21 世纪高等院校教材

高等数学

沈京一 张晓晞 主编
刘 坤 许定亮 张 鉴 副主编

科学出版社
www.sciencep.com

21

高等数学

21世纪高等院校教材

高等数学

沈京一　张晓晞　主编
刘　坤　许定亮　张　鉴　副主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书为普通本科及应用型本科工、农、医、管理、经济等专业适用的高等数学教材.内容包括:一元函数微积分、多元函数微积分、向量代数与空间解析几何、无穷级数、微分方程等内容.

本书以应用为主,够用为度为原则,注重对学生创新思维能力的培养,使学生在初等数学的基础上获得微积分等必备的基础知识与基本技能,培养学生用数学方法解决实际问题的能力.特别是在书中适当渗透数学建模的思想与方法,为学生学习后继课程及以后从事专业技术工作奠定基础.

本书可供普通高等工科和应用型本科院校各专业学生、从事高等数学教学的教师和科研工作者使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/沈京一,张晓晞主编. —北京:科学出版社,2007
21世纪高等院校教材

ISBN 978-7-03-017013-2

Ⅰ.高… Ⅱ.①沈…②张… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第019988号

责任编辑:赵 靖 刘 韩 潘继敏/责任校对:李奕萱
责任印制:张克忠/封面设计:陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2007年3月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2007年3月第一次印刷 印张:27 1/2
印数:1—5 000 字数:529 000

定价:36.00元

前　言

当历史的脚步步入新的世纪，我国高等教育的形势也发生了深刻的变化，计算机技术的发展和普及，高等教育由精英教育转向大众教育，一批应用型本科院校应运而生，数学建模与数学实验课的开设等，都要求编写一部适应时代要求、有特色、高质量、切合应用型本科院校实际的高等数学教材. 本书系普通高等工科院校基础课规划教材，是为适应当前实际教学需要而编写的，适用于普通高等工科和应用型本科院校各专业，亦可供相关专业选用.

本书在编写时注重数学思想的渗透和数学方法的介绍，注重应用而淡化理论，既符合教育部关于高等数学教学的基本要求，又特别适合工科院校和应用型本科院校的特点.

本书力求结构严谨，说理浅显；例题较多，便于自学.

本书由沈京一副教授、张晓晞教授组织编写，第 2 章由张晓晞教授编写，第 1、3、4 章由张鉴老师编写，第 5 章由崔春燕副教授编写，第 6 章由冯佳、张鉴老师编写，第 7 章由顾春老师、张晓晞教授编写，第 8 章由王忠英老师编写，第 9 章由刘坤教授编写，第 10 章由怀丽波老师编写，第 11 章由许定亮副教授和张驰老师编写，第 12 章由沈京一副教授和张驰老师编写，全书由刘坤教授、沈京一副教授、张晓晞教授统稿.

在本书的编写过程中得到了常州工学院及北京联合大学领导的大力支持，也得到了科学出版社的鼎力相助，在此一并深表感谢.

由于水平有限，书中一定存在不妥及错漏之处，恳请读者提出宝贵意见.

编　者

2006 年 1 月

目　录

第 1 章　函数、极限、连续

1.1　函数及其性质

1.1.1　函数的概念

1. 常量与变量

我们在观察某一现象的过程时，常常会遇到各种不同的量，其中有的量在过程中不起变化，我们称之为常量（常用 a,b,c 等表示）；有的量在过程中是变化的，也就是可以取不同的数值，我们则称之为变量（常用 x,y,z 等表示）.

如果变量的变化是连续的，则常用区间来表示其变化范围.

设 a 和 b 都是实数，$a<b$.

$(a,b)=\{x|a<x<b\}$ 称为开区间.

$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间.

$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$ 和 $(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$ 称为半开区间.

上述区间中 a 和 b 称为区间的端点，$b-a$ 称为区间的长度.

$(a,+\infty)=\{x|a<x<+\infty\}$ 与 $[a,+\infty)$，$(-\infty,b)$，$(-\infty,b]$，$(-\infty,+\infty)$ 称为无穷区间.

邻域也是一个经常用到的概念. 设 a 是一个实数，$\delta>0$.

