

# 狹義及廣義相對論

引 論

吳大猷 著

臺灣中華書局印行

狹義及廣義相對論

吳大猷 著

臺灣

2.1

0Y

印行

## 序

所謂狹義相對論，已成為物理學中一部基本知識，即所謂廣義相對論，也不再是神秘莫測的理論。但一則由於不懂它的人們的渲染，一則因為它所需的數學對一般的習物理者的陌生，所以它仍帶有些神秘性。今年夏因國家安全會議科學發展指導委員會的任務來臺。暑期科學研討會物理組主任王唯農先生和我商量，我答應在研討會的前數星期中講些相對論。為節省在粉板上寫許多數學方程式的時間，和減輕聽講者邊聽邊記的分心，我陸續的寫講義印發給大家。我講的範圍和目的，是介紹相對論的基本觀念。現在這本小冊，便是那些很隨便寫來的講義的原文。我在臺期間，各事極忙，精力和時間，都不容我作更大的嘗試。

我現在想順便的向青年學生們說幾句話。1927—8年我在天津南開大學的三年級。物理系的教授有饒毓泰、陳禮兩先生。比我高一年級的物理系同學有楊景才、龔祖瑛、沈士駿三人。我的班祇有我一人。我們四人，各選一學門，不煩教師，自己摸索，輪流報告。我選定了相對論。後來（1931年）在美國密昔根大學選了一學期的相對論，係數學教授 G.Y. Rainich 所授。此後在自己的工作上和涉獵上，都未再及此部門物理。現在我知道的和瞭解的，大部份還是在南開自己摸索得來的，而從正式選習的那課程，則一點印象都沒有。

我講這些話，是希望大家從早年便養成自己探討學問的習慣，不要依賴教師的講解。知識可以從書和講授得來，但真正的瞭解，是完全要靠自己的努力和天資。一個人要靠自己的消化力來把吃的東西變為他的細胞和精力。好廚師和好菜，或可以增加他的胃口，但最後還是靠他自己的消化吸收能力也。

這本小書不僅範圍很窄，而且可能還有不妥的地方。我的目的，是用最簡捷的十幾小時的講授，解釋相對論的觀念，希望最少可讓聽者們知道相對論是甚麼和甚麼不是相對論。這本小書祇能看作餐前的開胃口用的小菜。如看這小菜不開胃，不吃它便是，遲吃正經的菜可也。菜單如下：

P. Bergmann: Introduction to the Theory of Relativity

W. Pauli: Theory of Relativity

A. S. Eddington: The Mathematical Theory of Relativity

V. Fock: Space, Time and Gravitation

Pauli 書成在四十餘年前，但仍不失為一名著。十年前英文譯版時，Pauli 曾加小註若干，略提及新的發展。Eddington 書於數學部份極詳，Bergmann 書較簡淺讀來頗易。惜前者成在四十餘年前，而二書皆不及新的發展。Fock 書亦極詳悉，且及新的發展。（所謂新的發展，是指 Einstein, Hoffmann, Infeld 在 1938 年的重要工作；近十餘年來關於引力波，及引力波的量子化等新發展，則似未有書討論及也）。此外 H. Weyl 之 Space, Time and Matter 一書，和 Einstein 本人的 Theory of Relativity（一九二幾年在普靈斯頓大學的講稿而增添附錄數版的），都是名著，但初讀不易耳。

這本小書，經楊毓東先生細閱校正，我極願在此致謝。

吳 大 猷

民國五十六年八月於臺北

# 目 次

## 第一章 引 言

|              |   |
|--------------|---|
| 一、物理定律及理論的性質 | 1 |
| 二、物理定律的不變性   | 4 |
| 1. 不變性       | 4 |
| 2. 不變性與守恆定律  | 6 |
| 3. 矢量、張量的意義  | 6 |
| 4. 不變性與相對論   | 8 |

