

人民教育出版社授权  
配人教版教材使用

高中同步练习丛书



GAOZHONG TONGBU LIANXI CONGSHU

# 数 学

第二册 (上)



浙江教育出版社

---

图书在版编目(CIP)数据

高中同步练习丛书. 数学. 第2册. 上/王利明等编写.  
—2版. —杭州: 浙江教育出版社, 2002.7(2006.7重印)  
ISBN 7-5338-4463-7

I. 高... II. 王... III. 数学课—高中—习题  
IV. G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第 043581 号

---

高中同步练习丛书

数 学

第二册(上)

- 
- ▶ 出 版 浙江教育出版社  
(杭州市天目山路40号 邮编:310013)  
发 行 浙江省新华书店集团有限公司  
▶ 责任编辑 华 琼  
装帧设计 李 珺  
▶ 责任校对 雷 坚  
责任印务 温劲风  
▶ 印 刷 杭州长命印刷有限公司
- 

- 开 本 787×1092 1/16  
▶ 印 张 7  
字 数 155 000  
▶ 版 次 2002年7月第2版  
印 次 2006年7月第7次  
▶ 印 数 0 001-6 700  
书 号 ISBN 7-5338-4463-7/G·4433  
▶ 定 价 6.50 元
- 

联系电话: 0571-85170300-80928

e-mail: zjyy@zjcb.com

网址: www.zjeph.com

## 编写说明

《高中同步练习丛书·数学》以人民教育出版社编著的新版《数学》教科书(试验修订本)为依据编写,旨在使高中学生课后及时得到知识的巩固性练习,并为教师单元复习和解题示范提供材料。丛书在编写过程中,充分考虑新教材的特点,内容安排和习题设置力求与新教材同步,并兼顾会考和高考要求,体现数学应用与研究性学习。

《高中同步练习丛书·数学》以节编排,每节内容设立[知识回顾]、[知识应用]、[综合与提高]三个栏目。其中[知识回顾]罗列出该节主要定义、定理和重要的思想方法等,[知识应用]提供巩固性练习,[综合与提高]力求体现知识的综合、应用、引申和拓展,具有开放性和探索性,供学有余力的学生选用。本书所编习题既具广度、深度,又具梯度、新意,使学生通过本书的同步练习,进一步掌握教材知识,形成知识的系统结构,并使所学知识得以适当引申和拓展,从而提高数学的综合应用能力和创新意识和实践能力。

《高中同步练习丛书·数学》共六册,分别与现行高中新教材《数学》(试验修订本)第一册(上)、第一册(下)、第二册(上)、第二册(下)、第三册(选修水平Ⅰ)、第三册(选修水平Ⅱ)同步。

参加《数学》分册编写的有袁宗钦、宓彤波、王利明、胡国强、楼肇庆、许晶、何田田等同志。

浙江教育出版社

2002年6月

# 目 录

## 第六章 不等式

6.1 不等式的性质 .....	1
6.2 算术平均数与几何平均数 .....	4
6.3 不等式的证明 .....	6
6.4 不等式的解法举例 .....	12
6.5 含有绝对值的不等式 .....	15
小结与复习 .....	17
第六章综合练习 .....	20

## 第七章 直线和圆的方程

7.1 直线的倾斜角和斜率 .....	23
7.2 直线的方程 .....	25
7.3 两条直线的位置关系 .....	29
7.4 简单的线性规划 .....	35
研究性学习课题与实习作业:线性规划的实际应用 .....	38
7.5 曲线和方程 .....	40
7.6 圆的方程 .....	44
小结与复习 .....	47
第七章综合练习 .....	50

## 第八章 圆锥曲线方程

8.1 椭圆及其标准方程 .....	53
8.2 椭圆的简单几何性质 .....	56
8.3 双曲线及其标准方程 .....	62
8.4 双曲线的简单几何性质 .....	65
8.5 抛物线及其标准方程 .....	68
8.6 抛物线的简单几何性质 .....	71
小结与复习 .....	74
第八章综合练习 .....	77

