丛书主编　陈东旭

2007 同步辅导用书

高一 上册

学习的艺术

数学

吉林文史出版社

学习的艺术

数学

江西金太阳教育研究所

主　编：葛立其
副主编：张东兴　袁永平　罗志远
编　委：(按姓氏笔划排列)
刘汝超　余爱青　张东兴　李永忠
李　芳　李建香　杨芙蓉　闵　睿
罗志远　金卫峰　洪春林　袁永平
黄　辉　葛立其　虞金龙

吉林文史出版社

（吉）新登字 07 号

书　　名　**学习的艺术（高一）**
丛书主编　陈东旭
责任编辑　周海英
出版发行　吉林文史出版社
地　　址　长春市人民大街 4646 号　130021
印　　刷　江西印刷集团公司
规　　格　787 mm×1092 mm
开　　本　16 开本
印　　张　95 印张
字　　数　3021 千字
版　　次　2006 年 7 月第 1 版　2006 年 7 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 7--80702-394-5
定　　价　115.00 元

前言

“金太阳”告诉您

——数学学习的艺术

数学是颇令人头疼的一门学科，许多学生为之投入了太多的时间，而成绩不佳，颇有“事倍而功半”的味道，于是乎，一片“数学难，难于上青天”的怨言.从根本上讲，这种现象是同学们没有掌握正确的学习方法造成的.我们说，学习是科学，但它更是一门艺术！如果真正掌握了学习方法，跨入了学习艺术的门槛，那么，许多难题也就迎刃而解了，也就起到了“事半而功倍”的效果，这正是我们所追求的.

《学习的艺术》是什么？总体说来，主要是三个方面：

其一，对概念和定义进行严密的思考.只有全面深刻地理解概念的内涵与外延，构成完整的知识网络，才能在解题过程中有据可依，而不是乱套公式与定理.

其二，对例题与结论进行认真分析.书本上的例题是非常典型的，它们对理解概念、性质等都有着很好的帮助作用.而例题的解法更是经典的，既起到示范的作用，又揭示着某种规律性的东西.因此，那种对例题轻描淡写或者囫囵吞枣地看一下的做法是极端错误的.

其三，课外练习既要有针对性也要有一定的量.搞“题海战术”，毫无目标地乱做一气是错误的，然而“光说不练”同样也是不可取的.练习要有选择，要有针对性.在做题的过程中要思考“为什么这样做”，做完后要思考“有何规律、能否变形与拓展”.只有这样，才能起到做练习的作用，同时也会有做题的乐趣.

《学习的艺术》丛书，秉承“授人于鱼，不如授人于渔”的教育理念，带领大家跨入了学习艺术的门槛……

课前导航 用趣味性、知识性、规律性的数学知识引导你学习，提高学习兴趣.

要点索引 在透彻分析教材知识体系的基础上，把各个知识点系统化、网络化，使其易懂、易记、易用.

范例导学 依据知识结构，精心挑选典型例题，展示经典解法；题后变式，展现“变中学”的乐趣.

思维进阶 深入研究，提高层次，通过综合型例题，进一步提升解题技巧与知识综合能力，突破知识难点，跨越学习障碍.

错解剖析 展现普遍性错误，探究根源所在，揭示规避方法与技巧.

课时综述 概括重点难点，揭示命题规律，总结方法技巧，便于寻找解题突破口与切入点.

针对训练 按照新颖性、基础性、方向性的原则，挑选具有思辨内涵的习题与知识形成完整的体系，以起到巩固所学、强化所学之功效.

编者

金太阳系列丛书

特别鸣谢以下学校的大力协助：

江西省： 南昌二中　江西师大附中　南昌一中　南昌三中　南昌十中　南昌十七中　临川一中　吉安一中　白鹭洲中学　新余一中　新余四中　瑞昌一中　新建二中　上高二中　宜春中学　临川二中　赣州一中　江西南大附中　玉山一中　南康中学　赣县中学　修水一中　安福中学　上饶一中　萍乡中学　贵溪一中　鹰潭一中　景德镇一中　赣州市三中　安义中学　峡江中学