## 第二章 電磁學摘要

|                        |    |
|------------------------|----|
| 一、電磁基本定律               | 11 |
| 二、電磁勢                  | 15 |
| 三、電磁勢(Gauge)變換         | 17 |
| 四、能之守恆                 | 17 |
| 五、電磁應力                 | 18 |
| 六、電磁現象及對以太之運動          | 21 |
| 1. Michelson-Morley 實驗 | 22 |
| 2. Trouton-Noble 實驗    | 23 |
| 3. Fizeau 實驗           | 24 |
| 4. 星光之偏差               | 25 |

## 第三章 狹義相對論

|            |    |
|------------|----|
| 一、時間、空間的定義 | 27 |
|------------|----|

|                           |    |
|---------------------------|----|
| 二、相對論的基本假定                | 29 |
| 三、羅倫茲變換                   | 29 |
| 四、Minkowski 之四度幾何         | 32 |
| 五、羅倫茲變換的結果                | 35 |
| 1. 不變性                    | 35 |
| 2. 時間的伸長                  | 35 |
| 3. “同時”觀念的相對性             | 36 |
| 4. Fitzgerald-Lorentz 之短縮 | 37 |
| 5. 速度之和                   | 37 |
| 6. Fizeau 實驗              | 37 |
| 7. Doppler 效應             | 38 |
| 8. 星光之偏差                  | 39 |

#### 第四章 張量代數

|                                                                 |    |
|-----------------------------------------------------------------|----|
| 一、張量代數                                                          | 41 |
| 二、垂直變換及羅倫茲變換                                                    | 44 |
| 三、基本張量 $g_{\mu\nu}$                                             | 46 |
| 四、 $g_{\mu\nu}$ 之幾何解釋及矢量之逆變 (Contravariant) 和協變 (Covariant) 分矢量 | 48 |

#### 第五章 電動力學與相對論

|                            |    |
|----------------------------|----|
| 一、電動力學之羅倫茲不變性              | 51 |
| 二、電動力學之守恒定律                | 55 |
| 三、能——動量四度矢量                | 57 |
| 四、電動力學與異常 (improper) 羅倫茲變換 | 59 |
| 1. 宇稱 (Parity), 空間的反投      | 59 |

|          |    |
|----------|----|
| 2. 時間的逆反 | 62 |
|----------|----|

## 第六章 相對論力學

|           |    |
|-----------|----|
| 一、引言      | 64 |
| 二、相對論力學   | 65 |
| 三、能與質量的關係 | 69 |

## 第七章 狹義相對論的應用

|                     |    |
|---------------------|----|
| 一、Sommerfeld 的理論    | 71 |
| 二、L. de Broglie 的理論 | 71 |
| 三、Dirac 的相對論電子方程式   | 73 |

## 第八章 廣義相對論——引言

|                       |    |
|-----------------------|----|
| 一、引言                  | 75 |
| 二、幾何與物理               | 76 |
| 三、等效 (Equivalence) 原則 | 80 |
| 四、牛頓和愛因斯坦的萬有引力理論      | 82 |

## 第九章 仿射(Affine)幾何

|                             |     |
|-----------------------------|-----|
| 一、仿射聯絡 (Affine connections) | 83  |
| 二、協變 (Covariant) 微分         | 89  |
| 三、Stokes 定理                 | 93  |
| 四、平行位移                      | 94  |
| 五、平移與可積分性                   | 97  |
| 六、極端線 (geodesic) 和仿射聯絡      | 100 |
| 七、空間曲度與平移——曲度張量             | 102 |
| 八、仿射聯絡之可積分性                 | 107 |

第十章 基本張量  $g_{\mu\nu}$ 

- 一、平的空間和曲的空間的定義..... 111
- 二、 $g_{\mu\nu}$  張量..... 112
- 三、張量密度..... 117

## 第十一章 Riemannian 幾何

- 一、極端線 (Geodesic) 之方程式..... 124
- 二、 $\Gamma_{lm}^k$  與  $g_{\mu\nu}$ ..... 129
- 三、曲度張量  $R_{\mu\nu\sigma}^{\rho}$ ..... 133
- 四、曲度  $R$  及張量  $R_{\lambda\rho, \sigma\nu}$  之幾何意義..... 135
- 五、曲的空間和平的空間的條件..... 142
- 六、自然的, 或極端線的 (geodesic) 座標系..... 144
- 七、愛因斯坦張量  $G_{\mu}^{\nu}$ ..... 148

