



高等学校电子信息类专业规划教材

湖南省科学技术著作基金资助出版

现代信息处理及其应用

谭建豪 章兢 蔡立军 张新国 编 著



清华大学出版社
<http://www.tup.tsinghua.edu.cn>



北京交通大学出版社
<http://press.bjtu.edu.cn>

21 世纪高等学校电子信息类专业规划教材

湖南省科学技术学术著作基金资助出版

现代信息处理及其应用

谭建豪 章 兢 蔡立军 张新国 编著

清华大学出版社
北京交通大学出版社

· 北京 ·

内 容 简 介

本书主要讲述现代信息处理的一些基本原理和方法及其在相关领域的应用,以小波分析为重点,介绍了数理统计、模糊逻辑与神经网络、遗传算法与人工生命原理、专家系统与机器学习原理、正交实验设计与方差分析等现代信息处理技术的基本概念和分析方法,以及作者近年来在这些方面的一些研究成果。全书共分9章,包括:小波分析的数学基础、小波变换、基于小波变换的视频压缩研究及生物医学信号处理、数理统计方法及其应用、模糊逻辑与神经网络法及其应用、遗传算法与人工生命原理及其应用、专家系统与机器学习原理及其应用、正交实验设计与方差分析及其应用、其他方法及其应用。

本书可作为高等院校自动化、电子信息、测控技术与仪表、电气工程、系统工程、机电工程等专业
的本科生和研究生教材,也可作为相关专业工程技术人员的自学参考书。

版权所有,翻印必究。举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

本书防伪标签采用特殊防伪技术,用户可通过在图案表面涂抹清水,图案消失,水干后图案复现;或将表面膜揭下,放在白纸上用彩笔涂抹,图案在白纸上再现的方法识别真伪。

图书在版编目(CIP)数据

现代信息处理及其应用/谭建豪等编著. —北京:清华大学出版社;北京交通大学出版社, 2006.9

(21世纪高等学校电子信息类专业规划教材)

ISBN 7-81082-876-2

I. 现… II. 谭… III. 信息处理-高等学校-教材 IV. G202

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第109010号

责任编辑:周益丹

出版发行:清华大学出版社 邮编:100084 电话:010-62776969

北京交通大学出版社 邮编:100044 电话:010-51686414

印刷者:北京鑫海金澳胶印有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185×260 印张:11.5 字数:278千字

版 次:2006年11月第1版 2006年11月第1次印刷

书 号:ISBN 7-81082-876-2/G·48

印 数:1~4000册 定价:18.00元

本书如有质量问题,请向北京交通大学出版社质监组反映。对您的意见和批评,我们表示欢迎和感谢。
投诉电话:010-51686043, 51686008; 传真:010-62225406; E-mail: press@center.bjtu.edu.cn。

前 言

伴随计算机技术的发展和广泛应用,信号分析与处理理论与技术作为一门新兴学科,正受到越来越多的关注。

运动和状态的改变,都可以用信息来表示。人类通过对自然界的观察提取信息,经过分析处理获得有价值的信息,进而改造自然界。电子、通信、测量、自动控制、计算机等系统的主要任务是通过对提取的信息加工变换、传输与处理实现其特定的功能。在商品流通过程中,信息更是如同生命,而信息的携带者正是各种各样的信息。广而言之,在自然界、工程技术和社会科学中,信息以其特有的形式无处不在。基于众多相关学科的共性,现代信息处理技术已逐步形成一门工程技术基础课。

面对 21 世纪,许多学校正在对传统的教学内容进行改革,自动化、电子信息、测控技术与仪表、电气工程、系统工程、机电工程等专业迫切需要较多与信息相关的知识。由于这些专业的学生在本科阶段已较为扎实地掌握了信号与系统的知识,在研究生阶段已转入人工智能理论与技术的学习。如何将信号与系统及人工智能理论在一个大的框架内以统一的视角用于解决工程实际问题,是本书着力的方向。

本教材是为工业电气自动化及其相关专业编写的。作为一门技术基础课,它以“信号与系统”及“人工智能”课程为先修课。既要学时少,又要让学生对现代信息处理原理及其应用建立较全面的印象,同时还应该使学生学有所用,并为今后的发展打下基础,这是本书编写的指导思想。编者力求使本书避免与先修课程内容的重复,对本书必不可少的相关知识只做简单介绍。

本书主要讲述现代信息处理的一些基本原理和方法及其在相关领域的应用,以小波分析为重点,介绍了数理统计、模糊逻辑与神经网络、遗传算法与人工生命原理、专家系统与机器学习原理、正交实验设计与方差分析等现代信息处理技术的基本概念和分析方法及作者近年来在这些方面的一些研究成果。