北京市： 北京四中　北京景山学校　清华大学附中　北师大附属实验中学　首都师大附中　北师大附中　北京二中　北京二十中

天津市： 南开中学　耀华中学　天津实验中学　大港一中　静海县一中

河北省： 邯郸一中　唐山市一中　衡水中学　正定中学　遵化一中

内蒙古： 内蒙古师大附中　呼和浩特市二中　赤峰市二中

山西省： 太原五中　临汾一中　平遥中学　运城中学　大同一中　晋城一中　怀仁县一中　沁县中学

辽宁省： 沈阳市二中　东北育才中学　大连市八中　庄河高中

吉林省： 东北师大附中　省实验中学　长春市实验中学　吉林市一中　延边市二中　松原前郭五中　松原市第二中学

黑龙江： 哈尔滨市六中　哈尔滨市九中　鸡西市一中　齐齐哈尔市实验中学

江苏省： 南京师大附中　南京外国语学校　南京一中　南通中学　启东中学　姜堰中学　盐城中学　徐州一中　张家港高中

浙江省： 杭州高级中学　浙江大学附中　宁波效实中学　诸暨学勉中学　金华市一中　浙师大附中　东阳中学　衢州二中　绍兴柯桥中学　温州中学

山东省： 省实验中学　济南市一中　青岛市二中　曲阜师大附中　潍坊市一中　滨州市北镇中学　烟台市二中　济宁市实验中学　牟平一中

安徽省： 合肥市一中　马鞍山市二中　安庆市一中　濉溪中学

福建省： 福建师大附中　南平高级中学　福州三中　龙岩二中　龙岩一中　南平一中

河南省： 河南大学附中　开封市高中　潢川一中　新乡市一中　平舆二高

湖北省： 华中师大一附中　黄冈中学　荆州中学　武汉中学　天门中学　水果湖中学　武汉二中　荆门市一中　仙桃中学

湖南省： 湖南师大附中　长沙市一中　郴州市一中　株洲市二中　衡阳市八中　沅江市三中　岳阳市一中　岳阳县一中　桑植一中　株洲市南方中学

广东省： 华南师大附中　广东省实验中学　汕头金山中学　惠州市一中　深圳教育学院附中　顺德市一中　高州中学

广　西： 广西师大附中　南宁市二中　北海市教科所　桂林市临桂中学

四川省： 成都市七中　成都石室中学　成都市十二中　四川师大附中　新都一中　彭州中学　南充高级中学　攀枝花市三中

重庆市： 西南师大附中　重庆市一中　重庆市十一中　重庆市三中　重庆市八中

贵州省： 凯里市一中　贵阳师大附中　兴义市一中

云南省： 昆明一中　昆明三中　宣威一中　大理一中　曲靖一中

西　藏： 拉萨中学

陕西省： 陕西师大附中　西安中学　安康中学　延安中学　渭南市瑞泉中学　咸阳中学　韩城象山中学　绥德中学　榆林市第一中学　榆林中学

甘肃省： 西北师大附中　兰州市一中　天水一中

宁　夏： 宁夏大学附中　银川市一中　银川市唐徕回民中学

新　疆： 新疆实验中学　乌鲁木齐市一中　库尔勒华山中学兵团二中　乌鲁木齐铁路三中

（限于篇幅仅列部分学校，敬请谅解）

目录

第一章　集合与简易逻辑

§1.1　集　合

课前导航

集合论的地位

初中毕业升入高中,同学们会一致发现自己所学的第一个数学概念都是:集合.专门研究集合的数学理论在现代数学中就被称为集合论.集合是数学的一个基本分支,在数学中占据着一个极其独特、极其重要的地位,其基本概念也已渗透到数学的所有领域.如果把现代数学比作一座无比辉煌的大厦,那么集合论就是构成这座大厦的基石,而集合的创始人康托尔也以其在集合论方面的成就被誉为"对 20 世纪数学发展影响最深的学者"之一.

要点索引

1.集合

某些指定对象集在一起并把它看作一个整体,就成为集合.

2.元素与集合的关系

类似于学生与班级的关系,只有两种:$a\in A$ 或 $a\notin A$,二者必有其一.

3.集合的特征

集合中的元素具有三个特征

(1)确定性:对于任一元素是否属于给定的集合是确定的;

(2)互异性:给定集合中的任何两个元素都是不相同的;

(3)无序性:给定集合中的元素与排列顺序无关.

4.集合的表示法

(1)列举法:仅适用于有限集或虽然是无限集,但集合元素是可数的.

(2)描述法:有限集、无限集都适用,形式是{元素的一般特征及范围|元素满足的条件}.

范例导学

1.集合的表示法 ★

【例 1】用恰当的方法表示下列集合.

(1)方程 $x^2(x+1)=0$ 的解的集合;

(2)函数 $y=\frac{1}{x}$ 图象上所有点的坐标所组成的集合;

(3)与数 a 相差不大于 3 的数所组成的集合.

[分析](1)方程的解为 $x_1=-1,x_2=x_3=0$,该解集为有限集;(2)(3)满足条件的点或数有无限个,应用描述法表示.

注意集合格式哦!

[解析](1)该方程的解为 $x_1=-1,x_2=x_3=0$,所以用列举法表示为$\{0,-1\}$;

(2)该集合表示为$\{(x,y)|y=\frac{1}{x},x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq0\}$;

(3)该集合表示为$\{x||x-a|\leqslant3,x\in\mathbf{R}\}$.

变式 1 用列举法或描述法表示下列集合,并指出所表示的集合是有限集还是无限集.

(1)被 3 除余 1 的全体整数的集合;

(2)第一象限或第三象限的点的集合;

(3)20 以内的质数;

(4)方程组 $\begin{cases}x+y=5,\\x-y=3\end{cases}$ 的解集.

2. 集合的特征

【例2】若以集合$\{x,y,z,w\}$中的四个元素为边长构成一个四边形，则这个四边形可能是 ( )

(A)梯形. (B)平行四边形.

(C)菱形. (D)矩形

[分析]解这道题应从集合元素的三大特征入手，同时要结合给定选项考虑.

[解析]由于x,y,z,w四个元素不相同，故由它们组成的四边形的四条边互不相等，本题应选择A.

[答案]A

变式 求集合$\{1,x,x^2-x\}$中元素x所满足的条件.