## 第十二章 廣義相對論及引力理論

- 一、廣義相對論..... 151
- 二、引力理論——引言..... 154
- 三、引力定律  $R_{\mu\nu}=0(\sqrt{-g}=1)$ ..... 159
- 四、有物質之點的引力定律 ( $\sqrt{-g}=1$ )..... 163
- 五、引力定律  $R_{\mu\nu}=0(\sqrt{-g}=1)$  的近似解..... 165
  - (甲) 度量問題..... 168
  - (乙) 光在引力場之徑..... 170

## 第十三章 引力場方程式之正確解

- 一、Schwarzschild 解..... 173
- 二、水星之運行：近日點之前移..... 178
- 三、光線經日球旁時之偏折..... 184
- 四、恆星光譜線的紅移..... 186

# 狹義及廣義相對論

## 第一章 引言

### 一、物理定律及理論的性質

在講相對論之前，我想先解釋一下物理學的目標。這是近代物理學者對物理學的基本觀念（或可以說是態度或哲學）；這也是科學和玄學的分別。一個人當然可以不喜歡，不接受這個觀念，可以喜歡玄學，但他不可以將二者混為一。譬如說，一個人可以喜歡吃牛肉，但他不可以不知牛肉之外還有雞，不可以強叫雞作「牛肉」而大大批評這個「牛肉」不好。這個譬喻太膚淺也不很切合，但許多不懂得科學的哲學家，和不懂科學哲學的科學家經常爭執的緣故，大約便是這樣的。相對論不僅在物理學上基本觀念上有極基本的貢獻，在科學哲學上也是有極重要的貢獻的。我們想深刻的瞭解相對論，則不僅要懂得它的數學的部份（這倒是比較容易的），還要懂得它的物理基本觀念上的意義。

物理學的構成，可約分作下列幾項：

#### （1）物理現象

所謂現象，包括自然（如行星的運動，聲波的傳播等）及實驗（如飛機的飛行，原子彈的爆炸等）的現象。

由現象的觀察而進到作度量，這是物理學的最基層。

#### （2）觀念(concepts)的形成和其精確的定義

一個不習物理學的人，也有對物理現象的觀念，如冷，熱，快，慢等。

但在物理學中，則所有的觀念，都務必根據於度量的準確的定義。如冷熱則有溫度計，快慢則有速度計等。

物理學中的觀念，有些可以說是「原始的觀念」，如時間，空間等。其它有許多可以由這些原始觀念構成的觀念，如速度，動量，動能等。後者都可以準確的加以定義，如

$$v = dr/dt, \text{ 動量} = mv$$

$$\text{動能} = \frac{1}{2}mv^2$$

都可以精確度量的。物理學中絕大多數的觀念，都是後者一類的。

但原始的觀念，便不同了。譬如說「時」的觀念。物理學第一步便把心理的，感覺的人為成份去掉，而用鐘，地球運行，或「原子鐘」等精確的量定時間的長短。這些「時計表」似是不帶人為成份了。由是所謂「絕對時」便成為一極自然（甚或天經地義的）的觀念。牛頓可以說是物理學史上最偉大的人，對「時」的定義，是說「時」是與宇宙一切無關的，均勻的渡去的。這個「絕對時」的觀念，在物理學和哲學中，成為一基本觀念，有二百多年之久。當然有人會對「均勻」兩個字覺得有毛病，但連牛頓本人在內，沒有人真正的嚴重的懷疑這個觀念，或能想出其它定義，避免了這個無意義的繞圈子的定義。

到了1905年，愛因斯坦分析「時」和「空」在物理學中的意義，從度量的觀點，下一定義。這定義，是根據一個觀察者度量時間（時距）和空間（空距）的實驗步驟而下的。換言之，愛因斯坦的「時」「空」，是物理學中有度量意義的觀念，不是玄學中的與宇宙無關的「絕對時」。關於這新定義和新觀念，我將詳細的解釋。現在祇講它們的重要性。