全书共分 9 章,各章内容安排如下。

第 1 章,讲述小波分析的数学基础。包括函数空间与基、傅里叶变换、时频分析法等内容。

第 2 章,讨论小波变换。包括小波的定义及基本性质、几种常见的小波、离散小波变换、Mallat 算法、二维连续小波、Haar 小波分析等内容。

第 3 章,阐述了基于小波变换的视频压缩研究及生物医学信号处理。包括视频压缩的若干概念、数字视频压缩基础及小波变换、基于小波变换的静止图像压缩、视频的小波变换压缩方法、小波分析在视频压缩研究中的应用的若干结论、小波分析在生物医学信号处理中的应用等内容。

第 4 章,研究数理统计方法及其应用。包括数据挖掘与数理统计的关系、数理统计与数据库技术的结合、回归分析的基本概念、线性回归方程、线性相关的显著性检验、非线性回归分析、多元线性回归分析、一般情况下的回归分析、逐步回归分析的软件设计、锻

模设计准则的制定等内容。

第5章,研究模糊逻辑与神经网络法及其应用。包括人工神经网络、基于SOFM神经网络的IP电话语音压缩编码设计、基于模糊神经网络的洗衣机控制系统的设计等内容。

第6章,研究遗传算法与人工生命原理及其应用。包括遗传算法、人工生命、基于遗传算法的154T电动车牵引励磁PID控制器的设计等内容。

第7章,研究专家系统与机器学习原理及其应用。包括专家系统原理、机器学习、154T电动轮自卸车状态监测与故障诊断专家系统等内容。

第8章,研究正交实验设计与方差分析及其应用。包括实验设计、方差分析、基于正交规划的最优模锻工艺方案设计准则实验研究等内容。

第9章,探讨其他方法及其应用。包括基于链码差的边界凸凹性判别、计算机笔迹鉴别、文字识别技术的应用等内容。

本书编者从事自动化专业的教学与科研10多年,积累了丰富的教学经验和可供参考的科研成果,对于本书的成功编写无疑将起到关键作用。

在本书编写过程中,得到了鲁蓉蓉老师的鼎力支持及研究生陈文斌、刘小林、蒋海波、刘远民、林波、张伟刚、李丹、李晓光、唐莎、符舒翔的大力帮助,在此表示衷心的感谢。

由于作者水平有限,本书中不妥之处在所难免,恳请读者指正。

编 者

2006年9月

目 录

第1章 小波分析的数学基础	(1)
1.1 函数空间与基	(1)
1.2 傅里叶变换	(5)
1.3 时频分析法	(6)
习题1	(14)
第2章 小波变换	(15)
2.1 小波的定义及基本性质	(15)
2.1.1 从傅里叶分析到小波分析	(15)
2.1.2 连续小波变换和时间-频率分析	(16)
2.2 几种常见的小波	(18)
2.3 离散小波变换	(18)
2.4 Mallat 算法	(19)
2.5 二维连续小波	(20)
2.6 Haar 小波分析	(20)
2.6.1 平均与细节	(20)
2.6.2 尺度函数和小波函数	(21)
2.6.3 小波变换的计算	(24)
2.6.4 逆小波变换	(26)
2.6.5 小波变换的滤波器实现	(27)
2.6.6 小波变换的提升实现	(30)
习题2	(33)
第3章 基于小波变换的视频压缩研究及生物医学信号处理	(34)
3.1 视频压缩的若干概念	(34)
3.1.1 视频压缩研究的目的及意义	(34)
3.1.2 国内外研究现状	(36)
3.1.3 视频编解码结构	(38)
3.2 数字视频压缩基础及小波变换	(39)
3.2.1 引言	(39)
3.2.2 数字视频压缩基础	(39)
3.2.3 小波分析	(42)
3.2.4 离散小波变换	(45)
3.2.5 小波性能特征与选取	(46)
3.2.6 小波变换的统计特点	(47)

3.2.7 小结	(48)
3.3 基于小波变换的静止图像压缩	(48)
3.3.1 引言	(48)
3.3.2 嵌入式零树小波压缩算法(EZW)	(50)
3.3.3 分层树集划分编码算法 SPIHT	(56)
3.3.4 抗干扰编解码措施	(57)
3.3.5 基于整数小波变换的 EZW 算法 WDR	(59)
3.3.6 小结	(61)
3.4 视频的小波变换压缩方法	(61)
3.4.1 引言	(61)
3.4.2 基于时间轴小波变换的视频分割算法	(62)
3.4.3 基于 3D-SPIHT 的三维小波视频编码算法	(63)
3.4.4 小结	(65)
3.5 小波分析在视频压缩研究中的应用的若干结论	(65)
3.6 小波分析在生物医学信号处理中的应用	(66)
3.6.1 引言	(66)
3.6.2 生物医学信号/图像的特点	(66)
3.6.3 各项研究成果	(67)
3.6.4 图像压缩	(68)
3.6.5 小波分析在生物医学信号处理中的应用的若干结论	(69)
习题3	(69)
第4章 数理统计方法及其应用	(70)
4.1 数据挖掘与数理统计的关系	(70)
4.2 数理统计与数据库技术的结合	(71)
4.3 回归分析的基本概念	(72)
4.4 线性回归方程	(73)
4.5 线性相关的显著性检验	(75)
4.5.1 线性回归的方差分析	(75)
4.5.2 相关系数的显著性检验	(76)
4.6 非线性回归分析	(78)
4.6.1 化非线性回归为线性回归	(78)
4.6.2 多项式回归	(78)
4.7 多元线性回归分析	(78)
4.7.1 多元线性回归方程	(78)
4.7.2 多元线性回归的方差分析	(80)
4.8 一般情况下的回归分析	(81)
4.8.1 一般情况下的回归方程	(81)
4.8.2 一般情况下的参数估计	(82)
4.9 逐步回归分析的软件设计	(83)