思维进阶

【例】集合$A=\{x|x=\sqrt{2}m+n,m\in \mathbf{Z},n\in \mathbf{Z}\}$，判断下列元素$x$是否属于集合$A$.

(1)$x=0$;

(2)$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$;

(3)$x=x_1+x_2$，其中$x_1\in A$，$x_2\in A$;

(4)$x=x_1\cdot x_2$，其中$x_1\in A$，$x_2\in A$.

求得是条件吗？

[分析]要判断某一对象是否属于某集合，需要看这个对象是否满足该集合的条件.(1)、(2)都是确定的实数，在判断中要看其是否能找到整数对m、n，使该实数表示为$\sqrt{2}m+n$，若能找到，则$x\in A$，否则$x\notin A$;(3)、(4)则需先根据$x_1\in A$、$x_2\in A$，将x_1、x_2表示成$\sqrt{2}m+n(m\in \mathbf{Z},n\in \mathbf{Z})$的形式，再判断其和、积是否能表示为上述形式.

[解析](1)∵$x=0=\sqrt{2}\times 0+0$，$0\in \mathbf{Z}$，∴$x\in A$.

(2)∵$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1=\sqrt{2}\times 1+(-1)$，

$1,-1\in \mathbf{Z}$，∴$x\in A$.

(3)∵$x_1\in A$，∴存在$m_1,n_1\in \mathbf{Z}$使$x_1=\sqrt{2}m_1+n_1$，同理存在$m_2,n_2\in \mathbf{Z}$使$x_2=\sqrt{2}m_2+n_2$.

∴$x_1+x_2=(\sqrt{2}m_1+n_1)+(\sqrt{2}m_2+n_2)$

$=\sqrt{2}(m_1+m_2)+(n_1+n_2)$.

∴$x\in A$.

(4)同(3)得$x_1x_2=(\sqrt{2}m_1+n_1)(\sqrt{2}m_2+n_2)=\sqrt{2}(m_1n_2+m_2n_1)+(2m_1m_2+n_1n_2)$.

∵$m_1n_2+m_2n_1\in \mathbf{Z}$，$2m_1m_2+n_1n_2\in \mathbf{Z}$，∴$x\in A$.

练习 设$M=\{a|a=x^2-y^2,x,y\in \mathbf{Z}\}$，求证：

若$p\in M,q\in M$，则$pq\in M$.

错解剖析

【例】若$\{x,x^2\}$与$\{1,x\}$表示同一集合，求x的值.

[错解]因为$x=x$，所以只需$x^2=1$，解得$x=\pm 1$.

[剖析]错误原因有二：

①集合的元素具有无序性，所以不一定是$\begin{cases}x=x,\\x^2=1,\end{cases}$也可能是$\begin{cases}x=1,\\x^2=x.\end{cases}$当然，本题按错解做不会出现失根，但一般题就不一定了，所以要把各种搭配考虑进去.

②集合的元素具有互异性，把$x=1$代入后，会出现$\{1,1\}$，这显然是不行的，故解出x后应进行检验.

[正解]由$\begin{cases}x\neq x^2,\\1\neq x,\\x^2=1,\end{cases}$解得$x=-1$.

课时综述

1. 学会根据元素特征(有限、无限，是点还是数等等)选择恰当的方式表示集合.

2. 在解决有关元素问题时，必须充分注意元素的确定性、互异性、无序性.

§1.2 子集、全集、补集(第1课时)

课前导航

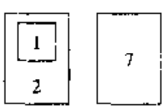
塑料杯问题

取三个塑料杯，把10枚硬币放入杯中，要求每只杯中的硬币数都是奇数，你能做到吗？

显然，3个奇数的和肯定是奇数，简单地一个杯子放若干枚硬币肯定不行.

其实你只要想到把其中一只杯子放入另一只装着偶数枚硬币的杯子中，就能使每只杯子中都有奇数枚硬币了.

啊哈！一旦悟出杯中套杯，同一个硬币可以属于几只杯子，这个棘手的问题也就迎刃而解了. 用集合论的术语来说，我们的解是7个元素的集合和3个元素的集合，后一个集合又包含1个元素的子集. 此解可以用图表示如下：



要点索引

1. 子集

若 $a\in A$，且 $a\in B$，则称 A 是 B 的子集，记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$)，这时也说集合 A 包含于集合 B，或集合 B 包含集合 A.

当集合 A 不包含于集合 B 时，

记作 $A\not\subseteq B$(或 $B\not\supseteq A$).

2. 真子集

若 $A\subseteq B$，且存在 $b\in B$ 但 $b\notin A$，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$(或 $B\supsetneqq A$)，即 B 真包含 A.

3. 集合的相等

若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，则 $A=B$.

4. 空集是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集.

5. 任何一个集合 A 是它本身的子集，即 $A\subseteq A$；若集合 A、B、C 满足 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

范例导学

1. 子集与子集数

【例1】试写出三元素集合$\{1,2,3\}$的所有子集，并指出子集的个数是多少？其中哪些是它的真子集？

[分析]要写出该集合的所有的子集，要依据一定的分类方法逐个写出来，要不重不漏. 本例可用元素个数为分类标准.

[解析]$\{1,2,3\}$的子集有：不含任何元素的集合是$\varnothing$；含一个元素的集合是$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$；含两个元素的集合是$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$；含三个元素的集合是$\{1,2,3\}$，

故所求的子集是：$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$，$\{1,2,3\}$，共8个，其中真子集是$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$，共7个.