相對論的重要，不僅是它成為物理學中很小數目的基本的原理之一，而是它對物理學本身的基礎有劃時代性的改革。愛因斯坦以實驗度

量上的意義作物理觀念的定義，是一新的哲學。後來海森保 (Heisenberg) 氏創始量子力學，他的出發點，便同是這個觀點。現在量子力學的物理及哲學基礎，大部是由於愛因斯坦的創見。

最可異者，是狹義相對論的數學部份，習物理學幾無不知曉，但很少的人能瞭解它在物理學構成理論的基本觀點上的重要貢獻。即如英國大數學家 E.T. Whittaker，在其 1953 年著之「以太及電學理論史」第二冊中。討論相對論的一章有五十餘頁，題為羅倫茲氏及龐格利 (Poincaré) 之相對論，祇在三數不重要處提及愛因斯坦。這顯示其未能瞭解此點也。

### (3) 物理定律

有了物理現象的觀察及若干物理觀念 (見前二節)，由觀察結果歸納出來的各觀念間的關係，便成為物理學的法律。例如 Kepler 的行星運動三定律，Boyles 氣體定律等。

### (4) 物理學的目標

近代的物理學者，對物理學的看法，和通常的了解不同。物理學不是要「解釋」物理現象，因為「解釋」便引入了玄學的因素。物理學主要的目的是用若干物理觀念，以上述的法律方式，敘述物理現象。例如上述的氣體定律  $PV = RT$ ，祇是敘述一個氣體的氣壓，體積，溫度三個觀念間的關係。這是物理學嚴格的，基本的定義。

### (5) 物理學中的理論

但物理現象是層出不窮的 (如近年來由於高能加速器之建造，我們對所謂基本粒子的觀察，不斷進展)。怎樣可以發現「所有」的法律，來敘述「所有」(已知和尚未發現) 的現象呢？這便是物理學的「理論」的任務了。一個理論，是就已有的或新引入的觀念，假設這些觀念間若干關係 (或方程式)。這些假設最低的條件是可以敘述已知的各定律，但我們當

然要求(或希望)由它們可以導出更多的關係,可敘述尚未被觀察到的現象。物理學的理论,係將歸納式的方法,替以演繹(deductive)式的方法。量子力學,是物理學理論的最好的例子。

假若我們目的祇要敘述某若干數的定律,則通常可有許多不同的理論(假設),都一樣的勝任。在這些理論中,又怎樣的去取呢?通常的選擇條件是(一)普遍性和(二)簡單性。所謂普遍性,是從比較很小數目的假設,可以導演出許多新的關係(觀念間的方程式)且都和觀察結果相符的。牛頓的萬有引力論,祇作引力為距離平方反比的假設,便可以敘述各行星運動定律,便是一例。但所謂簡單性的條件,便不易判定了。「簡單」實在和「熟識」有關。對一個知識豐富的人很「簡單」的,對另一個人可能是很艱深的。

## 二、物理定律的不變性(Invariance)

### 1. 不變性

上節中曾說物理學的理论,它的目標之一,是使原理有普遍性。譬如說,牛頓的萬有引力的理論,可以述敘行星的運動(亦即是行星的位置與時間的關係)。但這定律,顯然的和採用座標無關,也和採用「時」的始點無關。由是我們得到一極重要的,所謂不變性的觀念。

這個觀念是由另一觀念引來的。我們可以將空間座標系平行的移動(Translation),或將其繞座標系中心轉動(Rotation),或將座標對中心反投(Inversion)使所有座標都變它們的符號;或將時的座標平移,如下

#### (1) 座標之平移

$$x \rightarrow x + d,$$

(2) 空座標之轉動

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \sum_{k=1}^3 a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij},$$

(3) 空座標之反投

$$r \longrightarrow -r, \quad (x \longrightarrow -x, y \longrightarrow -y, z \longrightarrow -z),$$