4.10 锻模设计准则的制定	(84)
4.10.1 研究的内容	(84)
4.10.2 资料收集与数据处理	(84)
4.10.3 飞边尺寸设计准则的制定	(86)
4.10.4 飞边金属消耗设计准则的制定	(89)
4.11 小结	(92)
习题4	(92)
第5章 模糊逻辑与神经网络法及其应用	(95)
5.1 人工神经网络	(95)
5.1.1 概述	(95)
5.1.2 神经网络模型	(96)
5.1.3 神经网络学习算法	(98)
5.1.4 模糊神经网络	(100)
5.2 基于 SOFM 神经网络的 IP 电话语音压缩编码设计	(101)
5.2.1 SOFM 网络聚类算法	(102)
5.2.2 利用 SOFM 网络设计码书	(104)
5.2.3 改进的 SOFM 训练方法	(105)
5.2.4 计算机仿真实验	(106)
5.2.5 小结	(107)
5.3 基于模糊神经网络的洗衣机控制系统的设计	(107)
5.3.1 洗衣机的模糊控制	(108)
5.3.2 洗衣机的模糊神经控制器设计	(110)
5.3.3 洗衣机的模糊神经控制器 MATLAB 仿真	(111)
5.3.4 小结	(113)
习题5	(114)
第6章 遗传算法与人工生命原理及其应用	(116)
6.1 遗传算法	(116)
6.1.1 基本原理	(116)
6.1.2 遗传算法的主要步骤	(116)
6.2 人工生命	(117)
6.2.1 概述	(117)
6.2.2 人工生命的研究内容和方法	(120)
6.2.3 人工生命的实例	(122)
6.3 基于遗传算法的 154T 电动车牵引励磁 PID 控制器的设计	(123)
6.3.1 遗传算法的原理、基本问题及实现步骤	(124)
6.3.2 基于遗传算法的 PID 控制器参数整定及实验仿真	(126)
6.3.3 小结	(128)
习题6	(129)

第7章 专家系统与机器学习原理及其应用	(130)
7.1 专家系统原理	(130)
7.1.1 人工智能概述	(130)
7.1.2 知识的表示	(130)
7.1.3 搜索原理	(132)
7.2 机器学习	(135)
7.2.1 机器学习概述	(135)
7.2.2 实例学习	(136)
7.2.3 类比学习	(137)
7.3 154T 电动轮自卸车状态监测与故障诊断专家系统	(139)
7.3.1 面向对象分析法	(139)
7.3.2 系统的面向对象分析与建模	(140)
7.3.3 系统实现	(143)
习题7	(143)
第8章 正交实验设计与方差分析及其应用	(146)
8.1 实验设计	(146)
8.1.1 实验设计的意义、原则与基本内容	(146)
8.1.2 样本含量的估计	(147)
8.1.3 正交实验设计	(148)
8.2 方差分析	(153)
8.3 基于正交规划的最优模锻工艺方案设计准则实验研究	(154)
8.3.1 实验的正交规划	(155)
8.3.2 最优模锻工艺方案的确定	(157)
8.3.3 小结	(159)
习题8	(160)
第9章 其他方法及其应用	(161)
9.1 基于链码差的边界凸凹性判别	(161)
9.1.1 引言	(161)
9.1.2 边界特征参数的提取	(161)
9.1.3 基于链码差的边界凸凹性判别	(164)
9.1.4 小结	(165)
9.2 计算机笔迹鉴别	(165)
9.2.1 笔迹鉴别	(165)
9.2.2 笔迹鉴别的特征	(165)
9.3 文字识别技术的应用	(167)
9.3.1 脱机文字自动录入	(167)
9.3.2 笔输入系统	(168)
9.3.3 票据、牌照、名片、证件识别	(168)
9.3.4 工程图自动识别技术	(169)
习题9	(170)
参考文献	(172)