变式1 求满足$\{a\}\subseteq M\subsetneqq\{a,b,c,d\}$的集合$M$共有多少个？

2. 集合之间的关系

【例2】设集合$A=\{1,3,a\}$，$B=\{1,a^2-a+1\}$，$A\supseteq B$，求a的值.

[分析]$A\supseteq B$，即B是A的子集，所以B中元素1，a^2-a+1都是A中的元素.

[解析]因$A\supseteq B$，故可分两种情况：

(1)$a^2-a+1=3$，解得$a=-1,2$，经检验满足题设条件；

(2)$a^2-a+1=a$，解得$a=1$. 此时A中元素重复，故$a=1$不合题意. 综上所述，$a=-1$或$a=2$.

变式2 设集合 $A=\{x|x$ 是矩形$\}$,

$B=\{x|x$ 是平行四边形$\}$,

$C=\{x|x$ 是正方形$\}$,指出 A,B,C 之间的关系.

思维进阶

【例】设集合 $M=\{x|x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4},k\in \mathbf{Z}\}$,$N=\{x|x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2},k\in \mathbf{Z}\}$,则 ( )

(A)$M=N$. (B)$M\subsetneqq N$.

(C)$M\supsetneqq N$. (D)$M\not\subseteq N$.

[分析]取 k 的一些连续整数,写出集合中的部分元素,观察集合中元素的变化规律,从而归纳出一般结论;或通过比较两集合元素所满足的条件的差异来寻找规律.

[解析](法一)取 $k=\cdots,0,1,2,3,4,5,\cdots$,得

$M=\{\cdots,\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{5}{4},\frac{7}{4},\frac{9}{4},\frac{11}{4},\cdots\}$,

$N=\{\cdots,\frac{1}{2},\frac{3}{4},1,\frac{5}{4},\frac{3}{2},\frac{7}{4},\cdots\}$,

故 $M\subsetneqq N$,选 B.

(法二)$M=\{x|x=\frac{1}{4}(2k+1),k\in \mathbf{Z}\}$,$N=\{x|x=\frac{1}{4}(k+2),k\in \mathbf{Z}\}$,而 $2k+1$ 表示所有奇数,$k+2$ 表示所有整数,故 $M\subsetneqq N$,选 B.

练习 判断下列各组中两集合之间的关系.

(1)$P=\{x|x=2n,n\in \mathbf{Z}\}$,$Q=\{x|x=4n,n\in \mathbf{Z}\}$;

(2)$P=\{x|x=2n-1,n\in \mathbf{N}^*\}$,$Q=\{x|x=2n+1,n\in \mathbf{N}^*\}$;

(3)$P=\{x|x=2n-1,n\in \mathbf{Z}\}$,$Q=\{x|x=2n+1,n\in \mathbf{Z}\}$;

(4)$P=\{x|x=2n-1,n\in \mathbf{Z}\}$,$Q=\{x|x=4k+1,k\in \mathbf{Z}\}$.

错解剖析

【例】已知集合 $P=\{x|x^2+x-6=0\}$,$Q=\{x|ax+1=0\}$,且满足 $Q\subsetneqq P$,求 a 的值.

[错解]$P=\{-3,2\}$,$Q=\{-\frac{1}{a}\}$.

$\because Q\subsetneqq P$,

$\therefore -\frac{1}{a}=-3$ 或 $-\frac{1}{a}=2$,

解得 $a=\frac{1}{3}$ 或 $a=-\frac{1}{2}$.

[剖析]错解中误认为 $a\neq 0$,故直接得出 $x=-\frac{1}{a}$,实则 $a=0$ 时,$Q=\{x|0\cdot x+1=0\}=\varnothing$,

此时符合条件 $Q\subsetneqq P$.

故 $a=0$ 也是一个解.

[正解]易得 $P=\{-3,2\}$.

$\because Q\subsetneqq P$,

$\therefore Q=\varnothing$ 或 $\{2\}$ 或 $\{-3\}$.

$Q=\varnothing$ 不可漏掉!

(1)当 $Q=\varnothing$ 时,$a=0$;

(2)当 $Q=\{2\}$ 时,$2a+1=0$,$a=-\frac{1}{2}$;

(3)当 $Q=\{-3\}$ 时,$-3a+1=0$,$a=\frac{1}{3}$.

综上,实数 a 的值为 $-\frac{1}{2}$ 或 0 或 $\frac{1}{3}$.

课时综述

1.集合的元素与集合的子集

	相互关系	符号表示
元素与集合	从属关系	$\in$ 或 $\notin$
集合与其子集	包含关系	$\supseteq$ 或 $\subseteq$

2.注意区别 $0,\{0\},\varnothing,\{\varnothing\}$ 之间的关系,即 $0\in\{0\}$,$0\notin\varnothing$,$\varnothing\subsetneqq\{0\}$,$\varnothing\in\{\varnothing\}$,$\{0\}$ 与 $\{\varnothing\}$ 互不包含等.

3.求含字母的方程或不等式的解集时,要注意对最高次系数的讨论,同时不要忽视了集合可能为空集这种情况.