期末综合练习 .....	80
--------------	----

答案与提示 .....	84
-------------	----

## 第六章 不等式

### 6.1 不等式的性质

#### 知识回顾

- ▲ 若  $a, b \in \mathbf{R}$ , 则  $a > b \Leftrightarrow a - b$  \_\_\_\_\_ 0;  $a = b \Leftrightarrow a - b$  \_\_\_\_\_ 0;  
 $a < b \Leftrightarrow a - b$  \_\_\_\_\_ 0.
- ▲ 不等式的性质:  $a > b \Leftrightarrow b$  \_\_\_\_\_  $a$ .  $a > b, b > c \Rightarrow a$  \_\_\_\_\_  $c$ .  
 $a > b \Rightarrow a + c$  \_\_\_\_\_  $b + c$ ;  $a > b, c > d \Rightarrow a + c$  \_\_\_\_\_  $b + d$ .  
 $a > b, c > 0 \Rightarrow ac$  \_\_\_\_\_  $bc$ ;  $a > b, c < 0 \Rightarrow ac$  \_\_\_\_\_  $bc$ .  
 $a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac$  \_\_\_\_\_  $bd$ .  
 $a > b > 0 \Rightarrow a^n$  \_\_\_\_\_  $b^n$  ( $n \in \mathbf{N}$ , 且  $n > 1$ ).  
 $a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}$  \_\_\_\_\_  $\sqrt[n]{b}$  ( $n \in \mathbf{N}$ , 且  $n > 1$ ).
- ▲  $a > b, ab > 0 \Rightarrow \frac{1}{a}$  \_\_\_\_\_  $\frac{1}{b}$ .

#### 知识应用

1. 下列命题中, 正确的是( )
- (A)  $a > b, c > d \Rightarrow ac > bd$ . (B)  $a > b, c > d \Rightarrow a - d > b - c$ .  
(C)  $a > b \Rightarrow ac^2 > bc^2$ . (D)  $a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ .
2. 已知  $a, b \in \mathbf{R}$ , 给出下列四个命题:  
①若  $|a| > b$ , 则  $a^2 > b^2$ ; ②若  $a^2 > b^2$ , 则  $|a| > b$ ;  
③若  $a > |b|$ , 则  $a^2 > b^2$ ; ④若  $a^2 > b^2$ , 则  $a > |b|$ .  
其中正确的命题是( )
- (A) ①和③. (B) ①和④. (C) ②和③. (D) ②和④.
3. 设条件甲:  $a$  和  $b$  满足  $\begin{cases} 2 < a + b < 4, \\ 0 < ab < 3; \end{cases}$  条件乙:  $a$  和  $b$  满足  $\begin{cases} 0 < a < 1, \\ 2 < b < 3. \end{cases}$  那么条件甲是条件乙的( )
- (A) 充分而不必要的条件. (B) 必要而不充分的条件.  
(C) 充要条件. (D) 既不充分也不必要的条件.
4. 已知函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上是增函数. 若  $a + b > 0$ , 则( )
- (A)  $f(a) + f(b) > f(-a) + f(-b)$ . (B)  $f(a) + f(b) > f(-a) - f(-b)$ .  
(C)  $f(a) + f(-a) > f(b) + f(-b)$ . (D)  $f(a) + f(-a) > f(b) - f(-b)$ .

5. “ $a > b > 0$ ”是“ $a^n > b^n$ ”的\_\_\_\_\_条件(其中  $n \in \mathbf{N}^*$ ).
6. 设  $\alpha > 1, -1 < \beta < 0$ , 将  $\alpha, \beta, -\alpha, -\alpha\beta$  按从小到大的顺序排列:\_\_\_\_\_.
7. 若  $-1 < a < b < 1$ , 则  $a - b$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
8. 已知  $a^3 + 1 > a^2 + a$  成立, 则实数  $a$  应满足的条件是\_\_\_\_\_.
9. 若  $6 \leq a \leq 10$ , 则  $\frac{a-1}{a}$  的最大值是\_\_\_\_\_.
10. 已知  $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ . 设  $P = \log_a(a^2 - a + 1), Q = \log_a(a^3 - a + 1)$ , 则  $P$  与  $Q$  的大小关系是\_\_\_\_\_.
11. 已知  $a \neq 0$ , 试比较  $\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3$  与  $2 - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3$  的大小.
12. 已知  $a > b, \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ , 求证:  $a > 0, b < 0$ .
13. 设  $a > b, c > d$ , 且  $a, b, c, d$  中至少有三个同号, 试比较  $ac$  和  $bd$  的大小.
14. 如果  $a > b, n$  为大于 1 的正奇数, 那么不等式  $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$  是否成立? 如果成立, 请证明; 如果不成立, 请说明理由.