第 1 章 小波分析的数学基础

小波分析 (Wavelet Analysis) 或多分辨率分析 (Multiresolution Analysis) 是傅里叶分析发展史上里程碑式的进展, 近年来在法、美、英等国家成为众多学科共同关注的热点。它被看成是调和分析这一数学领域半个世纪以来工作的结晶, 其基础理论知识涉及到泛函分析、傅里叶分析、信号与系统、数字信号处理等诸方面, 同时具有理论深刻和应用十分广泛的工程的双重意义。本章将首先介绍小波变换基本理论, 且尽量避免烦琐的数学证明及推导, 采用工程观点及数学概念较为直观地叙述其思想, 以揭示小波变换的实质, 使读者可以透过复杂的数学公式来窥探小波的精髓。

1.1 函数空间与基

在此首先简要介绍一下与小波分析有关的泛函分析的基础知识。泛函分析是 20 世纪初发展起来的一个重要数学分支, 其中一个非常重要的基本概念就是函数空间。函数空间就是由函数构成的集合。本节首先给出集合中最简单、最常用的函数空间的定义, 并列出了它们的主要性质, 然后再给出空间的基和算子的概念。

在本书中, 将采用如下标准符号:

$\mathbf{Z}$ 代表整数集, $\mathbf{R}$ 代表实数集, $\mathbf{C}$ 代表复数集, $\mathbf{Z}_+$ 代表正整数集, $\mathbf{R}^n$ 代表 n 维欧氏空间, 内积为 $\langle x, y \rangle = \int_{\mathbf{R}} x(t) \cdot \overline{y(t)} dt$, $\bar{y}$ 为 y 的共轭 (y 的共轭也可以写成 y^*)。

1. 函数空间

在此, 介绍几种常用的函数空间。

1) 距离空间

定义: 设 X 是任一集合, 如果 X 中任意两个元素 x 与 y , 都对应一个实数 $\rho(x, y)$, 而且满足

(1) 非负性: $\rho(x, y) \geq 0$, 当且仅当 $x = y$ 时, $\rho(x, y) = 0$ 。

(2) 对称性: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ 。

(3) 三角不等式: 对于任意的 $x, y, z \in X$, 有 $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$, 则称 $\rho(x, y)$ 为 x 与 y 之间的距离, 而称 X 为以 $\rho(x, y)$ 为距离的空间。

常用的距离空间有如下几种。

(1) n 维欧氏空间。设 $\mathbf{R}^n$ 表示 n 维矢量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的全体所构成的集合, 称为 n 维欧氏空间, 其中 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 都是实数。对于任意的 $x, y \in \mathbf{R}^n$, 定义

$$\rho(x, y) = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2} \quad (1-1)$$

可以证明 $\rho(x, y)$ 满足距离的三个条件, $\mathbf{R}^n$ 为以 $\rho(x, y)$ 为距离的一个距离空间。

(2) 连续函数空间 $C[a, b]$ 。令 $C[a, b] = \{x(t) \mid x(t) \text{ 是 } [a, b] \text{ 上的连续函数}\}$, 称

$C[a, b]$ 为 $[a, b]$ 上的连续函数空间。

对于任意的 $x(t), y(t) \in C[a, b]$, 定义

$$\rho(x(t), y(t)) = \max |x(t) - y(t)| \quad (1-2)$$

可以证明 $\rho(x, y)$ 满足距离的三个条件, 故 $C[a, b]$ 为以 $\rho(x, y)$ 为距离的一个距离空间。

(3) 平方可积函数空间。令 $L^2(\mathbf{R}) = \left\{ x(t) \left| \int_{\mathbf{R}} |x(t)|^2 dt < \infty \right. \right\}$, 称 $L^2(\mathbf{R})$ 为平方可积函数空间, 对于任意的 $x(t), y(t) \in L^2(\mathbf{R})$, 定义

$$\rho(x(t), y(t)) = \left[\int_{\mathbf{R}} (x(t) - y(t))^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1-3)$$

可以证明 $\rho(x, y)$ 满足距离的三个条件, 故 $L^2(\mathbf{R})$ 为以 $\rho(x, y)$ 为距离的一个距离空间。

(4) 平方可积离散序列空间 l^2 。令 $l^2 = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \left| \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \right. \right\}$, 称 l^2 为平方可积离散序列空间。对于任意的 $x, y \in l^2$, 定义

$$\rho(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1-4)$$

可以证明 $\rho(x, y)$ 满足距离的三个条件, 故 l^2 为以 $\rho(x, y)$ 为距离的一个距离空间。

2) 线性空间

设 X 为一非空集合, 若在 X 中规定了线性运算, 即元素的加法和元素的数乘运算, 并满足相应的加法或数乘的结合律及分配律, 则称 X 为一线性空间或矢量空间。对于线性空间的任一矢量用范数来定义其长度。

3) 线性赋范空间

设 X 为一线性空间, 若对于任意 $x \in X$ 有一个确定的非负实数 $\|x\|$ 与它对应, 并满足

$$(1) \quad \forall x \in X, \|x\| \geq 0, \text{ 当且仅当 } x=0 \text{ 时, } \|x\| = 0.$$

$$(2) \quad \forall x \in X \text{ 及 } \lambda \in \mathbf{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$$

$$(3) \quad \forall x, y \in X, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

