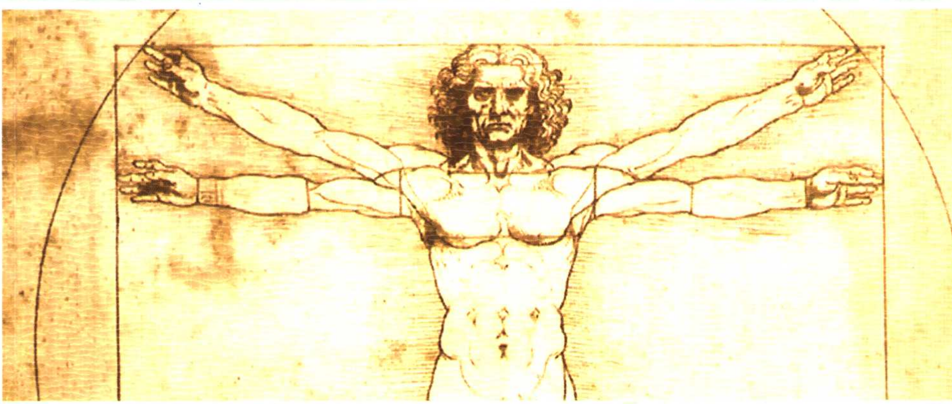
科学谜奥系列之28

袁伟华/主编 KEXUEMIAOXILIE

数学谜奥



《科学谜奥系列》，是一套帮助青少年了解学习科学知识的科普读物，内容新奇有趣，语言通俗易懂。融离奇性、怪异性、奥秘性于一炉，集知识性、趣味性、科学性于一体。可以引导读者去发现科学的奥妙，开阔读者的科学知识视野，激发读者的科学求索精神。因此，该系列是一套颇具特色的益智科普读物。

延边大学出版社

• 科学谜奥系列 •

数学谜奥

袁伟华　主编

延边大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学谜奥/袁伟华主编．—2版．—延吉：延边大学出版社，2006.12

（科学谜奥系列；19）

ISBN 7－5634－1650－1

Ⅰ. 数…　Ⅱ. 袁…　Ⅲ. 数学－青少年读物　Ⅳ. 01－49

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第034610号

科学谜奥系列

数 学 谜 奥

袁伟华　主编

延边大学出版社出版发行

（吉林省延吉市延边大学院内）

北京冶金大业印刷有限公司印刷

850×1168毫米　1/32　　印张：197.5　字数：3490千字

2002年6月第1版　　2006年12月第2版第1次印刷

ISBN 7－5634－1650－1/G・382

定价：780.00元（1－39册）

内容简介

《科学谜奥系列》是一套帮助青少年了解学习科学知识的科普读物，共39本。各书从不同角度，分别对太空、地球、气象、海洋、湖泊、流泉、山洞、动物、植物、人体、外星人、野人、飞碟、科技、建筑、航天、医学、数学、物理、化学、人物、历史、文艺、军事、灵异、部族等方面的谜团及奇异现象，进行了详尽科学的介绍和解释。内容新奇有趣，语言通俗易懂。融离奇性、怪异性、奥秘性于一炉，集知识性、趣味性、科学性于一体。可以引导读者去发现科学的奥妙，开阔读者的科学知识视野，激发读者的科学求索精神。因此，该系列是一套颇具特色的益智科普读物。

目　　录

奇妙的孙子定理

在我国古代算术《孙子算经》中，有这样一个问题："今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二；问物几何?"意思是说现在有一些东西，不知数量有多少，如果每次数三个，最后剩下两个，每次数五个，则剩下三个，每次数七个，也剩下两个，问这些东西有多少?