(4) 時座標之平移

$$t \longrightarrow t + t_0, \quad (t_0 = \text{常數})$$

上四項變換(Transformation)皆謂之運作(Operation),可用運作子(Operator)表示之。

$$(1) \quad r \longrightarrow Tr = r + d, \quad d = \text{常數}$$

$$(2) \quad r \longrightarrow Rr, \quad R \text{ 爲上式之方陣(運作)}$$

$$(3) \quad r \longrightarrow Pr = -r, \quad P \text{ 稱爲宇稱(Parity)運作子(或反投運作子)}$$

$$(4) \quad t \longrightarrow \oplus t = t + t_0.$$

上文所謂不變性,即是一個定律(或是一個方程式,或是物理觀念間的一關係),經過某一個變換(即運作)而不變的性質。最簡單的例,如兩點間的距離爲  $d$ ,或

$$|r_2 - r_1| = d,$$

的關係,不因上述四運作而變易是也。

物理學中許多的定律,對上述四運作中皆有不變性。如牛頓之萬有引力定律;電磁場之基本方程式(Maxwell氏)等皆是。在此吾人務必注重的,便是某一定律對某一運作是否有不變性的問題,有時好似是自然而然的便可解答,但最後的答案仍是須由實驗觀察得來。1956年李政道楊振寧二氏,首次提出所謂「弱作用」對空間反投運作,可能沒有

不變性的疑問。此項推想殊由吳健雄等實驗證實，為物理定律的對稱 (Symmetry) 性之研究開一新紀元。

## 2. 不變性與守恒定律

物理學中的不變性的重要，是：凡對每一運作有不變性，即另有一與其相當的守恒定律 (Conservation Law)。在力學中，如一系統的 Hamiltonian  $H$  對空間座標平移運作有不變性，則此系統的動量必為一常數。

蓋由運動方程式，在  $X$  方向之動量  $P$ ，符合下式

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

如  $\frac{\partial H}{\partial x} = 0,$

則  $P = \text{常數},$

而此即動量守恒定律也。

同理，下表可見  $H$  之不變性與守恒定律之關係。

| $H$ 對運作之不變性 | 守 恒 定 律     |
|-------------|-------------|
| 空 間 平 移     | 動量          |
| 空 間 轉 動     | 角動量         |
| 空 間 反 投     | 宇稱性(Parity) |
| 時 間 平 移     | 能           |

上表祇指出在古典物理中時，空的變換和熟稔的守恒定律。此外尚有其他的對稱性和守恒定律，不在相對論範圍內，茲不提及。

## 3. 矢量、張量的意義

在淺的物理學裏，我們引入了矢量 (Vector) 和張量 (Tensor) 的觀

念。現在我們從比較高一點的觀點，對矢量張量的觀念下一定義。這觀點便是從空間座標的轉動運作來看各物理觀念的性質。矢量的定義，是基於下列之座標變換方程式，由初淺之幾何，如一點在一座標系的座標為  $x_1, x_2, x_3$ ，在另一由此座標系以轉動得來的座標系的座標為  $x'_1, x'_2, x'_3$ ，則此二座標的變換方程式為

$$x'_i = \sum_j a_{ij} x_j, \quad i, j = x, y, z$$

$$\sum_k a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}.$$

如  $v_x, v_y, v_z$  乃遵守上述之變換定律之量值，

$$v'_i = \sum_j a_{ij} v_j,$$

則  $v_x, v_y, v_z$  謂為一矢量  $\mathbf{v}$  之分量。

同此，張量乃遵守下列之變換定律之量值。如

$$T_{ij}, T_{ijk}, \quad i, j = x, y, z,$$

$$T'_{ij} = \sum_{km} a_{ik} a_{jm} T_{km}$$

$$T'_{ijk} = \sum_{rst} a_{ir} a_{js} a_{kt} T_{rst}, \text{ 等}$$

所謂非向量 (scalar) 乃在座標變換時不變之量值，如一矢量的長度，兩矢量間的角度等。

張量觀念的重要性，是在討論物理量 (Physical quantity) 對座標轉動變換的性質，和物理定律對這變換的不變性。假若某一個物理定律，是可以用下列的方程式表出的：