开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$；简称 a 的邻域，记作 $U(a)$. 其中 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

将邻域 $U(a,\delta)$ 的中心 a 点去掉后所得的集合称为 a 的去心邻域，记为 $\mathring{U}(a,\delta)$.

2. 函数的定义

定义 1.1.1　设 x,y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照某种确定的对应规则总有确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，$x\in D$. 其中数集 D 称为这个函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量，$\{y|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域，记作 $f(D)$.

表示对应关系的记号 f 也可以改用其他字母，如“g”，“F”等.

需要注意的是，当 x 是 D 中的一个具体的数值 x_0 时，$y=f(x_0)$ 表示的是 x 按

照法则对应的固定数值. 称 $y=f(x_0)$ 为 x_0 的函数值. 注意 $f(x)$ 与 $f(x_0)$ 不同，前者是变量，后者是一个数.

如果对于定义域中的每一个数，对应的函数值总是只有一个，则称这种函数为单值函数，否则称多值函数. 今后无特别声明时，所提到的函数都指单值函数.

函数的三个要素为定义域、对应法则及值域. 尤其在判别两个函数是否相等时常用这三个要素.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 例如，圆的面积 A 与它的半径 r 有函数关系 $A=\pi r^2$，其定义域 $D=(0,+\infty)$. 在数学中，有时不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用算式表达的函数. 这时函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值. 例如，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间 $[-1,1]$，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是开区间 $(-1,1)$.

3. *函数的表示法*

(1) 表格法：以表格形式表示函数的方法称为函数的表格法.

例如，某超市 2004 年第二季度各月茶叶的销售量如表 1.1.1 所示.

表 1.1.1

月份 t	4	5	6
销售量 s/kg	17.5	20.6	25.7

(2) 图示法：以图形表示函数的方法称为函数的图示法.

例如，患者的心电图显示与其心脏有关的电流随时间变动的函数，反映了患者的心率模式，医生用患者的心电图与健康人的正常心电图作比较，可以了解其心脏的健康状况. 这比用公式表示这个函数显然方便实用.

(3) 公式法：用数学式表示函数的方法称为函数的公式法，也称为解析法.

例如，$y=\mathrm{e}^x$，$y=\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}$ 等. 公式法是我们以后常用的表示方法.

函数 $y=f(x)$ 表示两个变量 y 与 x 之间的对应关系，这种函数表达方式的特点是：等号左端是因变量的符号，而右端是含有自变量的式子，当自变量取定义域内任一值时，由这式子能确定对应的函数值. 用这种方法表达的函数叫做显函数.

如果两个变量 y 与 x 之间的对应关系满足一个方程 $F(x,y)=0$，在一定条件下，当 x 取某区间内的任一值时，相应地总有满足这方程的唯一的 y 值存在，那么就说方程 $F(x,y)=0$ 在该区间内确定了一个隐函数.

例如，方程 $x^2+2y-1=0$ 表示一个隐函数.

把一个隐函数化成显函数，叫做隐函数的显化.

例如，从方程 $x^2-y-1=0$ 中解出 $y=x^2-1$，就把隐函数化为了显函数. 隐函数的显化有时是有困难的，甚至是不可能的.

若变量 x 与 y 之间的函数关系是通过参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\phi(t), \end{cases} \quad t\in T$$

给出的，这样的函数称为由参数方程确定的函数，简称参数式函数，t 称为参数.

例如，物体作斜抛运动时，运动的曲线表示的函数就可以写作参数式函数

$$\begin{cases} x=v_0t\cos\alpha, \\ y=v_0t\sin\alpha-\dfrac{1}{2}gt^2, \end{cases}$$

其中 α 为初速度 v_0 与水平方向的夹角，$v_0=|v_0|$.

例 1.1.1 设 $f(x)=2^{x-2}$，求 $f(2)$，$f(0)$，$f\left(\dfrac{5}{2}\right)$.

解 $f(2)=2^{2-2}=2^0=1$，$f(0)=2^{0-2}=\dfrac{1}{4}$，$f\left(\dfrac{5}{2}\right)=2^{\frac{5}{2}-2}=\sqrt{2}$.