15. 根据函数单调性的定义,证明函数  $f(x) = -x^3 + 1$  在  $(-\infty, +\infty)$  上是减函数.
16. 若二次函数  $y = f(x)$  的图象过原点,且  $1 \leq f(-1) \leq 2, 2 \leq f(1) \leq 4$ ,求  $f(-2)$  的取值范围.

### 综合与提高

17. 已知  $a > 0$  且  $a \neq 1, m > n > 0$ . 设  $P = a^m + a^{-m}, Q = a^n + a^{-n}$ ,试比较  $P$  与  $Q$  的大小.
18. 已知  $-3 < a < 2, \frac{a}{3} < b \leq 2a, c = b - 2a$ ,求  $c$  的取值范围.

## 6.2 算术平均数与几何平均数

### 知识回顾

- ▲ 对于正数  $a, b$ , \_\_\_\_\_ 叫做  $a, b$  的算术平均数; \_\_\_\_\_ 叫做  $a, b$  的几何平均数.
- ▲ 若  $a, b$  是正数, 则  $\frac{a+b}{2}$  \_\_\_\_\_  $\sqrt{ab}$  (当且仅当  $a=b$  时取“=”号).
- ▲ 若  $a, b \in \mathbf{R}$ , 则  $a^2+b^2$  \_\_\_\_\_  $2ab$  (当且仅当  $a=b$  时取“=”号).
- ▲ 对于正数  $a, b$ , 若  $a+b$  为定值  $S$ , 则当  $a=b$  时, 积  $ab$  有最 \_\_\_\_\_ 值为  $\frac{S^2}{4}$ ; 若  $ab$  为定值  $P$ , 则当  $a=b$  时, 和  $a+b$  有最 \_\_\_\_\_ 值为  $2\sqrt{P}$ .

### 知识应用

1. “ $a>0, b>0$ ”是“ $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ”的( )
  - (A) 充分而不必要的条件.
  - (B) 必要而不充分的条件.
  - (C) 充要条件.
  - (D) 既不充分也不必要的条件.
2. 设  $a, b \in \mathbf{R}$ . 若  $a+b=2$  且  $a \neq b$ , 则  $1, ab, \frac{a^2+b^2}{2}$  的大小关系是( )
  - (A)  $1 < ab < \frac{a^2+b^2}{2}$ .
  - (B)  $ab < 1 < \frac{a^2+b^2}{2}$ .
  - (C)  $ab < \frac{a^2+b^2}{2} < 1$ .
  - (D)  $\frac{a^2+b^2}{2} < ab < 1$ .
3. 设  $0 < x < 1$ , 则函数  $y=x(1-x)$  的最大值是( )
  - (A)  $\frac{1}{8}$ .
  - (B)  $\frac{1}{4}$ .
  - (C)  $\frac{1}{2}$ .
  - (D) 1.
4. 在  $\triangle ABC$  中, 若边  $a, b, c$  成等差数列, 则角  $B$  的取值范围是( )
  - (A)  $0 < B \leq \frac{\pi}{4}$ .
  - (B)  $0 < B \leq \frac{\pi}{3}$ .
  - (C)  $0 < B \leq \frac{\pi}{2}$ .
  - (D)  $\frac{\pi}{2} < B < \pi$ .
5. 若  $x < 0$ , 则  $y=x+\frac{1}{x}$  的最大值是 \_\_\_\_\_.
6. 设  $a, b \in \mathbf{R}$ . 若  $a+b=3$ , 则  $2^a+2^b$  的最小值是 \_\_\_\_\_.
7.  $\lg 9 \cdot \lg 11$  与 1 的大小关系是 \_\_\_\_\_.
8. 若  $x \in (0, 1)$ , 则函数  $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$  的最大值是 \_\_\_\_\_.
9. 已知  $x+y=1$  ( $x>0, y>0$ ), 求  $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$  的最小值. 请阅读下列解法, 并按要求填空.