则称 $\|x\|$ 为 x 的范数, X 为线性赋范空间。令 $\rho(x, y) = \|y - x\|$, 可以证明 $\rho(x, y)$ 满足距离的三个条件, 因此线性赋范空间一定是距离空间。

4) 巴拿赫空间

一个线性赋范空间如果是完备的, 则称它为巴拿赫空间。

5) 希尔伯特空间 (Hilbert 空间)

设 X 为复数域 $\mathbf{C}$ 上的线性空间, 若从 $X \times X$ 到 $\mathbf{C}$ 中定义一个函数 $\langle \cdot, \cdot \rangle$, 使对任意 $x, y, z \in X$, 满足:

$$(1) \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}.$$

$$(2) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{C}, \text{ 有 } \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle.$$

$$(3) \quad \langle x, x \rangle \geq 0, \text{ 当且仅当 } x=0 \text{ 时, 有 } \langle x, x \rangle = 0.$$

则称函数 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为 X 中的内积, 定义了内积的空间 X , 称为内积空间。在内积空间中, 定义范数 $\|\cdot\|$ 如下: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, 而定义距离 $\rho(x, y) = \|x - y\| =$

$\sqrt{\langle x-y, x-y \rangle}$, 则内积空间必为线性赋范空间。完备的内积空间称为 Hilbert 空间。

2. 基、正交基和双正交基

介绍了函数空间的概念后, 下面将讨论函数空间的基及函数展开的问题。在构造小波函数和进行小波变换的分析、处理过程中, 会涉及正交基及双正交基概念问题。下面将阐述这些重要概念。

1) 基

定义: 由函数序列组成的空间。

设 $e_k(t)$ 为一函数序列, X 表示 $e_k(t)$ 所有可能的线性组合构成的集合, 即

$$X = \left\{ \sum_k a_k e_k(t) \mid t, a_k \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{Z} \right\} \quad (1-5)$$

称 X 为由序列 $e_k(t)$ 组成的线性空间, 即 $X = \text{span}\{e_k(t)\}$, 也即对任意 $g(t) \in X$, 可以表达为

$$g(t) = \sum_k a_k e_k(t) \quad (1-6)$$

如果 $e_k(t)$ 线性无关, 则对任意 $g(t) \in X$, $g(t) = \sum_k a_k e_k(t)$ 中的系数 a_k 取唯一的值, 这时, 称 $\{e_k(t)\}$ 为空间 X 的一个基底。

2) 正交

x, y 为内积空间 X 的两个元素, 若 $\langle x, y \rangle = 0$, 则称 x, y 为正交, 用 $x \perp y$ 表示。

(1) 标准正交系

若内积空间 X 中元素列 $\{e_k(t)\}$ 满足

$$\langle e_m(t), e_n(t) \rangle = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \quad (1-7)$$

则称 $\{e_k(t)\}$ 为 X 中的标准正交系。

(2) 完全的标准正交系

设 X 为内积空间, $\{e_k(t)\}$ 为 X 中的一个标准正交系, 若 $x \in X$, $x \perp e_n(t) (n=1, 2, \dots)$, 则必有 $x=0$ (0 表示零元素), 即 x 中不存在非零元素, 使它与所有的 $e_k(t)$ 正交, 则 $\{e_k(t)\}$ 为 X 中的完全的标准正交系。

由以上论述分析, 可以得到如下一个非常重要的定理。

设 $\{e_k(t)\}$ 为 Hilbert 空间 X 中的标准正交系, 令 $M = \overline{\text{span}\{e_n(t)\}}$, 则下列四个条件是等价的。

(1) $\{e_k(t)\}$ 为 X 的完全标准正交系。

(2) $M = X$ 。

(3) $\forall x \in X, \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle x, e_n(t) \rangle \right|^2$ (Parseval 等式)。

(4) $\forall x \in X, x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n(t) \rangle e_n(t)$ 。

称 (4) 为 x 关于完全标准正交系的傅里叶展开, $\langle x, e_n(t) \rangle$ 称为傅里叶展开系数, 其几何意义是: x 等于它的各分量 $\langle x, e_n(t) \rangle e_n(t)$ 的矢量和。

通过上述定理, 把数学分析中的傅里叶展开推广到抽象的 Hilbert 空间中, 揭示了完

全标准正交系、Parseval 等式（能量守恒定律）及傅里叶展开式之间的本质联系。因此，只要找到这种正交系，则空间中的任意元素均可表示为一个傅里叶级数的形式

$$g(t) = \sum_k a_k e_k(t)$$

式中， $a_k = \langle g(t), e_k(t) \rangle$ 称为傅里叶级数。例如，复空间 $L^2(0, 2\pi)$ 的一组规范正交基为函数系 $\left\{ \frac{1}{2\pi} e^{j k x} \right\}$ ，则 $L^2(0, 2\pi)$ 内的任意函数在该系下的展开系数称为傅里叶级数。傅里叶级数是用来分析周期 $T=2\pi$ 的函数的。当周期 $T \rightarrow \infty$ 时，可得到任意非周期函数的傅里叶展开，只是这时级数被积分取代，这就得出了非常熟悉的傅里叶变换，即 $\forall f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ ，其傅里叶变换为

$$F(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} f(x) e^{-j\omega x} dx \quad (1-8)$$