例 1.1.2 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，求 $f(x+\Delta x)-f(x)$.

解 $f(x+\Delta x)-f(x)=\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$.

例 1.1.3 求 $y=\ln\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$ 的定义域.

解 因 $\ln\dfrac{1}{1-x}$的定义域 $D_1=(-\infty,1)$，$\sqrt{x+2}$ 的定义域 $D_2=[-2,+\infty)$，所以所求函数的定义域 $D=D_1\cap D_2=(-\infty,1)\cap[2,+\infty)=[-2,1)$.

例 1.1.4 下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同：

(1) $f(x)=(\sqrt{x})^2$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(2) $f(x)=\sqrt{1-\cos^2x}$，$g(x)=\sin x$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^5}$，$g(x)=x\sqrt[3]{1+x^2}$.

解 (1) $D_f=(0,+\infty)$，$D_g=(-\infty,+\infty)$，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不同.

(2) 虽然 $D_f=D_g=R$，但值域不同，R_f 只取正值，而 R_g 可正可负. 实际上，

$$f(x)=|\sin x|\neq\sin x=g(x).$$

(3) $f(x)=g(x)$，因为三个要素均同.

1.1.2 函数的几种特性

1. 有界性

设 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$.

若存在实数 K_1，使得 $\forall x\in X$，总有 $f(x)\leqslant K_1$，则称 $f(x)$ 在 X 上有上界，而 K_1 称为 $f(x)$ 在 X 上的一个上界；

若存在实数 K_2，使得 $\forall x\in X$，总有 $f(x)\geqslant K_2$，则称 $f(x)$ 在 X 上有下界，而 K_2 称为 $f(x)$ 在 X 上的一个下界；

若存在正数 M，使得 $\forall x\in X$，总有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 X 上有界. 若这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 X 上无界，即若 $\forall M>0$，总 $\exists x_1\in X$，使得 $|f(x)|>M$，则 $f(x)$ 在 X 上无界.

例如，$f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，因为 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，总有 $|\sin x|\leqslant 1$.

注意：(1) 同一个函数 $y=f(x)$，$x\in D$，在区间 $I_1\subset D$ 上有界，也可能在另一个 $I_2\subset D$ 上无界. 例如，$f(x)=\dfrac{1}{x}$，$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$f(x)$ 在区间 $(2,3)$ 上有界，因为可取 $M=1$，使得 $\forall x\in(2,3)$，$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$ 成立；但 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上无界，因为 $\forall M>0$，在 $(0,1)$ 中总可取到 $x_1<\dfrac{1}{M}$，从而使 $\left|\dfrac{1}{x_1}\right|=\dfrac{1}{x_1}>M$.

(2) $f(x)$ 在 X 上有界的充要条件是 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界. 若仅有上(下)界，未必有下(上)界，因而未必有界. 例如 $f(x)=x^2$，$x\in\mathbf{R}$，显然 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有下界，$f(x)\geqslant 0$，但 $f(x)$ 在 X 上无上界.

2. 单调性

设 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$.

若 $\forall x_1,x_2\in X$，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加；

若 $\forall x_1,x_2\in X$，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调减少. 单调增加和单调减少函数统称为单调函数.

例如，$f(x)=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加，在 $(-\infty,0)$ 上单调减少，在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调的.

又如 $f(x)=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调增加的.

3. 奇偶性

设 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称.

若 $\forall x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；

若 $\forall x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

例如，x，x^3，$\sin x$ 为奇函数，x^2，$\cos x$ 为偶函数.

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称.

注意:不要误认为任一函数,不是奇函数就是偶函数. 例如,$y=2^x$ 与 $y=\ln x$ 就是非奇非偶函数.

4. 周期性

设 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在 $l>0$,使得 $\forall x\in D$,有 $(x\pm l)\in D$,且 $f(x+l)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数,l 称为 $f(x)$ 的周期. 通常说的周期是指最小正周期.

例如,$\sin x,\cos x$ 的周期为 2π;$\tan x$ 的周期为 π.

注意:并非每个周期函数都有最小正周期.