§1.2 子集、全集、补集(第2课时)

课前导航

有人请客,7个客人到了4个.主人焦急地说:“该来的不来.”顿时气走了2个.主人遗憾地叹息:“不该走的又走了.”又气走一个.主人更遗憾了,自言自语地说:“我又不是说他.”这么一来,剩下的这位脸皮再厚,也呆不下去了.请问客人们为什么生气?实际上,客人们不自觉地使用了一个数学概念:补集.

要点索引

1. 全集

如果某个集合含有我们所要研究的各个集合的全部元素,那么这个集合就叫做全集.全集通常用字母U或I等符号表示.

2. 补集

设全集为U,A是U的一个子集,由U中所有不属于A的元素组成的集合叫做U中子集A的补集,记作$\complement_U A$,即$\complement_U A=\{x|x\in U$,且$x\notin A\}$.

3. 由$\complement_U A$的概念并结合图示法可知下列结论:

(1)$\complement_U A\subseteq U$;

(2)$\complement_U(\complement_U A)=A$;

(3)$\complement_U U=\varnothing$,$\complement_U\varnothing=U$;

(4)若$A\subseteq B$,则$\complement_U A\supseteq\complement_U B$.

范例导学

1. 补集的概念与性质

【例1】若集合$A=\{x|-1\leqslant x<1\}$,当全集U分别取下列集合时,求$\complement_U A$.

(1)$U=\mathbf{R}$;(2)$U=\{x|x\leqslant 2\}$;

(3)$U=\{x|-4\leqslant x\leqslant 1\}$.

[分析]补集和全集是相对的概念.已知A和全集U,求A的补集.可利用补集定义并结合数轴画图得出结论.

小心等号的取舍.

[解析](1)$\complement_U A=\{x|x\geqslant 1$或$x<-1\}$;

(2)$\complement_U A=\{x|x<-1$或$1\leqslant x\leqslant 2\}$;

(3)$\complement_U A=\{x|-4\leqslant x<-1$或$x=1\}$.

变式1 若$A=\{x|x<1\}$,$B=\{x|x<a\}$,且$\complement_B A\neq\varnothing$,求实数$a$的取值范围.

2. 补集的应用

【例2】已知关于x的方程$x^2-4x+2a-6=0$有负数解,求实数a的取值范围.

[分析]本题直接分为有一个负数解与有两个负数解来求比较麻烦,可先求出使方程无负数解的a的取值范围,再运用补集求得本题的解.

学会问题的转化.

[解析]全集$U=\{a|x^2-4x+2a-6=0$有实数解$\}$

$=\{a|\Delta=(-4)^2-4(2a-6)\geqslant 0\}$

$=\{a|a\leqslant 5\}$,

集合$A=\{a|a\in U$且$x^2-4x+2a-6=0$无负数解$\}=\{a|a\leqslant 5$,且$2a-6\geqslant 0\}=\{a|3\leqslant a\leqslant 5\}$.

$\therefore\complement_U A=\{a|x^2-4x+2a-6=0$有负数解$\}$

$=\{a|a<3\}$,

故a的取值范围是$\{a|a<3\}$.

变式2 已知集合$M=\{x|x^2+x-2=0\}$,$N=\{x|x<a\}$,使$M\subsetneqq\complement_{\mathbf{R}}N$的所有实数$a$的集合记为$A$,又知集合$B=\{y|y=-x^2-4x-6\}$,试判断$A$与$B$的关系.

思维进阶

【例】已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$, $A=\{x\mid x^2-5x+p=0$ 有实根$\}$,求 $\complement_U A$ 及对应的 p 值.

[分析]由 $A\subseteq U$ 且方程 $x^2-5x+p=0$ 有实根,可设其两根为 x_1、x_2,则 $x_1+x_2=5$,先求出两根,再进一步求出 p 和 $\complement_U A$.

[解析]∵$A\subseteq U$,方程 $x^2-5x+p=0$ 有实根,设其两根为 x_1 和 x_2,则 $x_1+x_2=5$.

故有 $\begin{cases}x_1=1,\\x_2=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1=4,\\x_2=1\end{cases}$

分类讨论!

或 $\begin{cases}x_1=2,\\x_2=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1=3,\\x_2=2,\end{cases}$

求得 $p=4$ 或 6.

当 $p=4$ 时,$A=\{1,4\}$;

当 $p=6$ 时,$A=\{2,3\}$.

故当 $p=4$ 时,$\complement_U A=\{2,3,5\}$;

当 $p=6$ 时,$\complement_U A=\{1,4,5\}$.

练习 设 $S=\{1,2,3,4\}$,且 $M=\{x\in S\mid x^2-5x+p=0\}$,若 $\complement_S M=\{1,4\}$,求 p 的值.

错解剖析

【例】"有理数集"的补集是"无理数集"吗? 为什么?

确定全集了吗?

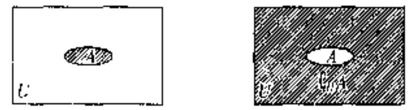
[错解]"有理数集"的补集是"无理数集",因为"有理数""无理数"合称为实数.

[剖析]"有理数集"的补集不一定是"无理数集".这是因为,补集是在确定全集的前提下建立起来的,全集没有确定,补集就无从谈起.如把有理数集 Q 看成全集,则有理数集的补集为空集,而不是无理数集.只有把实数集 R 看成全集,有理数集的补集才是无理数集.