在小波分析中，多分辨率分析（在以后将会详细提到）的核心就是 V_j, W_j 空间的正交归一基 $\Phi_{j,k}(t), \psi_{j,k}(t), j \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{Z}$ (j 为分辨率级数, k 为整数位移)。只要它们已知，就可以将待分析函数 $x(t)$ 投影到不同分辨率的函数空间进行分析。例如，设 $P_j x(t)$ 代表 $x(t)$ 在 V_j 上的投影， $x(t) \in V_j$ ，则必有

$$P_j x(t) = \sum_k x_k^{(j)} \Phi_{j,k}(t)$$

其中 $x_k^{(j)} = \langle x(t), \Phi_{j,k}(t) \rangle$

如果设 $D_j x(t)$ 代表 $x(t)$ 在 W_j 上的投影， $x(t) \in W_j$ ，则必有

$$D_j x(t) = \sum_k x_k^{(j)} \psi_{j,k}(t)$$

其中 $x_k^{(j)} = \langle x(t), \psi_{j,k}(t) \rangle$

3) 双正交基

有些情况下，基底 $e_k(t)$ 之间并不满足标准正交系中规定的正交关系。所以，引入对偶基 $\tilde{e}_k(t)$ 的概念：

$$\langle e_l(t), \tilde{e}_k(t) \rangle = \delta(l - k) \quad (1-9)$$

也可以同样得到函数的分析和综合公式：

$$g(t) = \sum_k \langle g(t), \tilde{e}_k(t) \rangle e_k(t) \quad (1-10)$$

由于这里的正交性存在于展开系和对偶系之间，所以把这种基称为双正交基。

3. 框架和紧框架

由以上正交基和双正交基的概念知道，若函数序列 $e_k(t)$ 是空间 X 的一组正交基，则对于任意函数 $g(t) \in X$ ，可按式 (1-6) 将其展开；若函数序列 $e_k(t)$ 是空间 X 的一组双正交基，则对任意函数 $g(t) \in X$ ，可按式 (1-10) 展开，因为无论正交基还是双正交基，它们的基元素之间都是不相关的，所以展开系数是唯一的。

如果一个函数序列 $\psi_k(t)$ 是相关的，并且仍然允许空间 X 中的元素按照式 (1-10) 展开，这时称这个函数序列 $\psi_k(t)$ 为框架。如果希望框架下的展开系数 $\langle g(t), \psi_k(t) \rangle$ 能够很好地表述原信号 $g(t)$ ，则在两域（原始信号和展开域）之间必须有一个能量对应关系，所以对框架和紧框架有如下定义。

1) 框架

设 H 为一 Hilbert 空间, $\{\psi_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ 为 H 中的一个函数序列, 若对于任意 $f \in H$, 存在 $0 < A < B < \infty$, 使得下述不等式成立, 即

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left| \langle f, \psi_j \rangle \right|^2 \leq B \|f\|^2 \quad (1-11)$$

则称 $\{\psi_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ 为一个框架, 称 A, B 分别为框架的上界、下界。

2) 紧框架

如果式 (1-11) 中, $A = B$, 则称此框架为一紧框架, 这时式 (1-11) 变为

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}} \left| \langle f, \psi_j \rangle \right|^2 = A \|f\|^2 \quad (1-12)$$

由此推导可得: $f = A^{-1} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left| \langle f, \psi_j \rangle \right|^2 \psi_j$ 。需要特别指出的是, 满足此式的紧框架一般并非正交。

当将以上概念运用到小波变换里面的时候, 就可以得到待分析函数的小波分解系数, 同时能很好地通过小波系数重新构成原函数。

1.2 傅里叶变换

在信号处理中, 重要的方法之一是傅里叶变换 (Fourier Transform), 它架起了时间域和频率域之间的桥梁。傅里叶变换一直统治着线性时不变信号处理, 最主要的原因是傅里叶变换所用的正弦波 $e^{j\omega t}$ 是所有线性时不变算子的特征矢量。

设 $f(t)$ 是系统的输入, $f(t) \in L^1(\mathbf{R})$, 函数 $f(t)$ 的连续傅里叶变换为

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt \quad (1-13)$$

$F(\omega)$ 傅里叶逆变换定义为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} F(\omega) d\omega \quad (1-14)$$

