结词和复合命题

首先，例 1.1.1 的(1)和(2)，这两个命题都不能再分解为更简单的命题，称这类命题为原子命题(atomic proposition)；例 1.1.1 的(3)可分解为 P 的否定，其中原子命题 P：天津是城市；例 1.1.1 的(4)可分解为原子命题 P：他喜欢弹钢琴，Q：他喜欢拉提琴，用词“也”联结起来；例 1.1.1 的(5)可分解为原子命题 P：他读书，Q：他看报，用词“或”联结起来；例 1.1.1 的(6)可分解为原子命题 P：天下雨，Q：天空有云，用词组“如果…，则…”联结起来；例 1.1.1 的(7)可分解为原子命题 P：$a\times b=0$，Q：$a=0$，R：$b=0$，用词“当且仅当”和“或”联结起来。

通常，可以用词“非”，“并且”，“或者”，“当且仅当”和词组“如果…则…”把命题组合起来，形成更复杂的命题。

定义 1.1.3 称以上这些词和词组为“逻辑联结词”，用以下符号表示它们：

$\neg$——非，否定词；

$\wedge$——与（并且），合取词；

$\vee$——或（或者），析取词；

$\rightarrow$——如果…则…，条件词，蕴涵词；

$\leftrightarrow$——当且仅当，双条件词，等价词。

其中，“非”是一元逻辑联结词，其他 4 个是二元逻辑联结词。由命题使用逻辑联结词构成的命题称为复合命题(compound proposition)。在命题逻辑中，只分析复合命题的逻辑形式。命题逻辑研究的是由复合命题或未分析的简单命题构成的前提和结论之间的可推导性关系。

下面对这 5 个逻辑联结词分别加以讨论。

1. 否定词

定义 1.1.4 设 P 是命题，P 的否定(negation)是复合命题“非 P”，记为 $\neg P$。如果 P 是真的，则 $\neg P$ 为假；如果 P 是假的，则 $\neg P$ 为真。$\neg P$ 的真值与 P 真值的关系如表 1-1 所列。

表 1-1 是根据复合命题的组成部分，给出它的真值，称这样的表为真值表(truth table)。

自然语言中常用“非”、“不”、“无”及“没有”等词表示否定。例如，“纽约不是一个城市”是复合命题。如果设 P：纽约是一个城市，则 $\neg P$：纽约不是一个城市。

表 1-1 $\neg P$ 与 P 的关系

P	$\neg P$
1	0
0	1

例 1.1.2 给出以下命题的否定：

(1) P：$3+5>2$。

(2) Q：天冷。

解 (1) $\neg P$：$3+5$ 不大于 2，即 $\neg P$：$3+5\leqslant 2$。因为 P 是真的，所以 $\neg P$ 是假的。

(2) $\neg Q$：天不冷。(解毕)

2. 合取词

定义 1.1.5 设 P 和 Q 是命题，P 和 Q 的合取(conjunction)是复合命题“P 与 Q”，记为 $P\wedge Q$；合取联结词用符号 $\wedge$ 表示。

当 P 和 Q 二者同时为真时，$P\wedge Q$ 为真；在其他情况下，$P\wedge Q$ 为假。合取词的定义，也就是 $P\wedge Q$ 的真值根据 P 和 Q 的真值，用表 1-2 所列的真值表定义。

表 1-2 $P\wedge Q$ 的真值表

P	Q	$P\wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

自然语言中常用“以及”、“并且”、“和”及“与”等词表示合取。例如，对于命题“张明和李光都去图书馆了”：如果设 P：张明去图书馆了，Q：李光去图书馆了，则原始命题可表示为 $P\wedge Q$。

例 1.1.3 对以下的每一个，形成 P 和 Q 的合取。

(1) P：天下雪；Q：我冷。

(2) P：$3<4$；Q：$-4>-7$。

(3) P：天下雪，Q：$3<5$。

解 (1) $P\wedge Q$：天下雪并且我冷。

(2) $P\wedge Q$：$3<4$ 并且 $-4>-7$。

(3) $P\wedge Q$：天下雪并且 $3<5$。(解毕)

例 1.1.3 的(3)不像平日的自然语言。在数理逻辑里可以用联结词“与”，联结两个毫无关系的命题，形成一个新的命题。

并非所有的“和”、“与”均可用“$\wedge$”表示。例如：“张三和李四是同学”是一个原子命题。“他打开箱子并取出一件衣服”虽是一个复合命题，但这两句中的“和”、“并”都不能用“$\wedge$”表示。想一想为什么？