这个问题可归纳为：一个数除以 3 余 2，除以 5 余 3，除以 7 余 2，求适合这些条件的最小数。

《孙子算经》还介绍了这类问题的解法："三三数之剩二，置一百四十；五五数之剩三，置六十三；七七数之剩二，置三十；并之，得二百三十三，以二百一十减之即得。"关于这类问题的一般解法，在明朝程大位的《算法流宗》（1592 年）里有这样一首歌：三人同行七十稀，五树梅花廿一枝，七子团圆整半月，除百零五便得知。"

具体来说，解法是这样的：

先求能被 5 和 7 整除，而被 3 除余 1 的数，它是 70，再将 70 乘以 2 得 140，140 能满足"三三数之剩二"的条

件。

其次求能被 3 和 4 整除而被 5 除余 1 的数，这应是 21，将 21 乘以 3 得 63，63 能满足条件“五五数之剩三”的条件。

再求能被 3 和 5 整除而被 7 除余 1 的数，这是 15，将 15 乘以 2 得 30，30 能满足“七七数之剩二?”的条件。

把 140、63、30 相加，得 140＋63＋30＝233。

233 比 3、5、7 的最小公倍数 105 大，所以 233 不是符合条件的最小数。从 233 中减去 3、5、7 的最小公倍数 105 的 2 倍，得 23。23 才是符合条件的最小数。

这个问题和它的解法在世界数学史上享有盛名，中外数学家都称之为中国剩余定理或孙子定理。

（刘戟锋）

圆面积之谜

怎样求圆面积？这已是一个非常简单的问题，用公式一算，结论就出来了。可是你可知道这个公式是怎样得来的吗？在过去漫长的年代里，人们为了研究和解决这个问题，不知遇到了多少艰难困苦，花费了多少精力和时间。

在平面图形中，以长方形的面积最容易计算了。用大小一样的正方形砖铺垫长方形地面，如果横向用八块，纵向用六块，那一共就用了 $8\times6=48$ 块砖。所以求长方形面积的公式是：长×宽。

求平行四边形的面积，可以用割补的方法，把它变成一个与它面积相等的长方形。长方形的长和宽，就是平行四边形的底和高。所以求平行四边形面积的公式是：底×高。

求三角形的面积，可以对接上一个和它全等的三角形，成为一个平行四边形。这样，三角形的面积，就等于和它同底同高的平行四边形面积的一半。因此求三角形面积的公式是：$\frac{1}{2}$×底×高。

任何一个多边形，因为可以分割成若干个三角形，所以它的面积，就等于这些三角形面积的和。

四千多年前修建的埃及胡夫金字塔，底座是一个正方形，占地五万二千九百平方米。它的底座边长和角度计算十分准确，误差很小，可见当时测算大面积的技术水平已经很高。

圆是最重要的曲边形。古埃及人把它看成是神赐予人的神圣图形。怎样求圆的面积，是数学对人类智慧的一次考验。

也许你会想，既然正方形的面积那么容易求，我们只要想办法做出一个正方形，使它的面积恰好等于圆面积就行了。是啊，这样的确很好，但是怎么样才能做出这样的正方形呢？

你知道古代三大几何难题吗？其中的一个，就是刚才讲到的化圆为方。这个起源于古希腊的几何作图题，在两千多年里，不知难倒了多少能人，直到 19 世纪，人们才证明了这个几何题，是根本不可能用古代人的尺远见作图法作出来的。

化圆为方这条路行不通，人们不得不开动脑筋，另找出路。

我国古代的数学家祖冲之，从圆内接正六边形入手，让边数成倍增加，用圆内接正边形的面积去逼近圆面积。

古希腊的数学家，从圆内接正多边形和外切正多边形同时入手，不断增加它们的边数，从里外两个方面去逼近圆面积。

古印度的数学家，采用类似切西瓜的办法，把圆切成许多小瓣，再把这些小瓣对接成一个长方形，用长方形的面积去代替圆面积。

众多的古代数学家煞费苦心，巧妙构思，为求圆面积作出了十分宝贵的贡献。为后人解决这个问题开辟了道路。

16 世纪的德国天文学家开普勒，是一个爱观察、肯动脑筋的人。在天文地理学一篇我们曾提到过他把丹麦天文学家第谷遗留下来的大量天文观测资料，认真地进行整理分析提出了著名的“开普勒三定律”。开普勒第一次告诉人们，地球围绕太阳运行的轨道是一个椭圆，太阳位于其中的一个焦点上。