要计算傅里叶变换, 需要用数值积分, 即取 $f(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的离散点上的值来计算这个积分。但在实际应用中, 希望用计算机进行信号的频谱分析及其他方面的处理工作, 所以要求信号在时域和频域上是离散的, 且为有限长。下面介绍离散时间傅里叶变换 (Discrete Fourier Transform, 简称 DFT) 的定义。

给定实的或复的离散时间序列 $f_0, f_1, \dots, f_{N-1}$, 设该序列绝对可和, 即 $\sum_{n=0}^{N-1} |f_n| < \infty$, 则序列 $\{f_n\}$ 的离散傅里叶变换为

$$X(k) = F(f_n) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1-15)$$

序列 $\{X(k)\}$ 的离散傅里叶逆变换 (IDFT) 为

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1-16)$$

在式 (1-16) 中, N 是对时间域的离散化, k 是对频率域的离散化, 且它们都是以 N 点为周期的。离散傅里叶变换序列 $\{X(k)\}$ 是以 2π 为周期, 且具有共轭对称性。

从物理意义上讲, 傅里叶变换的实质是把 $f(t)$ 波形分解成许多不同频率的正弦波的叠加和, 这样就可以从时域转换到频域实现对信号的分析。

虽然傅里叶变换能够将信号的时域特征和频域特征联系起来, 但只能从信号的时域和频域分别观察, 不能将二者结合起来。这是因为信号时域波形中不包含任何频域信息, 而其傅里叶谱是信号的统计特性, 它是信号整个时域内的积分, 没有局部化分析信号的功能, 所以不具备时域信息。这样信号分析中的一对矛盾产生了: 时域和频域的局部化矛盾。

在实际生活中, 瞬变信号范围比平稳信号大得多, 也更加复杂, 信号在某一时刻附近的频域特征都很重要, 这就激励着科研工作者去寻找一种新的时频分析方法, 即能将时域和频域结合起来描述观察信号的时-频联合特征, 构成信号的时-频谱, 这就是所谓的时-频分析法。

1.3 时-频分析法

1. 测不准原理

在讨论时-频分析法之前, 首先介绍一下与此密切相关的 Heisenberg 测不准原理 (简称测不准原理)。

能不能构造一个函数 $f(t)$, 使得 $f(t)$ 的能量集中在局部时间上, $f(t)$ 的傅里叶变换 $F(\omega)$ 的能量也集中在某个小的频率域上呢? 先看看 Dirac 函数 $\delta(t-u)$, 它的支集限制在 $t=u$, 其傅里叶变换 $e^{-j\omega u}$ 的能量一致地分散在所有的频率上。众所周知, 只有当 $f(t)$ 在时域上变化缓慢时, $|F(\omega)|$ 才会在高频快速衰减, 因此 $f(t)$ 的能量也必须分散在相对宽的时间域上。

为减小 $f(t)$ 的能量在时间域上的分布范围, 可以利用伸缩变化, 但要保持能量恒定。即当 $s < 1$ 时, 若

$$f_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} f\left(\frac{t}{s}\right) \quad (1-17)$$

则

$$\|f_s\|^2 = \|f\|^2 \quad (1-18)$$

$f_s(t)$ 的傅里叶变换为 $\sqrt{s}F(s\omega)$ 。所以虽然 $f_s(t)$ 的时间局部性变优了, 但其频率局部性却变差了, 即时间局部性与频率局部性是相斥的。最根本的问题是找出一种折衷的方案, 保证时-频域上都有相对好的局部性。

Heisenberg 测不准原理限制了时-频能量的同时集中, 该原理在量子力学中有一个相当重要的解释, 即粒子的位置与动量同时度量时-频的测不准性。一个一维粒子的状态可以用一个 $L^2(\mathbf{R})$ 中的波函数 $f(t)$ 来描述。位于 t 位置的粒子的概率密度为 $\frac{1}{\|f\|^2} |f(t)|^2$;

当粒子的动量为 ω 时, 其概率密度为 $\frac{1}{2\pi \|f\|^2} |F(\omega)|^2$ 。该粒子的平均位置为

$$u = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t |f(t)|^2 dt \quad (1-19)$$

其平均动量为

$$\xi = \frac{1}{2\pi \|f\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega |F(\omega)|^2 d\omega \quad (1-20)$$

围绕这些平均值的方差分别为

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-u)^2 |f(t)|^2 dt \quad (1-21)$$

及

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi \|f\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega-\xi)^2 |F(\omega)|^2 d\omega \quad (1-22)$$

σ_t 越大, 自由粒子位置的不确定性就越大; 同样地, σ_ω 越大, 自由粒子动量的不确定性也越大。

$f \in L^2(\mathbf{R})$ 的时-频变差满足不等式

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq \frac{1}{4} \quad (1-23)$$

其中等号成立当且仅当存在 $(u, \xi, a, b) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{C}^2$, 使得 $f(x) = a \exp[i\xi t - b(t-u)^2]$ 。这就是著名的 Heisenberg 测不准原理。