(1) 兩矢量相等： $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ ，

或簡寫為  $\mathbf{V} = 0$ 。

(2) 兩張量相等 (包括非向量及矢量)

$$T = S,$$

則我們即知道這物理定律（即定律的方程式），對座標轉動的運作有不變性。因在此運作下，

$$T'_{ij} = \sum_{k,m} a_{ik} a_{jm} T_{km},$$

$$S'_{ij} = \sum_{k,m} a_{ik} a_{jm} S_{km},$$

如在原來座標系內  $T_{km} = S_{km}$ ，則在新座標系內， $T'_{ij} = S'_{ij}$  也。

總結這節：假若一個物理定律，可以用一張量的方程式表出，則這定律在任何由轉動變換達到的座標皆不變。

#### 4. 不變性與相對論

在通常三度空間之座標轉動運作下，物理定律有不變性，是顯然的，似乎沒有甚麼重要意義。但這個觀念是極重要的。在狹義及廣義相對論中，這「不變性」是一基本性的觀念。

「相對論」的觀念，由來已久；不是由愛因斯坦首創的。舉例言之，在古典力學中，即有所謂伽利利奧（Galileo）變換及不變性。假若有二座標系，沿  $X$  方向，以均速  $v$  作相對的移動。在牛頓力學中，「時」乃絕對的時，故在二系中用的「時」是同一的絕對時。一點的  $X$  座標在這兩座標系中的數值，有下列的關係

$$t = t'$$

$$x = x' + vt'$$

一質點的運動方程式（牛頓第二定律），在  $X$  系中是

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \text{力},$$

假若此力祇是質點間之距離的函數，則此力在二座標系中顯為相同。由上式及由  $x, t$  和  $x', t'$  的變換關係，可得

$$m \frac{d^2 x'}{dt'^2} = \text{力},$$

換言之，從兩個以均速作相對論移動之座標系的觀點，一個質點的運動定律是同一個定律也。這個相對論，稱為伽利里奧不變性。

在電磁學中，我們有馬克斯威(Maxwell)電磁場方程式。但假若我們應用上述的伽利里奧變換於這些方程式，則立刻發現這些方程式不復有這不變性！

在愛因斯坦發現他的狹義相對論前三數年，羅倫茲(H.A. Lorentz, 荷蘭大物理學家)氏曾作一純粹數學性的問題，即是：在甚麼時，空的變換下，電磁場的方程式可有不變性。經過幾度的嘗試，他發現了所謂羅倫茲變換(Lorentz transformation)。

這羅倫茲變換，符合了電磁學基本定律不變性的要求了，但困難是它反而不能符合力學運動定律不變性的要求。見下表

|        | 牛頓力學定律 | 電磁學力律 |
|--------|--------|-------|
| 伽利里奧變換 | 不變性    | 否     |
| 羅倫茲變換  | 否      | 不變性   |

羅倫茲變換的發現雖在前，但它的物理意義，還是由愛因斯坦，經他對時，空的觀念的分析和定義後，才澄清的。經愛因斯坦後，力學亦加以重新檢討，於是力學及電磁學定律，都對羅倫茲變換有不變性。狹義相對論乃成一完整理論。

次一步的問題是：物理(包括力學，電磁學)的定律，在所有羅倫茲座標系(又常稱慣性系，即有相對的均速運動的座標系)變換下有不變性，是很好了。但在以非均速作相對運動的座標系又如何呢？為答此問題，愛因斯坦提出所謂廣義相對論，這觀念應用在萬有引力問題時，成為物理學史中最美麗的理論之一。這理論得有二結果，與牛頓理論有細微的差別。五十年來許多天文及物理學者，不斷的企圖以精細的觀察度

量去鑑別這二理論。今年(1967)初, R. Dicke 氏曾報告他的觀察, 似反證愛因斯坦的結果。但這觀察仍在繼續中, 希望數年內可有更準確的結果。(見下文第十三章第二節)。