解:  $\because x+y=1$  ( $x>0, y>0$ ),

$\therefore$  令  $x=\cos^2\theta, y=\sin^2\theta$  (其中① $\theta$  的取值范围是 \_\_\_\_\_). (②该步运用的数学方法是 \_\_\_\_\_ 法)

$$\text{则 } \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{2}{\sin^2\theta} = \tan^2\theta + 2\cot^2\theta + 3 \geq 3 + 2\sqrt{2}.$$

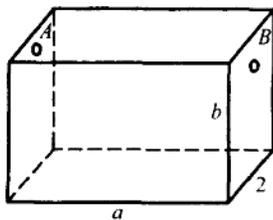
当③ \_\_\_\_\_ ( $x, y$  的取值) 时,  $\frac{1}{x} + \frac{2}{y}$  有最小值  $3 + 2\sqrt{2}$ .

10. 某企业的产量近四年来持续上升. 已知第二年比第一年增长的百分率为  $p_1$ , 第三年比第二年增长的百分率为  $p_2$ , 第四年比第三年增长的百分率为  $p_3$ . 设四年的年平均增长率为  $p$ , 且  $p_1 + p_2 + p_3$  为定值, 则  $P$  的最大值为 \_\_\_\_\_.
11. 已知  $x, y$  是正实数, 且  $x + y = 6$ , 求  $xy^2$  的最大值.

12. 已知  $x, y, a, b$  是正实数, 且  $a \neq b$ ,  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$ . 求证:  $x + y \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ .

13. 若正数  $a, b$  满足  $ab = a + b + 3$ , 求  $ab$  的取值范围.

14. 如图, 为处理含有某种杂质的污水, 要制造一底宽为 2 米的无盖长方体沉淀箱, 污水从 A 孔流入, 经沉淀后从 B 孔流出. 设箱体的长为  $a$  米, 高为  $b$  米, 已知流出的水中该杂质的质量分数与  $a, b$  的乘积成反比. 现有制箱材料 60 平方米, 求当  $a, b$  各为多少米时, 经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小 ( $A, B$  孔的面积忽略不计).



(第 14 题)

## 思维与技巧

15. 设  $a, b$  是正实数, 且  $a+b=1$ , 求  $ab+\frac{1}{ab}$  的最小值.

16. 若关于  $x$  的方程  $9^x+(4+a)3^x+4=0$  有解, 求实数  $a$  的取值范围.

## 6.3 不等式的证明

### (一)

#### 思维与技巧

- ▲ (作差)比较法的主要依据是  $a-b>0 \Leftrightarrow a>b$ ,  $a-b<0 \Leftrightarrow a<b$ , 所以要证  $a>b$ , 只要证明 \_\_\_\_\_; 要证  $a<b$ , 只要证明 \_\_\_\_\_.
- ▲ 用(作差)比较法证明不等式的三个步骤是: \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_.
- ▲ 比较法有作差比较法和作商比较法两种. 作商比较法的基本思路是: 当  $b>0$  时, 要证  $a>b$ , 只要证明  $\frac{a}{b}$  \_\_\_\_\_ 1; 要证  $a<b$ , 只要证明  $\frac{a}{b}$  \_\_\_\_\_ 1.

#### 思维与技巧

1. 若  $0<a<1, 0<b<1$ , 则  $a+b, 2\sqrt{ab}, a^2+b^2, 2ab$  中最大的一项是( )  
(A)  $a^2+b^2$ .      (B)  $2\sqrt{ab}$ .      (C)  $2ab$ .      (D)  $a+b$ .
2. 若  $a>0, b>0$ , 且  $a \neq b, n \in \mathbf{N}^*$ , 则  $ab^n+a^n b-a^{n+1}-b^{n+1}$  的值( )  
(A) 恒为正数.      (B) 其正负与  $a, b$  的大小有关.  
(C) 恒为负数.      (D) 其正负与  $n$  是奇数或偶数有关.
3. 设  $s=1-2b-a^2, t=4-2a+b^2$ , 则  $t$  和  $s$  的大小关系是( )

(A)  $t > s$ .                      (B)  $t \geq s$ .                      (C)  $t < s$ .                      (D)  $t \leq s$ .

