众邦教育

经济应用数学基础（二）配套辅导

线性代数

（人大修订本）

同步辅导与习题精解

刘丁酉 主编

重点考点精心提炼

题型解法一一归类

课后习题详尽解答

（1992-2006）考研试题完全收纳

中国科学技术大学出版社

线性代数
同步辅导与习题精解

刘丁酉 编著

中国科学技术大学出版社
合肥·2006

图书在版编目(CIP)数据

线性代数同步辅导与习题精解 /刘丁酉编著．—合肥：中国科学技术大学出版社，2006.8

ISBN 7-312-02004-6

Ⅰ．线…　Ⅱ．刘…　Ⅲ．线性代数—高等学校—教学参考资料　Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 086516 号

出版发行：中国科学技术大学出版社
（安徽省合肥市金寨路 96 号，230026）
印　　刷：安徽新华印刷股份有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：850 mm×1 168 mm　1/32
印　　张：11.875
字　　数：320 千
版　　次：2006 年 8 月第 1 版
印　　次：2006 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：14.00 元

前　　言

线性代数是高等学校理工类、财经类、农林类各专业的一门重要的基础课，也是历年硕士研究生入学的一门必考科目（尤其在高数三、四中的分数值约占25%以上），这使得线性代数课程学习的重要性比以往更加突出。过去的教学参考书较多地关注理工类学习指导与单纯的硕士研究生入学考试，而一本针对财经类和人文管理类专业的教学辅导书是非常必要的。

线性代数的特点是概念抽象，数学符号较多，运算复杂，对抽象性和逻辑性均有较高要求，解题方法灵活多变，证明思路难循常规，因此初学者（尤其是经济类和人文管理类的学生）往往感觉困难重重。为了帮助同学们克服学习线性代数课程中的困难，提高解题与应试技巧，我们特编写了这本《线性代数同步辅导与习题精解》。

人民大学出版社出版的《线性代数》（赵树嫄主编，第三版）为全国许多院校经济类、管理类各专业作为主教材采用，是一本深受读者喜爱的好书。本书以该书为蓝本，按高校经济类和管理类系列辅导教材的编写要求，结合大学生学习和考研的特点及作者在教学中的体会编写而成。全书共分五章，分别为行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值和二次型。各章分别按照重难点归纳与分析、教材习题分析与精解、考研试题分析与精解三个部分编写，其中：

重难点归纳与分析　包括基本内容概述、考点综述、重难点归纳、题型归类与分析、综合举例等五节；

教材习题分析与精解　详细解答原教材各章课后A、B组习题；

考研试题分析与精解　包括硕士研究生入学考试内容与基本要求（以国家考试大纲为准）、1992年～2006年来历年线性代数试

题及 1992 年以前的部分经典考研试题。

各类习题、试题与综合举例均尽可能给出一题多解，或说明重要的解题方法，或分析归类，或突出难点，希望这些做法能给读者以启示。

本书的特点是起点低，针对性强；有坡度，循序渐进；题量大，适应面宽；题型多，覆盖面广。本书可供经济类和人文管理类及少学时工科类大学本科生、专科生及考研人员阅读，也可供数学教师及其他科教工作者参考。

限于编者水平，书中难免有错误和疏漏之处，敬请读者批评指正。

编　者

2006 年 6 月

目　录

第一章 行列式

行列式是线性代数中的一个基本概念,它产生于解线性方程组的过程之中. 二阶及三阶行列式可用于求解二元及三元的线性方程组,对于一般的 n 元线性方程组的解,我们也可以用 n 阶行列式来表示. 事实上,它不仅是研究线性方程组的基本工具,也是讨论向量、矩阵和二次型的重要工具之一,而且在科技领域中得到广泛的应用.

本章主要讨论 n 阶行列式的基本概念与基本性质(包括排列的概念、n 阶行列式的定义与运算规律、行列式的展开定理),以及求解线性方程组的克莱姆(克拉默)法则.

重难点归纳与分析

一、基本内容概述

本章的基本内容主要有:

(1) 二、三阶行列式的基本概念:主要讨论二、三阶行列式的基本概念及对角线法则;

(2) n 阶行列式的定义与基本性质:主要讨论排列、逆序、逆序数的概念以及排列的奇偶性、n 阶行列式的基本概念与基本性质、n 阶行列式的运算、n 阶行列式的展开定理;

(3) 克莱姆法则:主要介绍求解线性方程组的克莱姆法则.