[正解]"有理数集"的补集不一定是"无理数集".

课时综述

1. 下列维恩图分别表示全集与子集 A、全集与 A 的补集.



$A\subseteq U$　　$\complement_U A\subseteq U$

2. 注意补集思想的运用.有时直接研究问题比较艰难,可考虑从问题的反面入手会比较容易,如解决"至少"、"至多"等一类问题时,常会从问题的相反方向去考虑,从而得到解决问题的方法.

3. 注意分类讨论思想的运用.分类讨论思想是分析、解决问题的一种重要思想方法.学习了集合知识以后,这种思想方法会越来越多地渗透到解题过程中去.

§1.3 交集、并集(第1课时)

课前导航

逃学男孩的"理由"

一个男孩子逃学已经数周,学校考勤人员找到了他,小孩开始解释他为何没有时间逃学:

"我每天睡觉要8小时,8×365总共2920小时,一天有24小时,所以2920÷24即122天左右."

"星期六和星期日不用上学.一年总共约有104天."

"我们还有60天暑假."

"我一天吃饭需要花3小时,一年就要3×365共1095小时,相当于1095÷24即45天左右."

"我每天还需要2小时的课外活动,算起来一年也要有2×365共730小时,也就是730÷24即30天左右."

小孩再把所有这些天数相加如下:

睡觉	122天
周末	104天
暑假	60天
用餐	45天
课外活动	30天
	361天

"你瞧,"小孩说,"仅剩下4天用作病假,我还没把学校每年应放的节假日算进去呢!我怎么会逃学呢?"

要点索引

1. 交集

所有同属于集合A和集合B的元素组成的集合叫做A与B的交集,记作$A\cap B$,读作"A交B",即$A\cap B=\{x|x\in A,且\ x\in B\}$.

2. 对任何集合A、B,有:

(1)$A\cap A=A$,$A\cap\varnothing=\varnothing$,$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$,

$A\cap B=B\cap A$;

(2)若$A\cap B=A$,则$A\subseteq B$,反之也成立;

(3)$(A\cap B)\subseteq A$,$(A\cap B)\subseteq B$.

3. 若$A\subseteq B$,$A\subseteq C$,则$A\subseteq(B\cap C)$;

反之,若$A\subseteq(B\cap C)$,则$A\subseteq B$且$A\subseteq C$.

范例导学

1. 求交集 ★

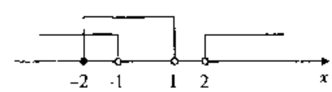
【例1】已知集合$A=\{x|x^2-x-2>0\}$,

$B=\{x|-2\leqslant x<1\}$,求$A\cap B$.

[分析]先化简,把集合A、B具体化,然后在数轴上标示出来,再求交集.这种运算在以后的学习中经常用到,要熟练掌握.

[解析]$A=\{x|x>2$或$x<-1\}$,

如图易知$A\cap B=\{x|-2\leqslant x<-1\}$.



变式1 已知$a>0$,$A=\{x|-2-a\leqslant x\leqslant-2+a\}$,

$B=\{x|-a\leqslant x-2\leqslant a\}$,求$A\cap B$.

2. 交集的性质与应用 ★

【例2】已知集合$A=\{x|x^2-4x+3=0\}$,$B=\{x|x^2-ax+a-1=0\}$,$C=\{x|x^2-mx+1=0\}$,且$A\cap B=B$,$A\cap C=C$,求实数a、m的值或取值范围.

[分析]通过$A\cap B=B$,$A\cap C=C$,建立A与B、A与C之间的包含关系,再求解.

$A\cap B=B$,$A\cap C=C$,可得到什么?

[解析]$A=\{1,3\}$,

$B=\{x|(x-1)[x-(a-1)]=0\}$.

$\because A\cap B=B$,$\therefore B\subseteq A$,

$\therefore a-1=1$或$a-1=3$,即$a=2$或$a=4$.

又$A\cap C=C$,$\therefore C\subseteq A$,从而

$C=\varnothing$或$C=\{1\}$或$C=\{3\}$或$C=\{1,3\}$.

若$C=\varnothing$,则$m^2-4<0$,$-2<m<2$;

若$1\in C$,则$1^2-m\times1+1=0$,$m=2$,

此时 $C=\{1\}$，$A\cap C=C$；

若 $3\in C$，则 $9-3m+1=0$，$m=\frac{10}{3}$，

此时 $C=\{3,\frac{1}{3}\}\not\subseteq A$，$\therefore m\neq\frac{10}{3}$.

综上所述，$a=2$ 或 $a=4$，$-2<m\leqslant 2$.

变式 已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|x^2-5x+6=0\}$，$C=\{x|x^2+nx+n^2-7=0\}$，若 $A\cap C\neq\varnothing$，$B\cap C=\varnothing$，求实数 n 的值.

思维进阶

【例】设 $U=\{1,2,3,4,5\}$，且 $A\subsetneqq U$，$B\subsetneqq U$，$A\cap B=\{2\}$，$(\complement_U A)\cap B=\{4\}$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{1,5\}$，则下列结论正确的是（　　）

(A) $3\in A$，$3\in B$.