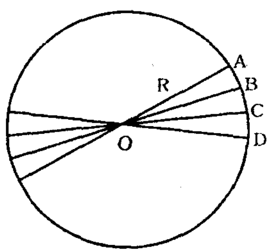


图 14

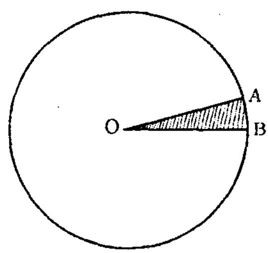


图 15

开普勒当过数学老师，他对求面积的问题非常感兴趣，曾进行过深入的研究。他想，古代数学家用分割的方法去求圆面积，所得到的结果都是近似值。为了提高近似的程度，他们不断地增加分割的次数。但是，不管分割多少次，几千几万次，只要是有限次，所求出来的总是圆面积的近似值。

要想求出圆面积的精确值，必须分割无穷多次，把圆分成无穷多等分才行。

开普勒也仿照切西瓜的方法，把圆分割成许多小扇形；不同的是，他一上来就把圆分成无穷多个小扇形。

因为这些扇形太小了，小弧$\overset{\frown}{AB}$也太短了，所以开普勒就把小弧$\overset{\frown}{AB}$和小弦，$\overline{AB}$看成是相等的，即$\overset{\frown}{AB}=\overline{AB}$。

这样一来，小扇形 AOB 就变成为小三角形 AOB 了；而小三角形 AOB 的高就是圆的半径 R。于是，开普勒就得到：

小扇形 AOB 的面积＝小三角形 AOB 的面积$=\frac{1}{2}R\times\overline{AB}$。

圆面积等于无穷多个小扇形面积的和，所以圆面积 $S=\frac{1}{2}R\times\overline{AB}+\frac{1}{2}R\times\overline{BC}+\frac{1}{2}R\times\overline{CD}+\cdots\cdots$

$$=\frac{1}{2}R\times(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\cdots\cdots)。$$

在最后一个式子中，各段小弧相加就是圆的周长 $2\pi R$，所以有

$$S=\frac{1}{2}R\times2\pi R=\pi R^2。$$

这就是我们所熟悉的圆面积公式。

开普勒运用无穷分割法，求出了许多图形的面积。1615 年，他将自己创造的这种求圆面积的新方法，发表在《葡萄酒桶的立体几何》一书中。

开普勒大胆地把圆分割成无穷多个小扇形，并果敢

地断言：无穷小的扇形面积，和它对应的无穷小的三角形面积相等。他在前人求圆面积的基础上，向前迈出了重要的一步。

《葡萄酒桶的立体几何》一书，很快在欧洲流传开了。数学家们高度评价开普勒的工作，称赞这本书是人们创造求圆面积和体积新方法的灵感源泉。

一种新的理论，在开始的时候很难十全十美。开普勒创造的求圆面积的新方法，引起了一些人的怀疑。他们问道：开普勒分割出来的无穷多个小扇形，它的面积究竟等于不等于零？如果等于零，半径 OA 和半径 OB 就必然重合，小扇形 OAB 就不存在了；如果客观存在的面积不等于零，小扇形 OAB 与小三角形 OAB 的面积不就会相等。开普勒把两者看作相等就不对了。

面对别人提出的问题，开普勒自己也解释不清。

卡瓦利里是意大利物理学家伽利略的学生，他研究了开普勒求圆面积方法存在的问题。

卡瓦利里想，开普勒把圆分成无穷多个小扇形，这每个小扇形的面积到底等不等手圆面积，就不好确定了。但是，只要小扇形还是图形，它是可以再分的呀。开普勒为什么不再继续分下去了呢？要是真的再细分下去，那分到什么程度为止呢？这些问题，使卡瓦利里陷入了沉思之中。

有一天，当卡瓦利里的目光落在自己的衣服上时，他忽然灵机一动：唉，布不是可以看成为面积嘛！布是由棉线织成的，要是把布拆开的话，拆到棉线就为止了。

我们要是把面积了像布一样拆开，拆到哪儿为止呢？应该拆到直线为止。几何学规定直线没有宽度，把面积分到直线就应该不能再分了。于是，他把不能再细分的东西叫做“不可分量”。棉线是布的不可分量，直线是平面面积的不可分量。