4. 若  $a, b, c \in \mathbf{R}$ , 且  $a, b, c$  不全相等, 则  $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$  成立的充要条件是(     )

(A)  $a, b, c$  均为正数.                      (B)  $a, b, c$  均为非负数.  
(C)  $a + b + c \geq 0$ .                      (D)  $a + b + c > 0$ .

5.  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$  与  $\sqrt{5} - 2$  的大小关系是 \_\_\_\_\_.

6. 设  $n > -1$ , 且  $n \neq 1$ , 则  $n^3 + 1$  与  $n^2 + n$  的大小关系是 \_\_\_\_\_.

7. 根据建筑学规定, 民宅窗户面积必须小于地板面积; 但按采光标准, 窗户面积与地板面积的比值应不小于 10%, 并且这个比值越大, 住宅的采光条件越好. 某民宅原设计地板面积为  $b$  平方米, 窗户面积为  $a$  平方米, 若现在将窗户面积和地板面积同时增大  $m$  平方米, 请回答以下两个问题:

(1) 住房的采光条件是否变化? \_\_\_\_\_.

(2) 为什么? \_\_\_\_\_.

8. 已知  $f(x)$  是偶函数, 定义域为  $\mathbf{R}$ , 在  $[0, +\infty)$  上是减函数, 则  $f\left(-\frac{3}{4}\right)$  与  $f(a^2 + a + 1)$

( $a \in \mathbf{R}$ ) 的大小关系是 \_\_\_\_\_.

9. 设  $a, b, c$  为直角三角形的三边, 其中  $c$  为斜边, 那么  $a^3 + b^3$  与  $c^3$  的大小关系是 \_\_\_\_\_.

10.  $\sin \alpha + \sin \beta$  与  $1 + \sin \alpha \sin \beta$  的大小关系是 \_\_\_\_\_.

11. 已知  $a \in \mathbf{R}$ , 试比较  $\frac{1}{1+a}$  与  $1-a$  的大小关系.

12. 已知  $a, b, c$  为正实数, 求证:  $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \geq \frac{ab+bc+ca}{3}$ .

13. 甲、乙两人一起去商店买食盐,一共买了两次.甲每次买1元食盐,而乙每次买1千克食盐.由于市场变化,两次的食盐单价不一样,试问两人买食盐的平均价格谁低一些?请说明理由.

14. 已知  $x \in \mathbf{R}$ , 求证:  $x^6 + x^2 + 1 > x^5 + x$ .

### 综合与提高

15. 若  $a > 0, b > 0$ , 求证:  $a^a b^b \geq (ab)^{\frac{a+b}{2}}$ .

16. 设函数  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - ax$ . 求实数  $a$  的取值范围, 使函数  $f(x)$  在区间  $[0, +\infty)$  上是减函数.

(二)

知识回顾

- ▲ 证明不等式的方法有多种,基本的方法主要有比较法、综合法和分析法. \_\_\_\_\_ 法是由因导果,即从已知条件或已知的真命题出发,一步步推出结论成立. \_\_\_\_\_ 法是执果索因,即从结论开始,一步步寻求上一步成立的充分条件,直至得出一个真命题为止.在证明不等式时,比较法、综合法和分析法可以根据实际情况灵活选择,并且在必要时应综合运用它们去证明同一个问题.