例 1.1.5 狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\notin\mathbf{Q}\end{cases}$$

对任何有理数 r,$D(x+r)=D(x)$. 所以任何有理数 r 均为函数 $D(x)$ 的周期,但无最小正周期.

例 1.1.6 求 $f(x)=A\sin(Bx+C)$ 的周期(A,B,C 为常数,$B>0$).

解 设 l 为 $f(x)$ 的周期 $\Leftrightarrow f(x+l)=f(x)\Leftrightarrow A\sin(B(x+l)+C)=A\sin(Bx+C)\Leftrightarrow A\sin(Bx+C+Bl)=A\sin(Bx+C)\Leftrightarrow Bl=2k\pi\Leftrightarrow l=\frac{2k\pi}{B}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,

$l=\frac{2\pi}{B}$ 为最小正周期.

例 1.1.7 求 $y=\cos^4x+\sin^4x$ 的周期.

解 $y=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x=1-\frac{1}{2}\sin^22x=1-\frac{1}{4}(1-\cos4x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos(4xy)$ 的周期为 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

1.1.3 复合函数与反函数

先举一个例子. 设 $y=\sqrt{u}$,$u\geqslant0$,而 $u=1-x^2$,$|x|\leqslant1$,以 $1-x^2$ 代替第一式的 u,得 $y=\sqrt{1-x^2}$,我们说函数 $y=\sqrt{1-x^2}$,$|x|\leqslant1$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=1-x^2$ 复合而成的复合函数.

定义 1.1.2 设 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f,值域为 $f(D_f)$,而 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D,值域为 $\varphi(D)$. 若 $\varphi(D)\subset D_f$,$\forall x\in D$,有唯一的 $u\in\varphi(D)\subset D_1$,从而有唯一的 $y\in f(D_1)$ 与 x 对应,这就定义了一个从 D 到 $f(D_f)$ 的函数 $f[\varphi(x)]$,$x\in D$,称为由函数 $u=\varphi(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数,它的定义域为 D,变量 u 称为中间变量.

在高等数学中理解复合函数,关键在于对它的分解. 例如,复合函数 $y=\sin\ln x$

可分解为 $y=\sin u$ 与 $u=\ln x$，u 为中间变量.

定义 1.1.3　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，$\forall y\in f(D)$，总有确定的 $x\in D$ 使 $f(x)=y$，得到一个以 y 为自变量，x 为因变量的函数，称为函数 $y=f(x)$ 的反函数. 记作 $x=f^{-1}(y)$，它的定义域为 $f(D)$，值域为 D.

习惯上函数常以 x 为自变量，y 为因变量. 因此函数 $y=f(x)$ 的反函数常记为 $y=f^{-1}(x)$. 在同一坐标下，函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

注意：$y=f^{-1}(x)$ 和 $x=f^{-1}(y)$ 是同一函数，因为对应法则 f^{-1} 没变，只是自变量与因变量的表示字母交换了.

例 1.1.8　求 $y=2x+1$ 的反函数.

解　因为 $x=\frac{1}{2}(y-1)$，所以反函数为 $y=\frac{1}{2}(x-1)$.

定理 1.1.1　若 f 是定义在 D 上的单调函数，则 f 的反函数 f^{-1} 存在，且 f^{-1} 是 $f(D)$ 上的单调函数(证略).

有时从 f 的整个定义域考虑，反函数不存在，但把 f 的定义域适当限制在一定范围上，就可保证反函数存在.

例如，正弦函数 $y=\sin x$，$x\in D=(-\infty,+\infty)$，它在 D 上的反函数不存在，而 $y=\sin x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 是单调增加的，有反函数 $y=\arcsin x$，$x\in[-1,1]$，称为反正弦函数. 类似地，

$y=\cos x$，$x\in[0,\pi]$ 是单调减少的，有反函数 $y=\arccos x$，$x\in[-1,1]$，称为反余弦函数.

$y=\tan x$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 是单调增加的，有反函数 $y=\arctan x$，$x\in[-\infty,+\infty]$，称为反正切函数.

$y=\cot x$，$x\in[0,\pi]$ 是单调减少的，有反函数 $y=\operatorname{arccot} x$，$x\in[-\infty,+\infty]$，称为反余切函数.