测不准原理说明函数与其傅里叶变换的能量跨度是不可能同时任意小的。

为了推证上述原理, 首先将系统阶跃响应 $g(t)$ 上升时间的计算转化为冲激响应 $h(t)$ 持续时间的计算, 因为 $g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$, 以理想低通特性为例, 如图 1-1 所示, 在 $h(t)$ 持续时间内由于积分值的增长, 恰好对应 $g(t)$ 的上升时间。在下面的推证中, 求阶跃响应上升时间与带宽乘积的问题也可用冲激响应时间与带宽的乘积来计算。

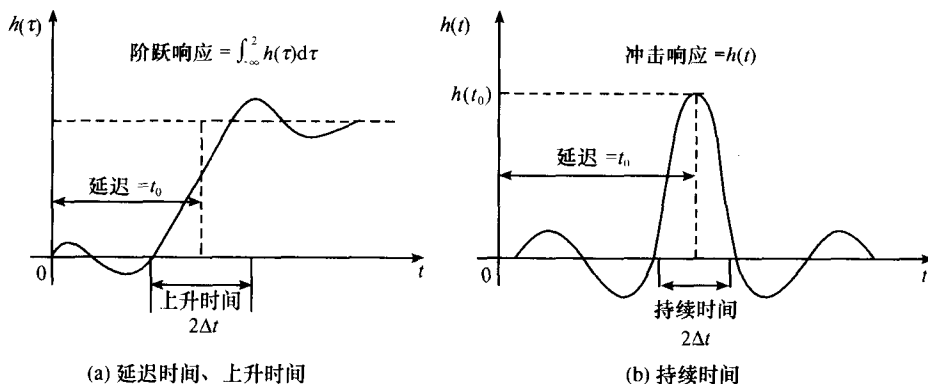


图 1-1 延迟时间、上升时间和持续时间

这里将要遇到的困难是各种时域波形与频谱图很难用统一的方式规定上升时间与带宽的定义标准。在实际电路分析中, 一种常用的定义方法是: 上升时间为阶跃响应由终值的 10% 到 90% 所经历的时间 (或按其他百分比规定)。此方法使计算烦琐, 且难以反映波形的不同特点。在频域也存在类似的问题, 例如, 具有多次起伏型的频谱函数 (如 S_a 数), 通常按两个第一零点间的距离定义带宽, 这种方法相当粗糙, 且难以与其他类型的谱图统一要求。显然, 上述方法都不宜作为理论分析的统一定义标准。

从能量分布的观点给出上述定义是一种比较合理的方法。假如 $h(t)$ 的中心值位于 t_0 , 信号能量主要集中于 $t_0 \pm \Delta t$ 的范围之内, 可以规定从 $t_0 - \Delta t$ 至 $t_0 + \Delta t$ 为持续时间。同理, 若 $H(j\omega) = \Gamma[h(t)]$ 的中心值位于 ω_0 , 信号的能量主要集中于 $\omega_0 \pm \Delta\omega$ 的范围之内, 可以

规定从 $\omega_0 - \Delta\omega$ 至 $\omega_0 + \Delta\omega$ 为带宽。借助二阶矩的概念表达信号能量的分布，于是规定：

$$\Delta t = \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 h^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt} \right]^{1/2} \quad (1-24)$$

$$\Delta\omega = \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 |H(j\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega} \right]^{1/2} \quad (1-25)$$

以上两式中，分子表示信号能量分布的方差，分母的作用是归一化。为简化以下推论，不失一般性，可令 $t_0 = 0$ 、 $\omega_0 = 0$ ，这时对应理想的冲激响应没有时延的情况。

$$\Delta t = \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 h^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt} \right]^{1/2} \quad (1-26)$$

$$\Delta\omega = \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |H(j\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega} \right]^{1/2} \quad (1-27)$$

由傅里叶变换的微分特性可得

$$\Gamma[-jh'(t)] = \omega H(j\omega) \quad (1-28)$$

借助帕塞瓦尔定理可从能量守恒的观点将时域和频域统一起来为

$$\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega \quad (1-29)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |jh'(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |H(j\omega)|^2 d\omega \quad (1-30)$$

将式 (1-29) 与式 (1-30) 代入式 (1-26)，并求 Δt 与 $\Delta\omega$ 之乘积，即

$$\Delta t \Delta\omega = \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 h^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt} \right]^{1/2} \left[\frac{2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |h'(t)|^2 dt}{2\pi \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt} \right]^{1/2} \quad (1-31)$$

利用柯西-施瓦茨不等式可求出式 (1-31) 的下限为

$$\begin{aligned} \Delta t \Delta\omega &= \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} th(t)h'(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt} \right| \\ &= \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t dh^2(t)}{2 \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt} \right| \\ &= \left| \frac{h^2(t)t \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt}{2 \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt} \right| \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (1-32)$$