知识应用

- 若  $a > 0, b > 0, 2c > a + b$ , 则  $c^2$  与  $ab$  的大小关系是( )  
 (A)  $c^2 < ab$ . (B)  $c^2 \leq ab$ . (C)  $c^2 > ab$ . (D)  $c^2 \geq ab$ .
- 要证明  $a^2 + b^2 - 1 - a^2 b^2 \leq 0$ , 只需证明( )  
 (A)  $2ab - 1 - a^2 b^2 \leq 0$ . (B)  $a^2 + b^2 - 1 - \frac{a^4 + b^4}{2} \leq 0$ .  
 (C)  $\frac{(a+b)^2}{2} - 1 - a^2 b^2 \leq 0$ . (D)  $(a^2 - 1)(b^2 - 1) \geq 0$ .
- 已知  $a > 0, b > 0$ , 则下列不等式不成立的是( )  
 (A)  $a + b + \frac{1}{\sqrt{ab}} \geq 2\sqrt{2}$ . (B)  $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$ .  
 (C)  $\frac{a^2 + b^2}{\sqrt{ab}} \geq a + b$ . (D)  $\frac{2ab}{a+b} \geq \sqrt{ab}$ .
- 当  $x$  是正实数时, 可得不等式  $x + \frac{1}{x} \geq 2, x + \frac{4}{x^2} = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \left(\frac{2}{x}\right)^2 \geq 3, x + \frac{27}{x^3} = \frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \left(\frac{3}{x}\right)^3 \geq 4, \dots$  由此推广为  $x + \frac{P}{x^n} \geq n + 1$  ( $n \in (\mathbb{N}^*)$ ). 其中  $P$  等于( )  
 (A)  $n^n$ . (B)  $n^2$ . (C)  $n$ . (D)  $n + 1$ .

5. 若不等式  $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} > 2$  成立, 则  $a, b$  必须满足的条件是\_\_\_\_\_.

6. 设  $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{7} - \sqrt{3}, c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ , 那么  $a, b, c$  的大小关系是\_\_\_\_\_.

7. 已知  $a > 0, b > 0, c > 0$ , 求证:  $\frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{a + b + c} \geq abc$ . 某学生证明如下:

证明:  $\because a > 0, b > 0, c > 0,$   
 $\therefore a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 \geq 3 \sqrt[3]{a^2 b^2 \cdot b^2 c^2 \cdot c^2 a^2} = 3 \sqrt[3]{(abc)^4}, \quad ①$   
 $a + b + c \geq 3 \sqrt[3]{abc}. \quad ②$

①  $\div$  ②, 得  $\frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{a + b + c} \geq \frac{3 \sqrt[3]{(abc)^4}}{3 \sqrt[3]{abc}} = abc. \quad ③$

阅读以上证明, 并回答问题:

(1) 该同学证明不等式采用\_\_\_\_\_法;

(2) 证明过程是否正确\_\_\_\_\_;

(3) 为什么:\_\_\_\_\_.

8. 设  $a_1, a_2, b_1, b_2$  都是实数, 则  $(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2$  与  $(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$  的大小关系是\_\_\_\_\_.

9. 设  $a, b$  是实数, 给出下列条件:

①  $a+b>1$ . ②  $a+b=2$ . ③  $a+b>2$ . ④  $a^2+b^2>2$ . ⑤  $ab>1$ .

其中能推出“ $a, b$  中至少有一个数大于 1”的条件是\_\_\_\_\_.

10. 已知两个正变量  $x, y$  满足  $x+y=4$ , 则使不等式  $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} \geq m$  恒成立的实数  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

11. 已知  $a>0, b>0, c>0$ , 求证  $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}\right) \geq 4$ .

12. 若  $ab>0$ , 求使不等式  $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} < \sqrt[3]{a-b}$  成立的条件.

13. 设  $c>1$ , 证明  $\sqrt{c+1} - \sqrt{c} < \sqrt{c} - \sqrt{c-1}$ .

14. 命题“若  $a > b > c$ , 且  $a + b + c = 0$ , 则  $\sqrt{b^2 - ac} < \sqrt{3}a$ ”是真命题还是假命题? 若是真命题, 请给出证明; 若是假命题, 请说明理由.

15. 要制造容积为  $\frac{\pi}{2}$  立方米的无盖圆柱形桶. 已知用于做底面的金属板的价格为每平方米 30 元, 用于做侧面的金属板的价格为每平方米 20 元. 要使用料成本最省, 请问该圆柱形桶应如何设计?

16. 已知三角形三边长分别为  $a, b, c$ , 面积为  $S$ , 试证  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$ .