1.1.4　初等函数

1. 基本初等函数

幂函数 $y=x^{\mu}(\mu\in\mathbf{R})$；

指数函数 $y=a^{x}(a>1$ 且 $a\neq1)$；

对数函数 $y=\log_{a}x(a>0$ 且 $a\neq1$，特别，当 $a=\mathrm{e}$ 时，记为 $\ln x)$；

三角函数 $y=\sin x,\cos x,\tan x,\cot x$；

反三角函数 $y=\arcsin x,\arccos x,\arctan x,\operatorname{arccot} x$.

以上五种函数统称为基本初等函数.

2. 初等函数

由基本初等函数经有限次的四则运算和有限次的复合运算所构成并可用一个式子表示的函数称为初等函数. 例如

$$y=\ln\cos\frac{e^{x}-e^{-x}}{2},\quad y=\ln\tan\frac{x}{2}-\cot x,\quad y=|x|=\begin{cases}x, x\geqslant 0\\ -x, x<0\end{cases}=\sqrt{x^{2}},$$

都是初等函数.

在有些情况下,一个函数不能用一个解析式表示,如函数

$$y=\begin{cases}x^{2}, & x\geqslant 0,\\ \dfrac{1}{x}, & x<0.\end{cases}$$

它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,但在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上需用不同的表示式 $y=\frac{1}{x}$ 和 $y=x^{2}$ 表示. 就不是初等函数. 在高等数学中讨论的函数绝大多数都是初等函数.

1.1.5 极坐标

在平面内取一个定点 O,引一条射线 Ox,再选定一个单位长度和角度的正方向(通常取逆时针方向),这样就确定了一个极坐标系. 定点 O 叫做极点,射线 Ox 叫做极轴.

对于平面内任意一点 P,用 ρ(或 r)表示 OP 的长度,θ 表示从 Ox 到 OP 的角度,ρ 叫做点 P 的极径,θ 叫做点 P 的极角,那么有序实数对 (ρ,θ) 叫做点 P 的极坐标,表示为 $P(\rho,\theta)$. 如图 1.1.1所示.

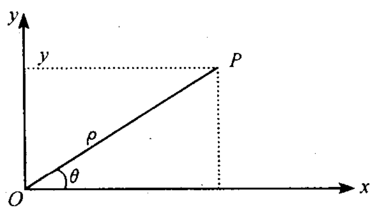

图 1.1.1

极坐标与直角坐标的互化

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\end{cases}\qquad \begin{cases}\rho^{2}=x^{2}+y^{2},\\ \tan\theta=\dfrac{y}{x},\end{cases}\qquad x\neq 0.$$

习 题 1.1

1.1.1 设全集为 $\mathbf{R}$, $A=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 5\}$, $B=\{x\mid x<0\}$,求 $A\cap B$, $A\cup B$.

1.1.2 用区间表示下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{3x+2}$; (2) $y=\dfrac{1}{1-x^{2}}$;

(3) $y=\lg(5-x)+\arcsin\frac{x-1}{6}$;　　(4) $y=\begin{cases}x, & -1\leqslant x<0,\\ 1+x, & 0<x.\end{cases}$

1.1.3　下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\frac{(x+1)^2}{x+1}, g(x)=x+1$;　　(2) $f(x)=\sin x, g(x)=\sin\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4}, g(x)=x\sqrt[3]{x}$;　　(4) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$.

1.1.4　设 $f(x)=\begin{cases}2x, & x\leqslant -1,\\ x^2, & -1<x\leqslant 1,\end{cases}$ 求 $f(-2), f(-1), f(1), f(2)$；并做出 $y=f(x)$ 的图形.

1.1.5　确定下列函数的奇偶性：

(1) $y=\frac{\sin x}{x}$;　　(2) $y=\sin x+\cos x$;

(3) $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$;　　(4) $y=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$.

1.1.6　求下列函数的反函数：

(1) $y=2^x+1$;　　(2) $y=\frac{1+x}{1-x}$.

1.1.7　下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期.