3. 析取词

定义 1.1.6 设 P 和 Q 是命题，P 和 Q 的析取(disjunction)是复合命题“P 或 Q”，记为 $P\vee Q$。联结词“或”，用符号 $\vee$ 表示。当 P 和 Q 中至少有一个为真时，$P\vee Q$ 为真；在其他情况下，$P\vee Q$ 为假。析取词用表 1-3 所列的真值表定义。

表 1-3　$P \vee Q$ 的真值表

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

例 1.1.4　对以下的每一个，形成 P 和 Q 的析取。

(1) P：3 是一个正整数；Q：$\sqrt{3}$是一个有理数。

(2) P：$4+5\neq 9$；Q：巴黎是英国的首都。

解　(1) $P \vee Q$：3 是一个正整数或$\sqrt{3}$是一个有理数。由于 P 是真的，即使 Q 是假的，根据定义 $P \vee Q$ 是真的。

(2) $P \vee Q$：$4+5\neq 9$ 或巴黎是英国的首都。由于 P 和 Q 的每一个都是假的，所以 $P \vee Q$ 是假的。(解毕)

例 1.1.4 的(2)在数理逻辑里说明，可以用联结词"或"，联结两个毫无关系的命题。

自然语言中常用"或者"、"可能…，可能…"及"或许…，或许…"等词组表示或(者)。由于自然语言中的"或"表示的意义是有二义性的，所以联结词"或"比联结词"与"要复杂一些。有时"或"表示的是一种"可兼或"，例如，复合命题：灯泡坏了或开关坏了。灯泡坏了并不排斥开关坏了，这种情况是"可兼或"；有时"或"表示的是一种"不可兼或"。例如，复合命题：今天下午三点，我在图书馆或在实验室里。由于一个人不能同时在两个地方，这种情况的"或"是"不可兼或"。

析取联结词表示的是"可兼或"，关于"不可兼或"留在习题中讨论。

4. 条件词

定义 1.1.7　设 P 和 Q 是命题，如果 P 则 Q，是复合命题 P 蕴涵(implication)Q，记为 $P \to Q$。联结词"蕴涵"，用符号→表示。当 P 真，Q 假时，$P \to Q$ 为假；在其他情况下，$P \to Q$ 为真。条件词用表 1-4 所列的真值表定义。

称 P 为 $P \to Q$ 的前提、前件或假设；而 Q 为 $P \to Q$ 的结论或后件。

表 1-4　$P \to Q$ 的真值表

P	Q	$P \to Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

由于"蕴涵"经常出现在数学的许多推理中，大量术语的表现形式是 $P \to Q$。表示成蕴涵表达式的某些比较普通的说法是：

"如果 P，则 Q。"

"若 P，则 Q。"

"Q 如果 P。"

"P 蕴涵 Q。"

"P 推出 Q。"

"P 是 Q 的充分条件。"

"Q 是 P 的必要条件。"

"Q 只要 P。"

"P 仅当 Q。"

"只有 Q 才 P。"

例 1.1.5　对以下的每一个命题，形成 P 和 Q 的蕴涵并判断它们的真假。

(1) P：天下雪；Q：天是阴天。

(2) P：太阳从东方升起；Q：$2+2=4$。

(3) P：今天是星期一；Q：$2+3=7$。

解　(1) $P \to Q$：如果天下雪，则是阴天。由于 P 是真的时候，Q 一定是真的，根据定义 $P \to Q$ 是真的。

(2) $P \to Q$：如果太阳从东方升起，则 $2+2=4$。由于 Q 永远是真的，所以不论 P 的真值是真还是假，根据定义 $P \to Q$ 是真的。

(3) $P \to Q$：如果今天是星期一，则 $2+3=7$。$P \to Q$ 除了星期一的每一天，是真的，即使 $2+3=7$ 是假的。(解毕)

结合例 1.1.5 的(2)，这样定义的蕴涵方法比日常语言中蕴涵的意义要更一般些。在逻辑中，不限定条件词联结的前提和结论必须属于同一类事物。由条件词的定义可以看出，前提为假时，无论结论的取值是真还是假，条件词产生的新命题都取值为真，即采取的是"善意的推定"。

在自然语言中，不会使用形式为例 1.1.5 的(2)及(3)的蕴涵。这是因为两例中的每一个的前提和结论之间都没有关系。在数学推理中，考虑的是比日常语言更普遍类型的蕴涵。蕴涵的数学概念在前提和结论之间的因果(cause-and-effect)关系独立。