(B) $3\in(\complement_U A)$，$3\in B$.

(C) $3\in A$，$3\in(\complement_U B)$.

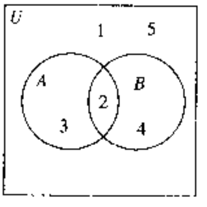
(D) $3\in(\complement_U A)$，$3\in(\complement_U B)$.

[分析]已知条件中含子集、补集、交集等概念，要运用相应的知识作出判断. 如用排除法或画出维恩图直观地得出结论.

[解析](法一)由选项 A 可知，$3\in A\cap B$，与题设 $A\cap B=\{2\}$ 矛盾；由选项 B 可知，$3\in(\complement_U A)\cap B$，与题设 $(\complement_U A)\cap B=\{4\}$ 矛盾；由选项 D 可知，$3\in(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$，与题设 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{1,5\}$ 矛盾；故选 C.

(法二)画出如图所示的维恩(Venn)图，

易知 $3\in A$，$3\in(\complement_U B)$，故选 C.



练习 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$(\complement_U A)\cap B=\{1,9\}$，$A\cap B=\{2\}$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{4,6,8\}$，求 A、B.

错解剖析

【例】集合 $M=\{(x,y)|y=x+1,x\in\mathbf{R}\}$，$N=\{y|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$，求 $M\cap N$.

[错解]由 $\begin{cases}y=x+1,\\y=x^2+1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=0,\\y=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$

$\therefore M\cap N=\{(0,1),(1,2)\}$.

[剖析]M 中的元素是直线 $y=x+1$ 上所有的点，而 N 中的元素是 $y=x^2+1$ 上所有点的纵坐标，点与纵坐标是不会相同的. 错解是因为没有弄清元素的一般特征. 这也是我们以后解题要注意的.

[正解]$M\cap N=\varnothing$.

课时综述

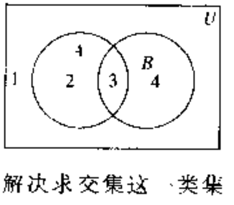
1. 维恩(Venn)图中各部分的表示：

(1) $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$

(2) $A\cap(\complement_U B)$

(3) $A\cap B$

(4) $(\complement_U A)\cap B$



2. 数轴或维恩(Venn)图等是解决求交集这一类集合间的运算的常用方法.

3. 在求含字母的集合之间的运算(如交集运算)时，要注意分类讨论，不要遗漏某种可能出现的情况，即要注意解题的全面性和严密性.

4. 集合(符号)语言的理解，是十分重要的数学技能之一，要引起充分重视.

§1.3 交集、并集(第2课时)

课前导航

代表团的人多出来了

有一个代表团共有50人，其中，参加乒乓球比赛的有20人，参加网球比赛的有20人，参加羽毛球比赛的有20人，三项之和为60人，怎么多出10人了？你知道为什么吗？

事实上，有一些运动员参加了二项或三项比赛，简单地相加，显然会多出一些.

要点索引

1. 并集

由所有属于集合A或属于集合B的元素所组成的集合，叫做A与B的并集，记作$A\cup B$，读作"A并B"，即$A\cup B=\{x|x\in A$，或$x\in B\}$.

并集、交集中的"或"、"且"两字是不可缺少的，用"或"或者用"且"字表达的意义是完全不一样的. 若$x\in(A\cap B)$，则$x\in A$且$x\in B$；若$x\in(A\cup B)$，它指的是下列三种情况：(1)$x\in A$且$x\in B$；(2)$x\in B$且$x\notin A$；(3)$x\notin B$且$x\in A$.

2. 对于任何集合A、B，有：

$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cup\complement_U A=U$，$A\cup B=B\cup A$.

$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$，

$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$.

3. $A\cup B\supseteq A$，$A\cup B\supseteq B$.

4. 若$A\cup B=B$，则$A\subseteq B$；

反之，若$A\subseteq B$，则$A\cup B=B$.

范例导学

1. 并集的运算

【例1】集合$A=\{x|x=k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，

$B=\{x|x=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$，

$C=\{x|x=2k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，

求$A\cup B$，$A\cup C$.

[分析]并集运算就是把两个集合的元素合在一个集合内，重复的保留一个，并尽可能表达简洁. 因此，在一般情况下可用数轴法把每个集合具体化.

[解析]$A\cup B=\{x|x=k\pi$或$x=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$

"或"不能写成∪.

$=\{x|x=\frac{2k\pi}{2}$或$x=\frac{(2k+1)\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$，

$=\{x|x=\frac{n}{2}\pi,n\in\mathbf{Z}\}$.

$A\cup C=\{x|x=k\pi$或$x=2k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$

$=\{x|x=k\pi,k\in\mathbf{Z}\}=A$.

变式1 设$M=\{x|x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x|x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$，则$M\cup N=$______，$M\cap N=$______.

2. 交集、并集的运算意义

【例2】已知集合$A=\{x|x\leqslant2\}$，$B=\{x|x>a\}$.

(1)若$A\cap B=\varnothing$，求a的取值范围；

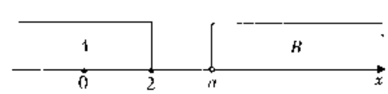
(2)若$A\cup B=\mathbf{R}$，求a的取值范围；

(3)若$1\in(A\cap B)$，求a的取值范围.