(1) $y=\sin(ax+b), a\neq 0$;　　(2) $y=x\sin x$;

(3) $y=\sin^2 x$;　　(4) $y=\tan\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{3}$.

1.1.8　设 $f(\sin x)=\cos 2x+1$，求 $f(\cos x)$.

1.1.9　已知 $f(x)=x^3+1, g(x)=\sqrt{x}$，求：(1) $g(f(x))$；(2) $f(g(x))$；(3) $f(f(x))$.

1.1.10　指出下列函数的复合过程：

(1) $y=\sin 2x$;　　(2) $y=e^{\frac{1}{x}}$;

(3) $y=e^{\sin^3 x}$;　　(4) $y=\arcsin[\lg(2x+1)]$.

1.1.11　做一个容积为 V 的长方体的水池，其底为正方形，设底的单位面积的造价是侧面造价的两倍，试将总造价表示为底边长的函数.

1.1.12　将下列各点的极坐标化为直角坐标：

$A\left(-3,\frac{\pi}{2}\right)$,　$B(2,-\pi)$,　$C(-3,-3)$,　$D(-5,0)$.

1.1.13　化下列曲线的极坐标方程为直角坐标方程：

(1) $\theta=\frac{\pi}{4}$;　(2) $\rho=2a\cos\theta$;　(3) $\rho=\frac{1}{1-2\cos\theta}$;　(4) $\rho=\frac{1}{2\sin\theta-3\cos\theta}$.

1.2　数列的极限

极限是高等数学中的一个重要概念，极限论的方法是高等数学中处理问题的最基本的方法. 学好高等数学必须准确理解极限的基本思想，并且掌握好极限的重

要性质和运算法则.

1.2.1 数列极限的定义

在讲述一般的极限概念之前，首先介绍刘徽的“割圆术”. 设有一半径为 1 的圆，在只知道直边形面积计算方法的情况下，要计算其面积. 为此，他先做圆的内接正六边形，其面积记为 A_1，再做圆的内接正十二边形，其面积记为 A_2，内接正二十四边形，其面积记为 A_3，如此逐次将边数加倍. 他说：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣.”用现在的话说，即当圆的内接正多边形边数 n 无限增大时，圆的内接正 n 边形面积 A_n 无限接近于圆面积.

在这个问题中，我们无法直接计算圆的面积，而是计算圆的面积的一系列近似值(即圆内接正 n 边形的面积 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$)，通过考察这一系列近似值的变化趋势得到圆的面积. 这种方法就是极限方法.

上面得到的一组数 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 就是一个数列.

一般地说，如果按某个法则把无穷多个数按一定次序排成一列 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$，称这一列数为一个无穷数列(简称为数列)，记为 $\{x_n\}$，有时也记作 x_n. 数列中的每一个数叫做数列的项，第 n 项叫做数列的一般项或通项.

实质上，数列不是新概念，它只不过是一个以正整数 n 为自变量的一个函数，即

$$x_n = f(n), \qquad n = 1, 2, \cdots$$

也称数列为整标函数.

例如

$$\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots, \sqrt{n}, \cdots; \quad \{\sqrt{n}\} \tag{1.2.1}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots; \quad \left\{\frac{1}{2^n}\right\} \tag{1.2.2}$$

$$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \cdots; \quad \left\{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\right\} \tag{1.2.3}$$

几何上，数列对应着数轴上一个点列. 可看作一动点在数轴上依次取 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$(图 1.2.1).

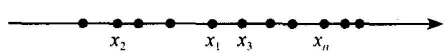

图 1.2.1

对于数列，我们最关注的是它在无限变化过程中的发展趋势，即当 n 无限增大时，x_n 是否无限趋近于一个常数.

我们来考察一下数列 $\left\{4+\frac{1}{n}\right\}$，随着 n 无限增大，对应的 x_n 与常数 4 越来越接近，同时与常数 3,2,1,0,…都越来越接近. 但是唯一地与常数 4 无限接近，与常数 3,2,1,0,…不能无限接近，只能越来越接近. 还有的数列随着 n 无限增大(记为 $n\to\infty$)不与某常数越来越接近，更不能与某常数无限接近. 如数列(1.2.1)不能与