二、考点综述

1. 逆序数

排列中两数的前后位置与大小顺序相反,则这两个数就构成

了一个逆序．排列中所有逆序的总数称为这个排列的逆序数．排列中任意两个元素对换，将改变排列的奇偶性．

2. n 阶行列式的定义

n 阶行列式是指

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n},$$

其中 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的全排列，t 是排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数，$\sum$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数字的所有全排列求和．

3. 行列式的性质

(1) 行列式与其转置行列式相等；

(2) 对调行列式的两行(列)，行列式的值只改变符号；

(3) 行列式某行(列)中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面；

(4) 行列式中若有两行(列)完全相同，或有一行(列)的元素全为零，或有两行(列)元素对应成比例，则此行列式为零；

(5) $$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (b_{1j}+c_{1j}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (b_{2j}+c_{2j}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (b_{nj}+c_{nj}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

(6) 把行列式某行(列)的元素同乘以一数加到另一行(列)的

对应元素上后,行列式的值不变.

4. 行列式的展开定理

(1) 行列式 D 等于它的任一行(列)的所有元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in},$$

或

$$D = a_{1t}A_{1t} + a_{2t}A_{2t} + \cdots + a_{nt}A_{nt}.$$

(2) 行列式任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, \quad (i \neq j),$$

或

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0, \quad (i \neq j).$$

5. 克莱姆法则

设 n 元一次线性方程组为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$,若其系数行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,则它有惟一解

$$x_i = \frac{D_i}{D}\ (i = 1,2,\cdots,n).$$

式中 $D=|\boldsymbol{A}|$, D_i 则是将 D 中的第 i 列换成常数列 $\boldsymbol{b}$ 所得的行列式.

6. 若 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解,则它的系数行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$.

三、重难点归纳

本章的重点为 n 阶行列式的基本概念与运算、n 阶行列式性质、克莱姆法则;难点为 n 阶行列式的定义、n 阶行列式的展开定理.

四、题型归类与分析

本章的基本题型主要有:

1. 关于排列的基本概念与基本性质,通常有排列的逆序数计算、确定排列的奇偶性,用以讨论 n 阶行列式的展开项的符号.

2. 关于 n 阶行列式的定义与运算,其基本题型通常有 n 阶行列式的基本计算方法、n 阶行列式的等式证明、证明一行列式能被

某一整数整除、利用定义计算行列式及其部分项、n 阶行列式的展开法. 具体计算方法包括：

(1) 用定义计算；

(2) 化三角形法；

(3) 利用行列式的性质计算；

(4) 加边法(或升阶法)；

(5) 把各行(或列)加到某一行(或列)；

(6) 逐行(或列)相加减；

(7) 将某一行(或列)倍加到各行(或列)；

(8) 按行(或列)展开(又称降阶法)；

(9) 公式法；

(10) 拆项法；

(11) 数学归纳法；

(12) 递推法；

(13) 构造法；

(14) 含参变量的因式分解法.

3. 利用克莱姆法则求解线性方程组.

五、综合举例

例 1 求下列排列的逆序数：

(1) $135\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$；

(2) $13\cdots(2n-1)(2n)\cdots42$；

(3) $(n-1)(n-2)\cdots1n$.

解 (1) 此排列构成逆序从 2 开始，2 的逆序数为 $n-1$，4 的逆序数为 $n-2$，……一直到 $2n-2$ 的逆序数为 1. 故此排列的逆序总数为

$$t=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

(2) 此排列构成逆序从 $2n-2$ 开始，$2n-2$ 的逆序数为 2，$2n-4$ 的逆序数为 4，……2 的逆序数为 $2n-2$. 故此排列的逆序总数为

$$t = 2 + 4 + 6 + \cdots + (2n - 2) = n(n - 1).$$

(3) 此排列中元素 $n-2,\cdots,1,n$ 的逆序数分别为 $1,2,\cdots,n-2,0$，所以排列的逆序数为

$$t = 1 + 2 + \cdots + (n - 2) + 0 = \frac{(n - 1)(n - 2)}{2}.$$

例 2 填空

(1) 在五阶行列式中，项 $a_{13}a_{2i}a_{31}a_{4j}a_{52}$ 的符号为正号，则 $i=$________，$j=$________；

(2) 在五阶行列式中，项 $a_{21}a_{32}a_{45}a_{14}a_{53}$ 的符号为________.

答 (1) $i=5, j=4$.

(2) $+$.

例 3 利用行列式的定义说明

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 2 & -1 \\ x & 3x & 1 & 1 \\ 1 & 3 & x & 1 \\ 2x & 1 & 1 & 2x \end{vmatrix}$$

是一个四次多项式，并求 $f(x)$ 中 x^4, x^3 的系数及常数项.

解 由行列式的定义可知：展开式的每一项均由四个元素之积给出，故 $f(x)$ 至多为四次多项式，且在所给行列式中只有项 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 可能出现 x^4，而

$$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = (2x)\cdot(3x)\cdot x\cdot(2x) = 12x^4,$$

于是 x^4 的系数为 12，因此 $f(x)$ 是四次多项式.