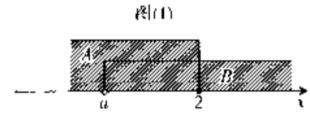
[分析]要画出数轴. 由于字母a是个变量，要用运动、变化的观点解决问题.

小心！端点a是否可取等号？

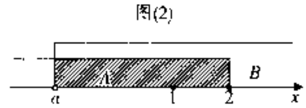
[解析](1)画出如图(1)所示的图形，可知只有$a\geqslant2$时，$A\cap B=\varnothing$；



图(1)



图(2)



图(3)

(2)要使$A\cup B=\mathbf{R}$，如图(2)，即a所对应的点应在2所对应的点的左侧或与2重合，故$a\leqslant2$；

(3)$\because1\in(A\cap B)$，$1\in A$，

$\therefore1\in B$. 画出图(3)可得$a<1$.

变式 集合 $M=\{x|x<1\}$，$N=\{x|1<x<a\}$（a 为常数）。若 $M\cup N=M$，求 a 的取值范围。

思维进阶

【例】已知 $A\cup B=\{1,2,3\}$，$A\cap B=\emptyset$，求所有满足该条件的集合 A，B。

［分析］对 A、B 所有可能的情况进行讨论。

［解析］$\because A\cup B=\{1,2,3\}$，$A\cap B=\emptyset$，

$\therefore$ 当 A 中有 0 个元素时，$A=\emptyset$，$B=\{1,2,3\}$；

当 A 中有一个元素时，$A=\{1\}$，$B=\{2,3\}$；$A=\{2\}$，$B=\{1,3\}$；$A=\{3\}$，$B=\{1,2\}$，共有 3 组；

当 A 中有两个元素时，$A=\{1,2\}$，$B=\{3\}$；

$A=\{1,3\}$，$B=\{2\}$；$A=\{2,3\}$，$B=\{1\}$，共有 3 组；

当 A 中有三个元素时，$A=\{1,2,3\}$，$B=\emptyset$。

$\therefore$ 满足条件的 A、B 共 8 组。

练习 已知 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|ax-2=0\}$，且 $A\cup B=A$，求实数 a 组成的集合 C。

错解剖析

【例】如果方程 $ax+b=0$ 的解集为 A，$cx+d=0$ 的解集为 B，用 A、B 表示：

就像 $ab=0$ 等价于 $a=0$ 或 $b=0$.

(1) $(ax+b)(cx+d)=0$ 的解集；

(2) $(ax+b)(cx+d)\neq 0$ 的解集。

［错解］(1) 解集为 $A\cap B$。

(2) 解集为 $(\complement_{R}A)\cup(\complement_{R}B)$。

［剖析］(1) 错误产生的根本原因是认为 $(ax+b)\cdot(cx+d)=0$，则 $ax+b=0$ 且 $cx+d=0$，得出 $A\cap B$ 的结论。

(2) 认为 $(ax+b)(cx+d)\neq 0$，则 $ax+b\neq 0$ 或 $cx+d\neq 0$，从而得出 $(\complement_{R}A)\cup(\complement_{R}B)$ 的结论。

事实上，$(ax+b)(cx+d)=0$ 等价于 $ax+b=0$ 或 $cx+d=0$，而 $(ax+b)(cx+d)\neq 0$ 等价于 $ax+b\neq 0$ 且 $cx+d\neq 0$。

［正解］(1) 设方程 $(ax+b)(cx+d)=0$ 的解集为 C，则

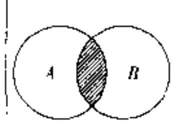
$$
\begin{aligned}
C&=\{x|(ax+b)(cx+d)=0\}\\
&=\{x|ax+b=0\text{ 或 }cx+d=0\}\\
&=\{x|ax+b=0\}\cup\{x|cx+d=0\}\\
&=A\cup B.
\end{aligned}
$$

(2) 设 $(ax+b)(cx+d)\neq 0$ 解集为 D，

$$
\begin{aligned}
\text{则 } D&=\{x|(ax+b)(cx+d)\neq 0\}\\
&=\{x|(ax+b)\neq 0\text{ 且 }cx+d\neq 0\}\\
&=\{x|(ax+b)\neq 0\}\cap\{x|cx+d\neq 0\}\\
&=(\complement_{R}A)\cap(\complement_{R}B).
\end{aligned}
$$

课时综述

1. 交集、并集的比较

表示	区别	图示	性质
交集 $A\cap B$	相同部分元素组成		$A\cap A=A$，$\complement_{U}A\cap A=\emptyset$， $A\cap\emptyset=\emptyset$， $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$
并集 $A\cup B$	全部元素组成		$A\cup A=A$，$\complement_{U}A\cup A=U$， $A\cup\emptyset=A$， $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$

2. 交集、并集是集合之间的最基本运算。熟练掌握集合的语言及集合之间的运算，能用集合语言理解并表达数学问题，是数学素质的体现。

3. 要求能用分类讨论的思想方法解决数学问题。解题时，分类讨论要注意不重复、不遗漏；当集合的元素是字母时，要特别注意元素的互异性。