卡瓦利里还进一步研究了体积的分割问题。他想，可以把长方体看成为一本书，组成书的每一页纸，应该是书的不可分量。这样，平面就应该是长方体体积的不可分量。几何学规定平面是没有薄厚的，这样想也是有道理的。

卡瓦利里紧紧抓住自己的想法，反复琢磨，提出了求圆面积和体积的新方法。

1635 年，当《葡萄酒桶的立体几何》一书问世二十周年的时候，意大利出版了卡瓦利里的《不可分量几何学》。在这本书中，卡瓦利里把点、线、面，分别看成是直线、平面、立体的不可分量；把直线看成是点的总和，把平面看成是直线的总和，把立体看成是平面的总和。

卡瓦利里怎样用不可分量求面积的呢？现在以椭圆为例，介绍如下：

椭圆有一条长轴和一条短轴，如图 16 相交于 O，把椭圆分成了四等份。

卡瓦利里设 a 和 b 是长轴和短轴的一半；以椭圆中心 O 为圆心，以 b 为半径，在椭圆内作一个圆。

他根据不可分量的想法，把椭圆面积的四分之一，看成是由无穷多条平行于 a 的线段组成，每一条线段与

圆交于一点。

卡瓦利里根据椭圆的性质推出，任一条和 a 平行的线段 MN，与圆交于 P，一定有

$$\frac{MP}{MN}=\frac{b}{a}$$

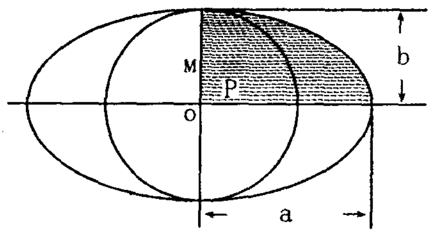


图 16

他把这样引出的无穷多条平行线段，由小到大编上 M_1N_1，M_2N_2，M_3N_3，……就可以得到一大串比例式

$$\frac{M_1P_1}{M_1N_1}=\frac{M_2P_2}{M_2N_2}=\frac{M_3P_3}{M_3N_3}=\cdots\cdots=\frac{b}{a}。$$

比例有这样一个性质：如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 成立，那么 $\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}$ 也成立。他利用比例的这个性质，就得到 $\frac{M_1P_1+M_2P_2+M_2P_2\cdots\cdots}{M_1N_1+M_2N_2+M_3N_3\cdots\cdots}=\frac{b}{a}$。

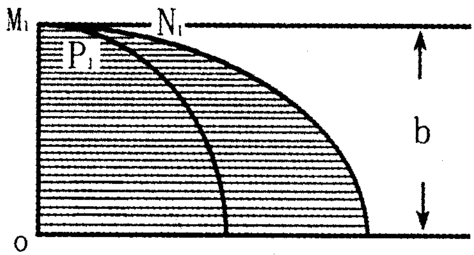


图 17

在卡瓦利里看来，分子的和就是圆面积的四分之一，分母的和就是椭圆面积的四分之一。

因为$\dfrac{\dfrac{1}{4}\text{圆面积}}{\dfrac{1}{4}\text{椭圆面积}}=\dfrac{\text{圆面积}}{\text{椭圆面积}}=\dfrac{b}{a}$

即$\dfrac{\pi b^2}{\text{椭圆面积}}=\dfrac{b}{a}$，

所以，椭圆面积$=\pi ab$。

这就是我们现在求椭圆面积的公式。

卡瓦利里使用不可分量的方法，求出了许多前人不会求的圆面积，受到了人们的拥护和尊敬。

卡瓦利用还根据不可分量的方法指出，两本书的外形虽然不一样，但是，只要页数相同，薄厚相同，而且每一页的面积也相等，那么，这两本书的体积就应该相等。他认为这个道理，适用于所有的立体，并且用这个道理求出了很多立体的体积。这就是有名的“卡瓦利里原理。”

事实上，最先提出这个原理的，是我国数学家祖暅。

比卡瓦利里早一千多年，所以我们叫它“祖暅原理”或者“祖暅定理”。

（平　非）