同理，所给行列式中只有项 $-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ 及 $-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$ 可能出现 x^3，而

$$-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} = (2x)\cdot x\cdot x\cdot(2x) = -2x^3,$$

$$-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} = -(2x)\cdot(3x)\cdot x\cdot(-1) = 6x^3.$$

故 x^3 的系数为 4.

多项式 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的值为 $f(x)$ 的常数项，即

$$f(0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

例 4 计算

$$D_3=\begin{vmatrix}-ab & ac & ae\\ bd & -cd & de\\ bf & cf & -ef\end{vmatrix}.$$

解 先提取第 1,2,3 行的公因式,再提第 1,2,3 列的公因式,得到

$$D_3=adf\begin{vmatrix}-b & c & e\\ b & -c & e\\ b & c & -e\end{vmatrix}=abcdef\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}$$

$$=abcdef\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{vmatrix}=4abcdef.$$

例 5 已知 1998,2196,2394,1800 都能被 18 整除,不计算行列式的值,证明下行列式能被 18 整除:

$$D_4=\begin{vmatrix}1 & 9 & 9 & 8\\ 2 & 1 & 9 & 6\\ 2 & 3 & 9 & 4\\ 1 & 8 & 0 & 0\end{vmatrix}.$$

证法 1 因 $18=2\times 9$ 为合数,且 D_4 的第 3,4 两列分别可被 9,2 所整除,由行列式性质知 D_4 可被 18 整除.

证法 2 将 D_4 的第 1,2,3 列分别乘以 $10^3,10^2,10$,且都加到第 4 列,得到

$$D_4=\begin{vmatrix}1 & 9 & 9 & 1998\\ 2 & 1 & 9 & 2196\\ 2 & 3 & 9 & 2394\\ 1 & 8 & 0 & 1800\end{vmatrix}.$$

因上行列式第 4 列能被 18 整除,故 D_4 能被 18 整除.

例 6 计算 n 阶行列式:

(1) $D_n=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$;

(2) $D_n=\begin{vmatrix} x-b & a & a & \cdots & a \\ a & x-b & a & \cdots & a \\ a & a & x-b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x-b \end{vmatrix}$.

解 (1) 将其他各列统统加到第 1 列,并提出公因式得

$$D_n=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

再将第 1 行的 -1 倍分别加到其他各行得

$$D_n=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

(2) 由(1)得

$$D_n=[(x-b)+(n-1)a](x-b-a)^{n-1}.$$

注 ① 在(1)的计算过程中用到两个基本步骤:一个是将其他各行(或列)统统加到某一行(或列)上去;另一个是将某一行(或列)的倍数,分别加到其他各行(或列)上.它们在计算行列式中会经常用到.

② D_n 计算的结果读者应当熟记,会经常遇到它.

例 7 计算行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}.$$

解 从第 2 行开始，每一行乘以 -1 加到上一行，可得

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -x \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n+x \end{vmatrix}.$$

从第 1 列开始，每列加到后一列，得

$$D_n = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2+a_2 & a_1+a_2+a_3 & \cdots & x+\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \end{vmatrix}$$

$$= x^{n-1}(x+\sum_{i=1}^{n} a_i).$$

例 8 求方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-1-x \end{vmatrix} = 0$$

的全部根.

解 此行列式除主对角线上有 $n-1$ 个 x 外，其余元素均为常数，所以该行列式为 $n-1$ 次多项式. 而当 $x=0,1,2,\cdots,n-2$ 时行

列式均有两行相同，其值为 0，故方程的全部根即为 $x=0,1,2,\cdots,n-2$（$n-1$ 次多项式至多只有 $n-1$ 个根）.

例 9 计算行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

解 按第 1 行展开得

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta\begin{vmatrix} 1 & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2},$$

即

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2})=\beta^2(D_{n-2}-\alpha D_{n-3})$$
$$=\cdots=\beta^{n-2}(D_2-\alpha D_1),$$

$$D_1=\alpha+\beta,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta.$$

所以

$$D_n=\alpha D_{n-1}+\beta^{n-2}[\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta-\alpha(\alpha+\beta)]$$
$$=\alpha D_{n-1}+\beta^n=\alpha(\alpha D_{n-2}+\beta^{n-1})+\beta^n$$
$$=\alpha^2D_{n-2}+\alpha\beta^{n-1}+\beta^n$$
$$\cdots\cdots$$
$$=\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta+\alpha^{n-2}\beta^2+\cdots+\alpha^2\beta^{n-2}+\alpha\beta^{n-1}+\beta^n.$$

注 此类行列式只有主对角线元素及平行于主对角线的两斜排元素不为零，其余元素全为零，因而一般采用递推公式法比较