## 综合与提高

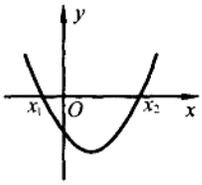
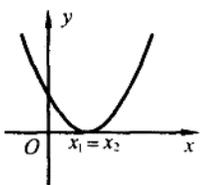
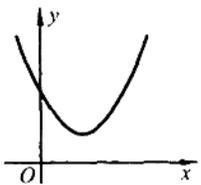
17. 已知  $n$  是大于 1 的自然数, 求证:  $(n+1)^n > 2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2n)$ .

18. 设  $n \in \mathbf{N}^*$ , 求证:  $\log_n(n+1) > \log_{(n+1)}(n+2)$ .

## 6.4 不等式的解法举例

### 知识回顾

- ▲ 当  $a > 0$  时, 不等式  $ax + b > 0$  的解集是 \_\_\_\_\_;
- 当  $a < 0$  时, 不等式  $ax + b < 0$  的解集是 \_\_\_\_\_.
- ▲ 当  $a > 0$  时, 不等式  $|x| < a$  的解集是 \_\_\_\_\_;
- 当  $a < 0$  时, 不等式  $|x| > a$  的解集是 \_\_\_\_\_.
- ▲ 请在表格的空格内填上相应内容:

$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ( $a > 0$ ) 的图象			
$ax^2 + bx + c > 0$ ( $a > 0$ ) 的解集			
$ax^2 + bx + c < 0$ ( $a > 0$ ) 的解集			

### 知识应用

- 若  $a < 0$ , 则关于  $x$  的不等式  $x^2 - 4ax - 5a^2 > 0$  的解集是( )  
 (A)  $\{x | x > 5a, \text{ 或 } x < -a\}$ . (B)  $\{x | x > -a, \text{ 或 } x < 5a\}$ .  
 (C)  $\{x | -a < x < 5a\}$ . (D)  $\{x | 5a < x < -a\}$ .
- 已知不等式  $x + 1 > 0$  的解集为  $M$ , 不等式  $x^2 + x - 6 < 0$  的解集为  $N$ . 如果不等式  $x^2 + ax + b < 0$  的解集为  $M \cap N$ , 那么  $a + b$  的值是( )  
 (A)  $-3$ . (B)  $-1$ . (C)  $1$ . (D)  $3$ .
- 已知不等式  $\frac{ax}{x-1} < 1$  的解集为  $\{x | x < 1, \text{ 或 } x > 2\}$ , 那么实数  $a$  的值是( )  
 (A)  $2$ . (B)  $\frac{1}{2}$ . (C)  $-2$ . (D)  $-\frac{1}{2}$ .
- 若  $a \in \mathbf{R}$ , 则  $(1 - |a|)(1 + a) < 0$  成立的充要条件是( )  
 (A)  $|a| < 1$ . (B)  $|a| > 1$ . (C)  $a < 1$ . (D)  $a > 1$ .
- 不等式  $(x+7)(x+3)^2 < (1-7x)(x+3)^2$  的解集是\_\_\_\_\_.
- 若不等式  $|x+a| \leq 3$  的解集为  $\{x | -1 \leq x \leq 5\}$ , 那么实数  $a =$ \_\_\_\_\_.
- 已知对于任意实数  $x$ , 不等式  $\frac{kx^2 + 2x + k}{x^2 - x + 1} < 0$  恒成立, 则实数  $k$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
- 已知关于  $x$  的不等式  $\frac{(x+2)(x-3)}{x-a} \leq 0$  的解集是  $\{x | x \leq -2, \text{ 或 } 1 < x \leq 3\}$ , 则不等式  $(x+2)(x-3)(x+a) > 0$  的解集是\_\_\_\_\_.
- 现有盐的质量分数为  $7\%$  的食盐水  $200$  克. 现生产上用到盐的质量分数为  $5\%$  以上, 且  $6\%$  以下的食盐水, 则加入盐的质量分数为  $4\%$  的食盐水  $x$  克,  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
- 设集合  $M = \{x | ax^2 + (a-2)x + 1 < 0\}$ . 已知  $M \neq \emptyset$ , 且  $M \subseteq \{\text{正实数}\}$ , 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
- 解不等式  $\frac{4x^2 - 20x + 18}{x^2 - 5x + 4} \geq 3$ .