不幸的是，用于许多编程语言中的 If-Then(如果…则)结构不同于用于逻辑中的蕴涵结构。最多的编程语言包含如 If P Then S 这种形式的语句，其中 P 是一个命题，S 是一个程序段(许多需要执行的语句)。当执行一个程序，遇到这样语句的时候，如果 P 是真的，就执行 S；如果 P 是假的，不执行 S。例 1.1.6 讨论这个问题。

例 1.1.6　在执行下列语句：

$$\text{If } 2+2=4 \text{ Then } x := x+1$$

之后，变量 x 的值是什么？假定执行这条语句之前，$x=0$。符号 := 代表赋值，语句 $x := x+1$ 表示将 $x+1$ 的值赋给 x。

解　因为 $2+2=4$ 是真的，所以执行赋值语句 $x := x+1$。于是，执行完这条语句后，x 的值是 $0+1=1$。(解毕)

例 1.1.7　给出蕴涵命题的逆(converse)和逆否命题(contrapositive)。

如果今天是星期五，则今天我有一个考试。

解　逆命题是"如果今天我有一个考试，则今天是星期五"。这个蕴涵命题的逆否命题是"如果今天我没有考试，则今天不是星期五"。(解毕)

其实，有了以上定义的 4 个逻辑联结词或更少数目的联结词，在逻辑中就足够用了；但是为了使用的方便，还准备介绍双条件词。

5. 双条件词(bi-conditional)

定义 1.1.8　设 P 和 Q 是命题，P 当且仅当 Q 是复合命题，记为 $P \leftrightarrow Q$。双条件词"当且仅当"用符号 $\leftrightarrow$ 表示。当 P 和 Q 的真值相同时，$P \leftrightarrow Q$ 的真值为真；否则 $P \leftrightarrow Q$ 的真值为假。双条件词用表 1-5 所列的真值表定义。

表 1-5　$P \leftrightarrow Q$ 的真值表

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

例 1.1.8　对以下的每一个，形成 P 当且仅当 Q，并判断它们的真假。

(1) P：三角形 ABC 是等边三角形；Q：三角形 ABC 的三个角相等。

(2) P：太阳从东方升起；Q：$2+2=4$。

解 (1) $P\leftrightarrow Q$：三角形 ABC 是等边三角形，当且仅当三角形 ABC 的三个角相等。由于 P 真时，Q 一定真；P 假时，Q 一定假，根据定义 $P\leftrightarrow Q$ 是真的。

(2) $P\leftrightarrow Q$：太阳从东方升起，当且仅当 $2+2=4$。由于 Q 永远是真的，所以，当 P 真时，即太阳从东方升起，$P\leftrightarrow Q$ 是真的；否则 $P\leftrightarrow Q$ 是假的。（解毕）

双条件联结词在自然语言中有许多表达方式：

“P 当且仅当 Q。”

“P 是 Q 的充分必要条件。”

1.2 合式公式

如同编程语言或任一种自然语言一样，每当涉及符号时，总会产生至少两个问题。第一个问题涉及的是语法，即表达式的语法是否正确？第二个问题涉及的是语义，即该表达式的含意是什么？

称语法正确的表达式为合式公式（well-formed formula），或简单地称为 wff，可以读作“woof”。为了确定一个表达式是否是一个 wff，在逻辑语言中，需要为合式公式的形成，确切定义语法规则。

1.2.1 语 法

首先，必须商定一个符号集作为所使用的字母表。为了讨论方便，将使用以下符号集：

真值符号：1，0。

联结词符号：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$。

命题变元：如 P，Q 和 R 这样的英文大写字母（可以加下标）。

标点符号（punctuation symbols）：左括号（，右括号）。

有了字母表，需要定义形成语言中的合式公式的表达式或字符串。通过给出命题 wff 集的以下非形式的归纳定义来实现这一点。

定义 1.2.1 合式公式的归纳定义如下：

一个 wff 或者是一个真值符号；或者是一个命题变元；或者是一个 wff 的否定；或者是两个 wff 的合取；或者是两个 wff 的析取；或者是一个 wff 蕴涵另一个 wff；或者是一个 wff 当且仅当另一个 wff，或者是由圆括号围起来的 wff。

例 1.2.1 以下表达式：

$$1,\ 0,\ P,\ \neg Q,\ P\wedge Q,\ P\rightarrow Q, (P\vee Q)\wedge R, (P\wedge Q)\rightarrow R$$

都是 wff。

如果规定联结词的运算顺序为

$\neg$（最高级或首先做）

$\wedge$

$\vee$

$\rightarrow$